

ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLI

1954

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XVI

(1° semestre 1954)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1954

ATTI

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINGUISTI

SEDE

ROMA

SEDE OTTAVIA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XVI

(1890-1891)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINGUISTI

1891



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 16 gennaio 1954*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Biologia.** — *Il ciclo vitale di «Cryptochilum echini» Mps., a differenza di altri Infusori, ha fenomeni analoghi a quello dei Metazoi.* Nota (\*) del Socio ACHILLE RUSSO.

Il ciclo di *Cryptochilum e.*, Infusorio ciliato parassita nell'intestino terminale di *Paracentrotus lividus* Mrts., il comune riccio di mare, per i fenomeni che in esso si svolgono, è diverso da quello descritto da Maupas nel 1887 in *Paramecium caudatum* e riferito in tutti i *Trattati*.

Oltre ai fenomeni nucleari diversi è da osservare innanzi tutto che, mentre negli Infusori finora studiati il ciclo si compie in due periodi, *agamico* e *gametico*, in *Cryptochilum* esso è unico, senza alcuna alternanza, e che per tale modalità ricorda già lo sviluppo di un *Metazoo* <sup>(1)</sup>.

Maggiori differenze si osservano nel *periodo gametico* in quanto, mentre nel primo caso, dopo il *periodo agamo*, due individui simili, derivati da scissione, si accoppiano per compiere la *coniugazione*, che caratterizza tale *periodo*, in *Cryptochilum* i due gameti sono differenziati in *maschile* e *femminile* prima di copulare. Tale differenza deriva dalla diversa quantità di sostanza nucleare, essendo maggiore nel gamete femminile; cosicché, mentre negli altri Infusori gl'individui, che si accoppiano sono fra loro simili, in *Cryptochilum* il gamete femminile è prevalente su quello maschile, come l'ovo dei *Metazoi*, svolgendosi in esso i processi necessari alla formazione di un nuovo organismo.

(\*) Presentata nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) A. RUSSO, *Ciclo evolutivo di «Cryptochilum echini» Mps.* (*Ciliato parassita di «Paracentrotus lividus» Mrts.*) («Memoria R. Accad. Lincei», 1930).

Dopo la *coniugazione*, mentre nei vari Infusori si ricostituiscono individui tutti uguali, che rinnovano il *ciclo agamo*, in *Cryptochilum e.* si producono individui adulti femminili e maschili, con apparato nucleare derivato dall'uno e dall'altro gamete. Essi furono detti *misti* e, per la diversa origine dei loro nuclei, furono ritenuti analoghi all'*ovo fecondato* ed alla 1<sup>a</sup> *cellula embrionale* dei *Metazoi*.

L'identità delle due formazioni è avvalorata dal fatto, unico tra i *Protozoi*, che, all'inizio dello sviluppo, esse compiono una *divisione*, che è *differenziale*, mediante la quale nel *Ciliato* si distinguono un individuo *germinale* ed uno *somatico* e nell'embrione dei *Metazoi* blastomeri della stessa natura.

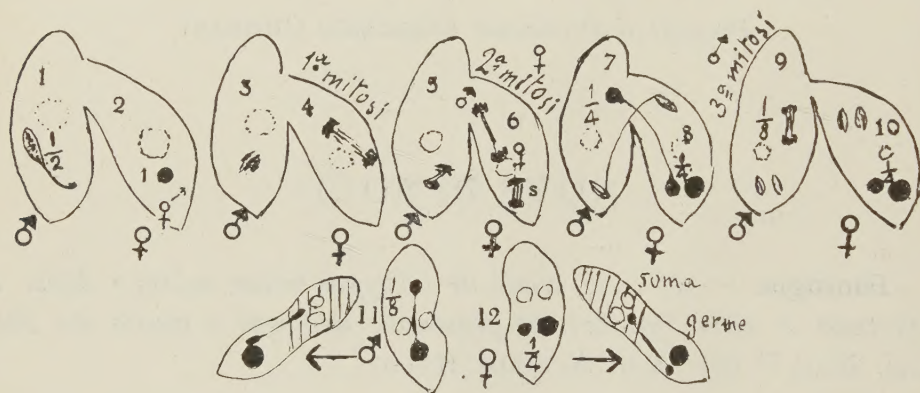


Fig. 1. - Ciclo germinale di *Cryptochilum echini* Mps.

2, gamete femminile (♀) con nucleo sessuale (*micronucleo*) ermafrodita. 4, 1<sup>a</sup> mitosi differenziale. 6, 2<sup>a</sup> mitosi, dei due nuclei derivati l'anteriore formerà il nucleo sessuale dell'individuo maschile, e di quello femminile, il posteriore (S) formerà due nuclei nutritivi. 8, migrazione del nucleo maschile. 9, 3<sup>a</sup> mitosi del nucleo migrato e formazione del nucleo sessuale maschile, che è  $\frac{1}{8}$ , mentre quello femminile, costituitosi con la 2<sup>a</sup> mitosi, è  $\frac{1}{4}$ .

1, 3, 5, 7, 9. Il nucleo sessuale dell'originario gamete maschile (♂) compie, in ritardo due divisioni atipiche. 11, individuo adulto maschile e sua divisione. 12, individuo adulto femminile e sua divisione in un individuo *germinale* ed in uno *somatico*.

N. B. - Nuclei neri sono derivati dal nucleo sessuale ermafrodita del gamete femminile; i nuclei in bianco da quello del gamete maschile. Tutte le figure schematiche corrispondono a microfotografie dei preparati, nella Memoria del 1930 avanti citata.

D'altra parte, mentre in *Cryptochilum e.* dall'individuo somatico si ricostituisce un nuovo ciclo con nuove forme adulte, nei *Metazoi* dai blastomeri somatici hanno origine i diversi *tessuti* con lo stesso *potere germinale*, dimostrato dal processo singolare, descritto nel nostro *Ciliato*.

L'identità dei fenomeni sopra cennati fa già ritenere *Cryptochilum e.* rappresenti un anello di congiunzione tra *Metazoi* e *Protozoi*; ma tale identità è maggiormente avvalorata da fenomeni nucleari, determinati da divisioni mitotiche, che si susseguono, nel corso dello sviluppo, sia nel gamete femminile di *Cryptochilum* sia nell'ovo dei *Metazoi*. Come nella figura annessa, la 1<sup>a</sup> mitosi è *differenziale* poiché dei due nuclei derivati uno è *sessuale* l'altro *trofico*. Il primo, essendo *ermafrodita*, compie due successive divisioni con le quali differenzia i due sessi, contenuti in potenza nel nucleo originario sia del *gamete* femminile in *Cryptochilum*, sia nel nucleo dell'*ovogonio* nei *Metazoi*.



Tali trasformazioni, osservate nel nucleo sessuale del gamete femminile in copula, hanno avuto applicazione nelle *mitosi*, prodotte dal nucleo dell'ovo di Coniglia dentro l'ovaia, per l'emissione delle due *vescicole polari*. Con tali *mitosi* si ha anche la graduale diminuzione della sostanza del nucleo ovulare, per cui con la 1<sup>a</sup>, l'ovo è orientato verso il sesso femminile, con la 2<sup>a</sup>, verso il sesso maschile, come si è detto in una Nota precedente <sup>(2)</sup>, analogamente a quanto fu osservato in *Cryptochilum* e rappresentato nell'annessa figura con la 2<sup>a</sup> e la 3<sup>a</sup> *mitosi*, la prima per il sesso femminile, la seconda per il maschile.

**Fisiologia.** — *Sulle condizioni che permettono la contrazione di tipo tetanico nel miocardio ventricolare dei mammiferi* <sup>(\*)</sup>. Nota di IGINO SPADOLINI e ALDO GIACHETTI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. I. SPADOLINI.

Precedenti ricerche di L. ed I. Spadolini <sup>(1-3)</sup> hanno posto in evidenza che in determinate condizioni il miocardio degli anfibî (*Bufo vulgaris*) può rispondere verso stimoli ripetuti ad opportuna frequenza con un processo di sommazione dei singoli battiti, vale a dire con una contrazione di tipo tetanico più o meno completo esattamente comparabile a quella che si svolge nel muscolo scheletrico e che vien detta *tetano fisiologico*.

In questo fenomeno contrattile, com'è noto, mentre la sommazione avviene a carico del processo meccanico, gli eccitamenti che sembrano determinarla rimangono discontinui ed in rapporto alla frequenza degli stimoli che li evocano. Ciò si desume dal comportamento dei potenziali di azione.

Le condizioni che determinano questo genere di risposta sommata nel miocardio ventricolare di *Bufo vulgaris* sono rappresentate primitivamente da una concentrazione alquanto elevata dei Ca-ioni. In tali condizioni, sotto l'influenza di stimoli ripetuti, sembrano rapidamente stabilirsi processi (che rientrano nei cosiddetti fenomeni *cumulativi da frequenza*) nel cui determinismo entra certamente in giuoco anche la liberazione di acetilcolina, per cui gradatamente il periodo refrattario del cuore si accorcia, la depolarizzazione iniziale e la ripolarizzazione successiva si abbreviano, i fenomeni di sincronizzazione si accentuano in modo da permettere la sommazione delle singole scosse anche per stimoli di frequenza alquanto elevata.

Si sa che in condizioni normali il cuore, di fronte a tali stimoli di frequenza piuttosto elevata, per la legge dell'ineccitabilità periodica che si fonda sulla lunghezza del suo periodo refrattario, non risponde che un certo numero

(2) A. RUSSO, *Fenomeni sessuali nei Metazoi ed in un Protozoo* («*Cryptochilum echini*» *Mps.*). «Rend. Accad. Naz. dei Lincei», 1952.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Firenze.

(\*\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) L. SPADOLINI, «Arch. Fisiol.», 49, 166 (1949).

(2) L. SPADOLINI, «Arch. Fisiol.», 49, 287 (1949).

(3) I. SPADOLINI ed L. SPADOLINI, «Arch. Fisiol.», 50, 1 (1951).

di volte a stimoli ripetuti, decelerando così una frequenza cui esso non può sottostare per le caratteristiche del ciclo della sua eccitabilità.

È noto che l'acetilcolina abbrevia il periodo refrattario del cuore: quindi è perfettamente logico riferire a tale sostanza attiva che si libera spontaneamente nel tessuto miocardico con la funzione di un ormone locale (Spadolini e Giachetti <sup>(4)</sup>), un fattore di non trascurabile interesse nel determinismo del tetano.

In rapporto dunque alla frequenza di stimolazione, ad un certo tenore in Ca-ioni nel tessuto ed alla formazione locale di acetilcolina sembrano rendersi possibili quelle modificazioni del substrato contrattile (actomiosina) atte a permettere la sostenutezza della contrazione tetanica.

Sta il fatto che anche nel miocardio possono realizzarsi, durante il tetano, prolungate tensioni che hanno un valore tre, quattro volte maggiore di quella registrata durante i singoli battiti.

Le condizioni che determinano il tetano, specie in riguardo alla concentrazione del calcio richiesta, sono perfettamente reversibili col semplice lavaggio dell'organo ed anche spontaneamente per fenomeni di adattamento. Sono pertanto da escludersi azioni farmacologiche di natura tossica.

Come si è detto, l'essenza del tetano è legata ad eccitamenti discontinui: le ricerche oscillografiche compiute sul miocardio, derivando i potenziali di azione dalla porzione ventricolare ove il tetano ha la sua migliore espressione, hanno messo in luce la perfetta identità di questo fenomeno con quello che occorre nella fibra scheletrica, permettendo anzi sulla natura generica del fenomeno un esame assai approfondito.

Degne di nota sono le trasformazioni che subiscono i potenziali di azione rapido e lento durante l'istituirsi ed il permanere della tensione nel muscolo: l'oscillazione lenta T, che ci rivela, col tratto R-T, la durata del periodo refrattario va progressivamente avvicinandosi ed addossandosi al potenziale rapido R-S, che, nei casi più tipici, si manifesta durante lo svolgersi del tetano con una oscillazione assai rapida, equifasica, di voltaggio elevato, così da differire notevolmente dai comuni complessi ventricolari che si sogliono indicare negli E.C.G. con le lettere Q-S-T.

Le osservazioni fatte durante lo svolgersi dei tetani incompleti hanno dimostrato che, allorquando la depolarizzazione lenta non raggiunge un certo valore ed il tratto S-T non si accorcia convenientemente, il processo di sommazione non perviene mai alla fusione delle singole scosse. In tali circostanze la ripolarizzazione appare durare un tempo sufficientemente lungo da permettere l'iniziarsi della fase di rilasciamento, che più o meno accentuata determina la incompletezza del tetano. Pertanto si potrebbe concludere che il periodo di maggiore rilasciamento del muscolo coincide con lo stabilirsi del valore più elevato ed anche più rapido assunto dalla ripolarizzazione (onda T).

Il tetano completo del cuore è quindi, in ultima analisi, sostenuto dal prolungarsi della depolarizzazione lenta che permane ad un valore più o

(4) I. SPADOLINI e A. GIACHETTI, « Arch. Fisiol. », 52, 329 (1953).



meno elevato tra uno stimolo e l'altro. Allorché il valore di tale depolarizzazione lenta si attenua, poiché la ripolarizzazione corrispettivamente si accentua (e ciò si osserva quando il ritmo delle risposte va incontro ad un certo rallentamento) immediatamente si stabilisce una incompletezza del tetano.

Appare dunque giustificata da questi esperimenti sul tetano del miocardio l'ipotesi che la contrazione, liberata dall'onda rapida di depolarizza-

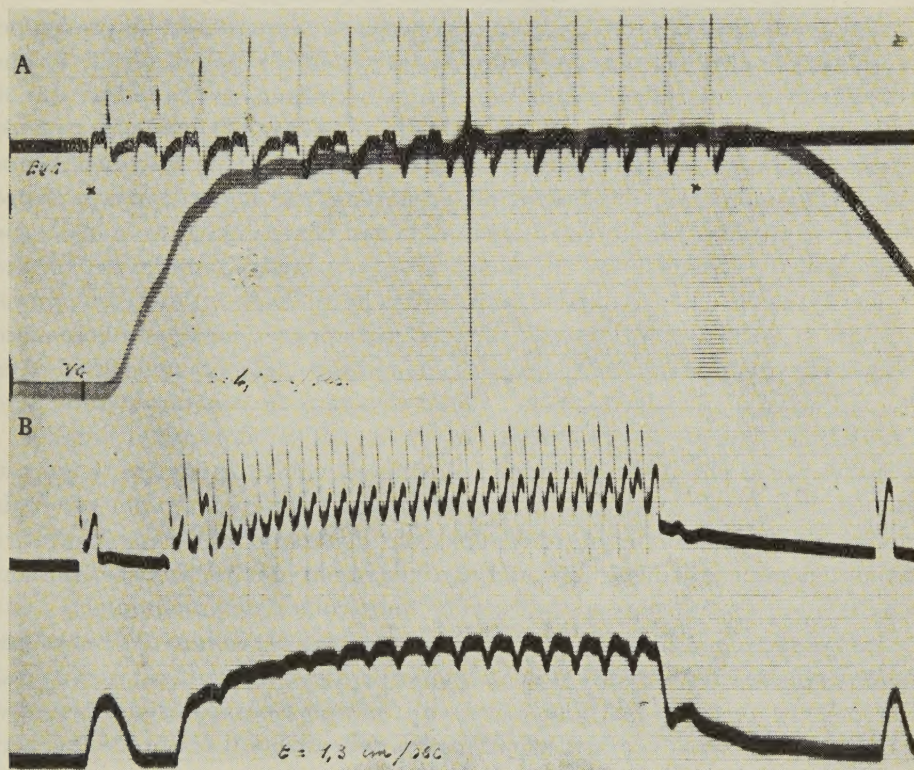


Fig. 1.

A) Tetano completo del miocardio ventricolare di cavia registrato in condizioni isotoniche e guidato con stimoli quadrati di un impulsatore elettronico. Gli stimoli, dei quali è stato indicato con una crocetta soltanto il primo e l'ultimo artefatto sono diretti nella figura verso il basso.

EVG. = elettroventricologramma ottenuto in derivazione difasica dal ventricolo sinistro mediante amplificatore in C.A. (Cost. 0,5; 1 mV/cm).

VG = meccanogramma.

B) Tetano incompleto del miocardio ventricolare di cavia registrato in condizioni pressoché isometriche e guidato come sopra. Amplificatore in C.C. Si noti lo stato di depolarizzazione cui va incontro il tessuto durante tutto il periodo della stimolazione. (Valgono le stesse indicazioni di A).

Cuore di cavia isolato, perfuso nell'apparecchio di Spadolini con soluzione di Ringer ipercalcica. Atrii recisi.

zione (onda R), permane ad un livello pressoché costante, fintantoché la membrana del muscolo rimane convenientemente depolarizzata.

Nella genesi di questi tetani trovano pure conferma le considerazioni svolte dal Kuffler<sup>(5)</sup> sulla contrattura del muscolo striato. Considerando la

(5) S. W. KUFFLER, «Ann. New York Acad. Sc.», 47, 767 (1947) e «J. Neurophysiol.», 9, 367 (1946).



contrattura come l'espressione di una depolarizzazione non accompagnata o solo lentamente accompagnata da una ripolarizzazione del muscolo, tetano e contrattura tendono a presentare tra loro una stretta affinità, poiché legati ambedue ad un potenziale lento di depolarizzazione, di cui il primo avendo carattere di facile risoluzione dovrebbe essere di continuo sostenuto da impulsi propagati, la seconda avente carattere di lenta e parziale reversibilità non necessiterebbe di una continua attivazione.

Nel tetano lo stato di depolarizzazione lenta si manterrebbe pressapoco stazionario, finché evocato da scariche successive di potenziali di azione. Non appena questi rallentano il loro ritmo o cessano, si ristabilisce con la ripolarizzazione più o meno completa delle membrane il rilasciamento del muscolo. Nella contrattura invece il meccanismo contrattile si svincolerebbe, ad un certo momento, dai potenziali propagati, che hanno iniziato il processo, per continuarsi indipendentemente da essi come uno stato di depolarizzazione sovente irreversibile, che può prolungarsi fino alla morte del tessuto.

Nei riguardi delle manifestazioni elettriche di tipo rapido, ossia propagato, che si verificano nel tetano, importante appare, come si è accennato, la sincronia che si stabilisce nella eccitazione degli elementi miocardici investiti dall'onda di depolarizzazione. Come risultato fu constatato una notevole altezza assunta dal potenziale di azione (R-S) durante il tetano.

Le ricerche che abbiamo intrapreso hanno voluto estendere la portata delle osservazioni surriferite al miocardio dei mammiferi, dato che era legittimo il sospetto che il tetano del miocardio dovesse considerarsi limitato a strutture complessivamente meno differenziate di quelle che costituiscono il cuore ed in particolare il miocardio ventricolare dei mammiferi.

Le osservazioni fino ad ora compiute sul cuore isolato di cavia perfuso nell'apparecchio di Spadolini ci hanno permesso di confermare la possibilità di evocare manifestazioni contrattili di tipo tetanico allorché si elevi nel mezzo nutritivo la concentrazione ionica del calcio e il tessuto venga eccitato da opportune cadenze di stimoli.

I dati sperimentali attuali si possono così riassumere:

1° elevando la concentrazione ionica del calcio nel mezzo di perfusione di due, tre volte quella normale per il Ringer dei mammiferi, è possibile constatare per frequenze di stimolazione di 3-6 stimoli al sec, tetani più o meno completi del miocardio ventricolare di cavia. L'azione del calcio appare complessa: in generale, si è osservato dapprima un notevole aumento nell'altezza delle singole contrazioni, di poi la loro altezza tende a diminuire alquanto. È generalmente in questo periodo che si realizzano le condizioni più opportune per la tetanizzazione più o meno completa del preparato. La sostenutezza del tetano si può evidenziare sia in condizioni isotoniche che isometriche; comunque la tensione che si manifesta nella contrazione di tipo tetanico è in genere aumentata del 50-100 p. 100 rispetto a quella delle singole sistoli;

2° in molti casi - per solito dopo stimolazioni piuttosto prolungate - anche il cuore dei mammiferi può entrare in uno stato autoritmico della

stessa frequenza di quella primitivamente imposta, e sotto l'influenza di queste scariche spontanee di potenziali autoritmici, anche la sommazione delle singole scosse (tetano) si prolunga corrispondentemente;

3° assoggettando il cuore a rapidi aumenti nella concentrazione degli ioni-Ca del mezzo, è possibile constatare l'istituirsi spontaneo, vale a dire senza alcun precedente stimolo artificiale, di stati autoritmici a frequenza relativamente elevata, capaci di sostenere pur essi una contrazione di tipo tetanico. Si è constatato che questi stati autoritmici possono evolvere in episodi di fibrillazione parziale o totale di tutta la muscolatura ventricolare. In tali casi si osservano modificazioni dei p.d.a., per cui a quegli episodi di ipersincronia caratterizzanti la contrazione tetanica di tutto il ventricolo, subentrano stati di desincronizzazione parziale, identificabili nel tracciato elettrico, dapprima come processi di fluttuazione, infine di fibrillazione muscolare.

Diverse considerazioni di ordine fisiologico e clinico ci permette questo nuovo gruppo di ricerche sul cuore dei mammiferi:

1° l'importanza che nell'equilibrio elettrolitico vigente nel miocardio ha in particolare la concentrazione degli ioni-Ca per la genesi del tetano muscolare;

2° la constatazione che anche il miocardio ventricolare dei mammiferi, cui è negata in condizioni normali ogni capacità sommatoria delle sue manifestazioni meccaniche, può, in determinate condizioni, sotto l'influenza di eccitamenti che si ripetono con frequenza opportuna andare incontro a fenomeni contrattili identificabili coi tetani completi ed incompleti della fibra muscolare striata. La variante fondamentale che differenzia l'autoritmia del miocardio dalla tetanizzabilità della fibra scheletrica sembra poggiare non su basi strutturali ma sul valore che ha il Ca-ione in forma utilizzabile dal substrato contrattile;

3° da un punto di vista clinico si può confermare il sospetto che in diverse circostanze fisiopatologiche o patologiche, nelle quali è disturbato l'equilibrio del calcio, allorché si istituiscono ritmi di elevata frequenza, pur non verificandosi contrazioni tetaniche di notevole sostenutezza, il miocardio ventricolare possa permanere in uno stato di semicontrazione in dipendenza degli eccitamenti che riceve, definibile, da un punto di vista teorico, come un tetano notevolmente incompleto.

È certo che il comportamento ipersincronico dei potenziali ventricolari descritti in molti casi, cosiddetti di fibrillazione ventricolare, ci porta a credere che si tratti invece di forme particolari di contrazione in cui occorrono fenomeni sommatori meccanici incompleti di tipo tetanico.

È possibile che l'impiego di sali di calcio facilmente ionizzabili, correntemente eseguito nella pratica medica per il trattamento di svariate affezioni, possa contribuire in particolari preesistenti condizioni del cuore a generare nel miocardio ventricolare stesso stati autoritmici ad elevata frequenza capaci di determinare contrazioni tetaniformi non idonee a sostenere una efficiente gettata pulsatoria.



## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi matematica.** — *Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti (\*)*. Nota II di FERNANDO BERTOLINI, presentata (\*\*) dal Socio M. PICONE.

Vogliamo fare ora alcune osservazioni, non del tutto immediate, sui risultati della prima Nota di questo titolo, che verrà citata con (I), e trattarne due casi particolari.

1. Consideriamo un campo connesso  $A$ , il cui involucro  $D = A + \bar{A}$  supponiamo decomponibile nella somma di  $\mu$  domini  $D_1, D_2, \dots, D_\mu$  mutuamente privi di punti interni comuni, ciascuno verificante le ipotesi ammesse in (I), n. 1, per il dominio ivi chiamato  $D$ ; sia  $n_Q^{(j)}$  l'asse normale ad  $\bar{A}D_j$  nel punto  $Q \in \bar{A}D_j$ , orientato verso l'interno di  $D_j$ . Consideriamo una funzione  $f(P)$  continua in  $D$  ed armonica in  $A$ , della classe  $[f]_{D_1} \cdot [f]_{D_2} \cdots [f]_{D_\mu}$ ; sia  $g_j(P)$  la funzione (quasi continua e sommabile su  $\bar{A}D_j$ , rispetto all'arco  $s$ ) verso cui (per ogni punto  $P \in \bar{A}D_j$ , eccettuati al più quelli d'un insieme chiuso e di misura lineare nulla) converge  $\frac{\partial}{\partial n_P^{(j)}} f(Q)$  al tendere di  $Q$  a  $P$  su  $n_P^{(j)}$ . Avremo allora

$$(I) \quad \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{A}D_j} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q^{(j)}} \log \overline{PQ} - \log \overline{PQ} \cdot g_j(Q) \right] ds(Q) = \begin{cases} f(P), & \text{per } P \in A - \sum_{j=1}^{\mu} \bar{A}D_j \\ 0, & \text{per } P \in \mathcal{C}D. \end{cases}$$

Per ottenere una espressione più conveniente della (I), chiamiamo  $n_P^+$  ed  $n_P^-$  i due assi normali in  $P$  a  $\bar{A}D_1 + \bar{A}D_2 + \cdots + \bar{A}D_\mu$ , e poniamo:

$$g_+(P) = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\partial}{\partial n_P^+} f(Q) \text{ (su } n_P^+), \quad \text{se } n_P^+ \text{ penetra in } A,$$

$$g_-(P) = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\partial}{\partial n_P^-} f(Q) \text{ (su } n_P^-), \quad \text{se } n_P^- \text{ penetra in } A,$$

$$g_+(P) = 0, \quad \text{se } n_P^+ \text{ penetra in } \mathcal{C}D,$$

$$g_-(P) = 0, \quad \text{se } n_P^- \text{ penetra in } \mathcal{C}D,$$

e analogamente, per  $M \neq P$ ,

$$h_+(M, P) = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\partial}{\partial n_P^+} \log \overline{MQ} \text{ (su } n_P^+), \quad \text{se } n_P^+ \text{ penetra in } A,$$

$$h_-(M, P) = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\partial}{\partial n_P^-} \log \overline{MQ} \text{ (su } n_P^-), \quad \text{se } n_P^- \text{ penetra in } A,$$

$$h_+(M, P) = 0, \quad \text{se } n_P^+ \text{ penetra in } \mathcal{C}D,$$

$$h_-(M, P) = 0, \quad \text{se } n_P^- \text{ penetra in } \mathcal{C}D.$$

(\*) Lavoro eseguito all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Nella seduta del 12 dicembre 1953.



Per  $P \in \mathfrak{F}D_1 + \mathfrak{F}D_2 + \dots + \mathfrak{F}D_\mu - \mathfrak{F}A$  avremo  $g_+(P) + g_-(P) = 0$ ;  
 per  $M \in \mathfrak{C}(\mathfrak{F}D_1 + \mathfrak{F}D_2 + \dots + \mathfrak{F}D_\mu)$  e  $P \in \mathfrak{F}D_1 + \mathfrak{F}D_2 + \dots + \mathfrak{F}D_\mu - \mathfrak{F}D$   
 avremo  $h_+(M, P) + h_-(M, P) = 0$ ;

Pertanto dalla (1) segue

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}A} \{f(Q)[h_+(P, Q) + h_-(P, Q)] - \log \overline{PQ} \cdot [g_+(Q) + g_-(Q)]\} ds(Q) = \begin{cases} f(P) & \text{per } P \in A \\ 0 & \text{per } P \in \mathfrak{C}D \end{cases};$$

scriveremo ancora, convenzionalmente, in luogo della (2), la

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}A} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - \log \overline{PQ} \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) = \begin{cases} f(P) & \text{per } P \in A, \\ 0 & \text{per } P \in \mathfrak{C}D \end{cases} \quad (1).$$

Supposto ora di conoscere i valori di  $g_+(P)$ ,  $g_-(P)$ ,  $f(P)$  su una parte  $C'$  della frontiera di  $A$  tale, che  $C' \cdot \mathfrak{F}D_j$  sia vuoto ovvero verifichi le ipotesi ammesse in (I), n. 1, per l'insieme ivi chiamato  $C'$ , applicando i risultati di (I) ai singoli domini  $D_1, D_2, \dots, D_\mu$  si ottiene ancora la formola risolutiva (12), con l'interpretazione su convenuta del segno d'integrale curvilineo; alla stessa formola si può d'altronde arrivare direttamente dalla (2), con dei ragionamenti, per così dire, che stiano a quelli svolti da M. Picone<sup>(2)</sup> come i ragionamenti di (I) stanno a quelli svolti da G. Zin<sup>(3)</sup>.

(1) Si noti che la (3), con l'interpretazione su dichiarata, generalizza la formola di Cauchy anche al caso che la frontiera di  $A$  contenga curve *aperte interne* a  $D$ . Per esempio, se il capo  $A$  è definito dalle disequazioni

$$x^2 + y^2 < 4,$$

$$|x| + |y| - 1 + \left| |y| - 1 \right| > 0,$$

$$|y| + \left| |x| - 1 \right| + \left| |x| - 1 \right| > 0,$$

la sua frontiera  $\mathfrak{F}A$  si compone della circonferenza  $C$  di equazione  $x^2 + y^2 = 4$ , e dei segmenti  $S_y$  ed  $S_x$  definiti rispettivamente dalle relazioni  $|x| = 0, |y| < 1$ , ed  $|y| = 0, |x| < 1$ . il dominio  $D$  ( $x^2 + y^2 \leq 4$ ) può esser decomposto nei quattro domini, intersezione con ciascuno dei quattro quadranti del piano  $(x, y)$ . Supponendo la funzione  $f(P)$  dotata di derivata normale *interna ad*  $A$  in ogni punto di  $\mathfrak{F}A$  (escludendo, si capisce, i punti singolari, come l'origine e gli estremi dei segmenti  $S_x$  ed  $S_y$ ), la (3) andrebbe letta:

$$f(P) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - \log \overline{PQ} \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{S_x} \log \overline{PQ} \left[ \frac{\partial}{\partial y_Q^+} f(Q) + \frac{\partial}{\partial y_Q^-} f(Q) \right] ds(Q) - \frac{1}{2\pi} \int_{S_y} \log \overline{PQ} \left[ \frac{\partial}{\partial x_Q^+} f(Q) + \frac{\partial}{\partial x_Q^-} f(Q) \right] ds(Q);$$

(2) M. PICONE, *Sul calcolo delle funzioni olomorfe di una variabile complessa*.

(3) G. ZIN, *Esistenza e rappresentazione di funzioni analitiche, le quali, su una curva di Jordan, si riducono ad una funzione assegnata*, in « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, Tomo XXXIV, pp. 365-405 (1953).

2. Torniamo ora alle ipotesi di (I), n. 1. Assegnata nel campo  $A$  una funzione hölderiana  $\varphi(P)$ , sia  $[f]_{D,\varphi}$  la classe delle funzioni dotate delle proprietà seguenti: in  $A$  sono integrali della equazione  $\Delta_2 f = \varphi$ ; sono continue in  $D$ , su  $\mathfrak{F}D$  assolutamente continue rispetto all'ascissa curvilinea, con derivata (rispetto all'ascissa curvilinea) hilbertiana su  $\mathfrak{F}D$ ; per quasi ogni  $P \in \mathfrak{F}D$  esiste determinato e finito il limite

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\partial}{\partial n_P} f(Q) \quad [\text{su } n_P],$$

che riesce funzione hilbertiana su  $\mathfrak{F}D$ . Consideriamo il problema:

$(D, C')_\varphi$ . Esiste in  $[f]_{D,\varphi}$  una funzione  $f(P)$  verificante le condizioni

$$(4) \quad f(P) = F(P) \quad , \quad \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\partial}{\partial n_P} f(Q) = G(P) \quad [\text{su } n_P],$$

quasi ovunque su  $C'$ ?

Se esiste, essa è ben determinata: *assegnarne una formola risolutiva.*

Questo problema si può discutere in modo perfettamente analogo a quello svolto in (I), n. 2, con la sola avvertenza che il teorema di reciprocità tra  $v_k(P)$  e  $f(P)$  deve ora scriversi

$$\int_{\mathfrak{F}D} \left( f \frac{\partial}{\partial n} v_k - v_k \frac{\partial}{\partial n} f \right) ds + \int_D (f \Delta_2 v_k - v_k \Delta_2 f) dx dy = 0;$$

otteniamo dunque il teorema:

*Posto*

$$\alpha_k = \int_{C'} \left[ F(P) \frac{\partial}{\partial n} v_k(P) - v_k(P) \cdot G(P) \right] ds + \sum_{i=1}^v [F(P'_i) \cdot u_k(P'_i) - F(P_i) \cdot u_k(P_i)] - \int_D \varphi(P) \cdot v_k(P) dx dy,$$

affinché il problema  $(D, C')_\varphi$  abbia soluzione, occorre e basta che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k w_k(P)$$

converga in media su  $C''$ , e che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(P)$$

converga nei punti  $P'_i$  avendo per somma ivi  $F(P'_i) - F(P_i)$  [ $i = 1, 2, \dots, v$ ].

La relativa formola risolutiva si può scrivere

$$f(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}D} \left[ f^o(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \bar{PQ} - g^o(Q) \cdot \log \bar{PQ} \right] ds(Q) - \frac{1}{2\pi} \int_D \varphi(Q) \cdot \log \bar{PQ} dT(Q) \quad (P \in A)$$

ovvero, con le restrizioni ammesse in (I),

$$\begin{aligned}
 f(P) = & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left\{ F(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left[ \log \overline{PQ} - \sum_{k=0}^n c_k(P) v_k(Q) \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. - G(Q) \left[ \log \overline{PQ} - \sum_{k=0}^n c_k(P) v_k(Q) \right] \right\} ds(Q) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2\pi} \int_D \varphi(Q) \cdot \left[ \log \overline{PQ} - \sum_{k=0}^n c_k(P) v_k(Q) \right] dT(Q) \right), \quad \text{per } P \in A,
 \end{aligned}$$

avendo posto ancora

$$\begin{aligned}
 c_k(P) = & \int_{C'} \left[ v_k(Q) \log \overline{PQ} - U_k(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} \right] ds(Q) \\
 & + \sum_{i=1}^v U_k(P_i'') \cdot (C'') \int_{P_i'}^{P_i''} \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} ds(Q).
 \end{aligned}$$

Naturalmente, se il problema  $(D, C')_\varphi$  viene considerato nelle ipotesi del n. 1 di questa Nota, il teorema e la formola risolutiva ora dati sono ancora validi, a patto di considerare l'integrale curvilineo nel senso ivi dichiarato.

3. Studiamo ora il problema  $(D, C')_\varphi$  in un caso particolare, rientrante nelle ipotesi del n. 1. Al campo connesso  $A$  sia esterno il punto  $P_0$  e sia interna la corona circolare di centro  $P_0$ , raggio minore  $r_0$ , raggio maggiore  $R_0$  ( $0 < r_0 < R_0 \leq +\infty$ ); per  $r_0 < r < R_0$ , il campo  $A_r$ , luogo dei punti di  $A$  aventi da  $P_0$  distanza minore di  $r$ , verifichi le ipotesi ammesse al n. 2 per il campo ivi chiamato  $A$ . La frontiera di  $A_r$  si compone della circonferenza  $\Gamma_r$  d'equazione  $\overline{P_0P} = r$ , e di quei punti di  $\mathfrak{A}$  che hanno da  $P_0$  distanza minore di  $r$ : questi ultimi costituiscono una curva  $C_0$ . Data una funzione  $f(P)$  della classe  $[f]_{A_r, \varphi}$ , avremo

$$\begin{aligned}
 (5) \quad f(P) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - \log \overline{PQ} \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{C_0} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - \log \overline{PQ} \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_{A_r} \varphi(Q) \cdot \log \overline{PQ} dT(Q) \quad , \quad \text{per } r_0 < r < R_0, \quad P \in A_r,
 \end{aligned}$$

in base ai risultati precedenti, ed eventualmente interpretando l'integrale curvilineo al modo già convenuto. Per scrivere la (5) in modo più conveniente, chiamate  $z$  e  $z_0$  rispettivamente le affisse di  $P$  e  $P_0$ , poniamo

$$p_k(P) = \Re(z - z_0)^k, \quad q_k(P) = \Im(z - z_0)^k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

per elementari teoremi, avremo allora

$$(6) \quad \log \overline{PQ} = \log \overline{P_o Q} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [p_k(P) \cdot p_{-k}(Q) - q_k(P) \cdot q_{-k}(Q)]$$

uniformemente al variar di  $P$  in ogni insieme chiuso interno ad  $A_r$ , ed al variar di  $Q$  sulla circonferenza  $\Gamma_r$ ; la relazione (6) è anche derivabile termine a termine quante volte si vuole, mantenendo il carattere di convergenza uniforme già detto. Sostituendo dunque la (6) nella (5) si ottiene

$$f(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{C}_0} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \frac{PQ}{P_o Q} - \log \frac{\overline{PQ}}{\overline{P_o Q}} \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{A_r} \varphi(Q) \log \frac{\overline{PQ}}{\overline{P_o Q}} dT(Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [a_k p_k(P) - b_k q_k(P)],$$

essendo

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{C}_0} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} p_{-k}(Q) - p_{-k}(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) - \frac{1}{2\pi} \int_{A_r} \varphi(Q) p_{-k}(Q) dT(Q), \\ b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{C}_0} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} q_{-k}(Q) - q_{-k}(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) - \frac{1}{2\pi} \int_{A_r} \varphi(Q) q_{-k}(Q) dT(Q);$$

difatti, in base al teorema di reciprocità, si ha

$$\int_{\tilde{\Gamma}_r} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - \log \overline{PQ} \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) = \\ \int_{\tilde{\Gamma}_r} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{P_o Q} - \log \overline{P_o Q} \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ p_k(P) \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\Gamma}_r} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} p_{-k}(Q) - p_{-k}(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) \right. \\ \left. - q_k(P) \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\Gamma}_r} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} q_{-k}(Q) - q_{-k}(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) \right\} = \\ - \int_{\tilde{C}_0} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{P_o Q} - \log \overline{P_o Q} \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) + \int_{A_r} \varphi(Q) \cdot \log \overline{P_o Q} dT(Q) \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ p_k(P) \left\{ \int_{\tilde{C}_0} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} p_{-k}(Q) - p_{-k}(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) - \int_{A_r} \varphi(Q) \cdot p_{-k}(Q) dT(Q) \right. \right. \\ \left. \left. - q_k(P) \right\} \int_{\tilde{C}_0} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} q_{-k}(Q) - q_{-k}(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) - \int_{A_r} \varphi(Q) \cdot q_{-k}(Q) dT(Q) \right\} \Bigg\}.$$



4. Studiamo ora un secondo caso particolare, che però non rientra nel precedente: sia  $A$  un campo illimitato (anche privo di punti esterni, eventualmente), la cui frontiera  $\mathfrak{F}A$  può anche esser illimitata; per ogni  $R$  maggiore di un certo  $R_0$ , il campo  $A_R$  costituito dai punti di  $A$  aventi dall'origine distanza minore di  $R$  è connesso e verifica le ipotesi ammesse al n. 2 per il campo ivi chiamato  $A$ ; è assegnata in  $A$  una funzione della classe  $[f]_A$ . Avremo dunque

$$(7) \quad f(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - \log \overline{PQ} \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - \log \overline{PQ} \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) \quad \text{per } P \in A_R,$$

avendo chiamato  $C_R$  l'insieme  $\mathfrak{F}A_R \cdot \mathfrak{F}A$  e  $\Gamma_R$  quell'arco della circonferenza di raggio  $R$  e centro nell'origine che aggiunto a  $C_R$  dà  $\mathfrak{F}A_R$ .

Dalla (7), ponendo  $\int_{\mathfrak{F}A} \dots ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \dots ds$ , si vede che

se è

$$(8) \quad f(Q) = o(1) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \overline{OQ}} f(Q) = o\left(\frac{1}{\overline{OQ} \cdot \log \overline{OQ}}\right) \quad \text{per } \overline{OQ} \rightarrow \infty,$$

allora è

$$(9) \quad f(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}A} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \overline{PQ} - \log \overline{PQ} \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) \quad \text{per } P \in A;$$

se, per un certo numero naturale  $n$ , si ha

$$(10) \quad f(Q) = o(\overline{OQ}^n) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \overline{OQ}} f(Q) = o(\overline{OQ}^{n-1}) \quad \text{per } \overline{OQ} \rightarrow \infty,$$

allora, dette  $x$  e  $y$  le coordinate cartesiane di  $P$ , per ogni coppia numeri interi non negativi  $h$  e  $k$  aventi  $n$  come somma, si ha

$$(11) \quad -\frac{\partial^n}{\partial x^h \partial y^k} f(P) = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}A} \left[ f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{\partial^n}{\partial x^h \partial y^k} \log \overline{PQ} - \frac{\partial^n}{\partial x^h \partial y^k} \log \overline{PQ} \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right] ds(Q) \quad \text{per } P \in A.$$

La (9) è immediata; la (11) si ottiene derivando rispetto ad  $x$  e ad  $y$  ambo i membri della (7). Naturalmente, questi integrali curvilinei vanno intesi nel senso dichiarato al n. 1.

5. Nel problema trattato al n. 4, ammettendo l'ipotesi (8) si ottiene la formola risolutiva (9), che determina  $f(P)$  in tutto il campo  $A$ , noti che siano i valori di  $f(P)$  e di  $\frac{\partial}{\partial n_P} f(P)$  su  $\mathfrak{F}A$ ; ammettendo invece l'ipo-

tesi (10) si ottiene la formola risolutiva (11), che determina la  $f(P)$  a meno d'un polinomio armonico di grado  $(n-1)$ : l'ulteriore determinazione di tale polinomio, a partire dai valori (supposti noti) che  $f(P)$  e la sua derivata normale hanno su  $\mathfrak{F}A$ , è un problema algebrico lineare la cui compatibilità impone già delle condizioni (di tipo integrale) sui dati di Cauchy. Considereremo due esempi particolari.

I. *Esempio.* - Supponiamo che sia  $f(Q) = o(\overline{OQ^3})$ ,  $\frac{\partial}{\partial \overline{OQ}} f(Q) = o(\overline{OQ^2})$ ; la (11) individua dunque una funzione  $f^o(P)$  definita nel campo  $A$ , nulla in un fissato punto  $P^o \in A$  assieme alle sue derivate prime e seconde, avente le derivate terze ordinatamente identiche a quelle di  $f(P)$ ; la differenza  $f(P) - f^o(P)$  è un polinomio armonico di secondo grado

$$u(x, y) = a(x^2 - y^2) + 2bxy + 2cx + 2dy + e,$$

di cui possiamo ritenere noti i valori assunti su  $\mathfrak{F}A$ , di cui pure possiamo ritenere nota su  $\mathfrak{F}A$  la derivata normale.

Poiché  $\mathfrak{F}A$  contiene degli archi di curva, e perciò infiniti punti, posso prendere su di essa due punti (regolari) distinti,  $P_1 \equiv (x_1, y_1)$  e  $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ : se tutti gli altri punti di  $\mathfrak{F}A$  sono allineati a  $P_1$  e  $P_2$ , posso supporre che  $\mathfrak{F}A$  sia contenuta nell'asse  $x$ ; allora, preso un terzo punto  $P_3 \equiv (x_3, 0)$  su  $\mathfrak{F}A$ , il sistema algebrico lineare

$$ax_i^2 + 2cx_i + e = u(x_i, 0) \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$2bx_i + 2d = u_y(x_i, 0) \quad (i = 1, 2)$$

è compatibile e individua i coefficienti  $a, b, c, e$ .

Supponiamo ora che ci sia su  $\mathfrak{F}A$  un punto  $P_3 \equiv (x_3, y_3)$  regolare e non allineato a  $P_1$  e  $P_2$ : dovrà esistere su  $\mathfrak{F}A$  un quarto punto  $P_4 \equiv (x_4, y_4)$  regolare e tale, da aversi

$$\left\| \begin{array}{cccccc} x_1^2 - y_1^2 & 2x_1 y_1 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ x_2^2 - y_2^2 & 2x_2 y_2 & 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ x_3^2 - y_3^2 & 2x_3 y_3 & 2x_3 & 2y_3 & 1 \\ x_4^2 - y_4^2 & 2x_4 y_4 & 2x_4 & 2y_4 & 1 \end{array} \right\|^2 > 0,$$

diversamente  $\mathfrak{F}A$  si ridurrebbe all'intersezione di due iperboli distinte, ciò che è escluso.

Se  $\mathfrak{F}A$  si riduce alla iperbole equilatera individuata dai punti  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , di equazione

$$(12) \quad \alpha(x^2 - y^2) + 2\beta xy + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 > 0),$$

preso un punto  $P_5 \equiv (x_5, y_5)$  regolare di  $\mathfrak{F}A$ , non appartenente alla circonferenza

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) + 2(\alpha\gamma + \beta\delta)x + 2(\beta\gamma - \alpha\delta)y + \delta^2 = 0,$$

il sistema algebrico lineare

$$\begin{cases} 2\rho \{ a [\alpha (x_5^2 + y_5^2) + \gamma x_5 - \delta y_5] + b [\beta (x_5^2 + y_5^2) + \delta x_5 + \gamma y_5] \\ \quad + c (\alpha x_5 + \beta y_5 + \gamma) + d (-\alpha y_5 + \beta x_5 + \delta) \} = \frac{\partial}{\partial n} u (P_s), \\ a (x_i^2 - y_i^2) + 2 b x_i y_i + 2 c x_i + 2 d y_i + e = u (x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ (\rho = 1 : [(\alpha x_5 + \beta y_5 + \gamma)^2 + (-\alpha y_5 + \beta x_5 + \delta)^2]) \end{cases}$$

è compatibile ed individua i coefficienti  $a, b, c, d, e$ .

Infine, se  $\mathfrak{F}A$  ammette un punto  $P_s \equiv (x_s, y_s)$  non appartenente alla iperbole (12), il sistema algebrico lineare

$$a (x_i^2 - y_i^2) + 2 b x_i y_i + 2 c x_i + 2 d y_i + e = u (x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

è compatibile ed individua i coefficienti  $a, b, c, d, e$ .

II. *Esempio.* - Supponiamo che sia  $f(Q) = o(\overline{OQ}^2)$ ,  $f(Q) = o(\overline{OQ})$ , e che il semipiano  $y > 0$  sia il campo  $A$ . Detto  $P^0$  un punto fissato di  $A$ ,  $P$  e  $Q$  punti variabili,  $x$  ed  $y$  le coordinate cartesiane di  $P$ , poniamo

$$f_y(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0+} f_y(x, y),$$

$$f^0(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0+} f^0(x, y), \quad f_y^0(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0+} f_y^0(x, y),$$

$f^0(P)$  essendo quella funzione (armonica in  $A$ , continua in  $D$ ) che verifica le condizioni

$$f^0(P^0) = 0, \quad f_x^0(P^0) = f_y^0(P^0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f^0(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}A} f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left\{ \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}{\frac{\partial x \partial y} \log \overline{PQ}} - \left\{ \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}{\frac{\partial x \partial y} \log \overline{PQ}} \frac{\partial}{\partial n_Q} f(Q) \right\} \right\} ds(Q) \text{ per } P \in A.$$

Per la (11) avremo

$$f(P) = f^0(P) + ax + by + c,$$

con

$$ax_i + c = f(x_i, 0) - f^0(x_i, 0) \quad (i = 1, 2; x_1 \neq x_2),$$

$$b = f_y(x_1, 0) - f_y^0(x_1, 0).$$

Perché dunque esista la funzione  $f(P)$  dotata delle proprietà ammesse, è necessario che sia

$$\begin{cases} f(x, 0) = f^0(x, 0) + \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} [f(x_1, 0) - f^0(x_1, 0)] \\ \quad + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} [f(x_2, 0) - f^0(x_2, 0)], \\ f_y(x, 0) - f_y^0(x, 0) = \text{costante}. \end{cases}$$

**Analisi matematica.** — *L'algoritmo della funzione di Dirac. — Giustificazione elementare e applicazioni ad equazioni classiche.* Nota di LUIGI CASTOLDI, presentata (\*) dal Corrisp. A. TONOLO.

1. Mi sono occupato altra volta <sup>(1)</sup> dell'algoritmo della funzione di Dirac <sup>(2)</sup> allo scopo di giustificarne l'impiego sulla base di nozioni appartenenti all'ambito della teoria classica delle funzioni. Altri <sup>(3)</sup> ha adempiuto assai più a fondo ed estesamente a tale compito utilizzando i metodi e i concetti dell'Analisi moderna. Ma tanto il mio tentativo quanto — e assai di più — la testé richiamata sistemazione generale non sono esenti — se così posso esprimermi — da un effetto di certo appesantimento di gran parte della immediata ed elegante maneggevolezza del primitivo procedimento di Dirac. Cosicché sono ancora tentato di tornare sull'argomento per mostrare che quell'algoritmo, come — diversamente dal suo più antico confratello di Heaviside — riesce ad utili ed esatti risultati non soltanto nelle mani del primo ideatore, ma anche in quelle di ognuno che correttamente lo applichi, così è suscettibile di più elementari giustificazioni dirette, tali da riuscire apprezzabili a quanti, pur desiderosi di correttezza logica, sono peraltro insofferenti di elaborate astrazioni. È a questo nuovo e più elementare tentativo, nonché ad alcune illustrazioni su equazioni classiche, che dedico le brevi note seguenti.

2. RIFERIMENTO ALL'INTEGRALE DI STIELTJES. CASO UNIDIMENSIONALE. — Sia  $dm$  l'elemento di una funzione d'insieme definita sull'asse reale ed  $f(x)$  una funzione integrabile nel senso di Riemann-Stieltjes, avendo valor finito per ogni intervallo  $(a, b)$  l'integrale di Stieltjes

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dm.$$

Denoto in particolare con  $\underset{(x)}{du}$  l'elemento della funzione d'insieme per cui è

$$(2) \quad \int_a^b \underset{(x)}{du} = \begin{cases} 1 & \text{per ogni intervallo } (a, b) \text{ con } a < x < b, \\ 1/2 & \text{per ogni intervallo } (a, b) \text{ per cui sia} \\ & x = a \text{ o } x = b, \\ 0 & \text{per ogni qualsivoglia altro intervallo.} \end{cases}$$

(\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) L. CASTOLDI, *La funzione di Dirac e un criterio di completezza per sistemi di funzioni ortonormali*. Suppl. al vol. VII, ser. IX, del «Nuovo Cimento», n. 1 (1950).

(2) P. A. M. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford (1947).

(3) L. SCHWARTZ, *Theorie des distributions*. «Actualités Scientifiques et Industrielles», Paris (1951).



È ovviamente per una generica funzione  $f(x)$ :

$$(3) \quad \int_a^b f(t) du_{(x)} = \begin{cases} f(x) & \text{nelle alternative ordinatamente} \\ 1/2 f(x) & \text{indicate in (2).} \\ 0 & \end{cases}$$

Se  $f(x)$  è derivabile in  $(a, b)$  si ha anche, sottintendendo le medesime alternative:

$$(4) \quad \int_a^b f'(t) du_{(x)} = \begin{cases} f'(x) \\ 1/2 f'(x) \\ 0 \end{cases},$$

ed è altresì, naturalmente, in virtù di (3):

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \int_a^b f(t) du_{(x)} = \begin{cases} f'(x) \\ 1/2 f'(x) \\ 0 \end{cases}.$$

A tal punto, nulla impedisce di sostituire al simbolo  $du_{(x)}$  delle scritture precedenti l'altro — assunto per convenzione come equivalente —  $\delta(t-x)dt$ . Le relazioni (3), (4), (5), ripetute di seguito in ordine conveniente e scritte — per semplicità, con riferimento alla prima alternativa — nella prima colonna della seguente tabella, si trasformano in quelle rispettivamente affrontate nella seconda colonna

(6)	$f(x) = \int_a^b f(t) du_{(x)}$	(6')	$f(x) = \int_a^b f(t) \delta(t-x) dt$
(7)	$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^b f(t) du_{(x)}$	(7')	$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^b f(t) \delta(t-x) dt$
(8)	$f'(x) = \int_a^b f'(t) du_{(x)}$	(8')	$f'(x) = \int_a^b f'(t) \delta(t-x) dt$

L'adozione del simbolo di Dirac  $\delta(t-x)$  resterebbe oggetto di pura convenzione se non si verificasse la fortunata circostanza che mentre i secondi membri di (8) e (7) sono identici ma non deducibili l'uno dall'altro per algoritmi noti, il secondo membro di (8') è invece ottenibile dall'analogo di (7') purché

1° si derivi *formalmente* sotto il segno introducendo un « simbolo derivato di Dirac »  $\delta'(t-x)$ ,

2° si applichi *formalmente* la regola di integrazione per parti e

3° si attribuisca — fuori del segno di integrale — valor zero a  $\delta(t-x)$  per ogni valore di  $t \neq x$ .

Si ottiene infatti in tal modo:

$$(9) \quad f'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^b f(t) \delta(t-x) dt = - \int_a^b f(t) \delta'(t-x) dt =$$

$$= \left[ -f(t) \delta(t-x) \right]_a^b + \int_a^b f'(t) \delta(t-x) dt = \int_a^b f'(t) \delta(t-x) dt.$$

Similmente, procedendo a successive derivazioni formali e introducendo i simboli derivati successivi di Dirac  $\delta''(t-x)$ ,  $\delta'''(t-x)$ ,  $\dots \delta^{(n)}(t-x)$ ,  $\dots$ , tutti nulli - fuori dal segno di integrale - per  $t \neq x$ , si riconosce che l'identità

$$(10) \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_a^b f(t) \delta(t-x) dt = \int_a^b f^{(n)}(t) \delta(t-x) dt,$$

valida *a priori* per funzioni derivabili  $n$  volte, ma non deducibile algebricamente, lo diventa con ciò; avendosi precisamente:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_a^b f(t) \delta(t-x) dt = (-1)^n \int_a^b f(t) \delta^{(n)}(t-x) dt =$$

$$= (-1)^{n-1} \int_a^b f'(t) \delta^{(n-1)}(t-x) dt = \dots = \int_a^b f^{(n)}(t) \delta(t-x) dt.$$

Si può dunque concludere, limitatamente al presente caso unidimensionale, come segue:

I) Sul simbolo di Dirac  $\delta(t-x)$ , concepito identico al valor zero - fuori dal segno di integrale - per ogni  $t \neq x$ , si può operare sotto il segno come su un ordinario simbolo di funzione illimitatamente derivabile, con validità della regola di integrazione per parti.

Nel senso testé specificato non presenta inconveniente alcuno parlare di una *funzione di Dirac* e delle sue derivate successive, secondo un uso ormai entrato nel linguaggio corrente dei Fisici teorici. Così sarà fatto anche nel seguito del presente scritto.

Osservo da ultimo che se per l'elemento  $dm$  di una generica funzione d'insieme si scrive convenzionalmente

$$(11) \quad dm = m'(t) dt$$

il significato da attribuirsi ad  $m'(t)$  risulta dalle seguenti due alternative:

1<sup>a</sup> Esiste una funzione derivabile  $m(x)$  di cui  $dm$  è il differenziale; e allora  $m'(x)$  non è che la derivata di  $m(x)$ , funzione di punto associata alla particolare funzione assegnata d'insieme.

2<sup>a</sup> Non si verifica l'alternativa 1<sup>a</sup> e allora  $m'(x)$  rimane un simbolo per cui pur vale, per convenzione, l'identità:

$$(12) \quad \int_a^b m'(x) dx = \int_a^b dm.$$

Nulla vieta di chiamare, nella seconda alternativa,  $m'(x)$  la *derivata di Dirac* della considerata funzione d'insieme.

3. CASO SPAZIALE. — OPERATORI  $\text{div}$  E  $\Delta_2$ . — Per procedere ad una generalizzazione delle considerazioni del numero 2 ai casi di due e tre variabili (e per fissare le idee considererò addirittura quest'ultimo, ponendomi nell'ordinario spazio euclideo) occorre anzitutto introdurre una funzione di insieme di elemento  $\underset{(Q)}{du}$  definita analogamente a  $\underset{(x)}{du}$  in (2) dalle condizioni

$$(13) \quad \iiint_S \underset{(Q)}{du} = \begin{cases} 1 & \text{per } Q \text{ interno al volume } S \\ \frac{\omega}{4\pi} & \text{per } Q \text{ al contorno di } S, \text{ in un punto angolo-} \\ & \text{loso (in particolare regolare) di angolosità } \omega. \\ 0 & \text{per } Q \text{ esterno ad } S, \end{cases}$$

per poi scrivere convenzionalmente

$$(14) \quad \underset{(Q)}{du} = \delta(P - Q) dS,$$

introducendo in tal modo il *simbolo spaziale di Dirac*  $\delta(P - Q)$ . Giova anche qui riconoscere che, dette  $x_1, x_2, x_3$  le coordinate di  $Q$  e  $t_1, t_2, t_3$  quelle di  $P$ , la notazione (14) si presta a giustificazioni di convenienza analoga a quelle riconosciute valide per  $\delta(t - x)$  nelle formule (7) e (8). Si ha infatti, con prospetto analogo a quello del numero 2, denotando con  $f_{x_i}$  la derivata di  $f(Q)$  rispetto ad  $x_i$  e con  $f_{t_i}$  l'analoga rispetto a  $t_i$ :

$$(15) \quad f(Q) = \iiint_S f(P) \underset{(Q)}{du}$$

$$(15') \quad f(Q) = \iiint_S f(P) \delta(P - Q) dS$$

$$(16) \quad f_{x_i}(Q) = \frac{\partial}{\partial x_i} \iiint_S f(P) \underset{(Q)}{du}$$

$$(16') \quad f_{x_i}(Q) = \frac{\partial}{\partial x_i} \iiint_S f(P) \delta(P - Q) dS$$

$$(17) \quad f_{x_i}(Q) = \iiint_S f_{t_i}(P) \underset{(Q)}{du}$$

$$(17') \quad f_{x_i}(Q) = \iiint_S f_{t_i}(P) \delta(P - Q) dS$$

in cui (17') si deduce formalmente da (16') per derivazione sotto il segno e integrazione per parti purché si ritenga — fuor del segno —  $\delta(P - Q) = 0$  per  $P \neq Q$ . Come nel numero 2 si giustifica infine l'introduzione dei *simboli*

*derivati* di Dirac di ordine superiore  $\delta_{x_i x_j}(P - Q)$ ,  $\delta_{x_i x_j x_k}(P - Q)$ , ... . Può dunque rinunciarsi per il simbolo spaziale di Dirac una regola perfettamente analoga ad I), ma si può anche notare che è possibile una riduzione alla funzione unidimensionale di Dirac scrivendo ovunque, con risultato inalterato:

$$(18) \quad \delta(P - Q) = \delta(t_1 - x_1) \delta(t_2 - x_2) \delta(t_3 - x_3),$$

purché si concepisca il secondo membro quale prodotto di funzioni di Dirac e si operi su queste come è voluto dalla regola I).

A titolo di verifica della opportunità dell'introduzione del simbolo spaziale di Dirac e quale sua diversa giustificazione diretta, in un caso in cui si opera con derivate seconde, si consideri l'identità

$$(19) \quad \Delta_2^{(Q)} \iiint_S f(P) \delta(P - Q) dS = \Delta_2^{(Q)} f(Q) = \iiint_S \Delta_2^{(P)} f(P) \delta(P - Q) dS,$$

in cui l'operatore  $\Delta_2$  è quello consueto di Laplace ed è ovvio il significato delle restanti notazioni. Derivando sotto il segno e integrando due volte per parti, conformemente alla regola I), si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta_2^{(Q)} \iiint_S f(P) \delta(P - Q) dS &= \iiint_S f(P) \Delta_2^{(Q)} \delta(P - Q) dS = \\ &= \iiint_S f(P) \Delta_2^{(P)} \delta(P - Q) dS = - \iiint_S \text{grad}_P f(P) \times \text{grad}_P \delta(P - Q) dS = \\ &= \iiint_S \Delta_2^{(Q)} f(P) \cdot \delta(P - Q) dS. \end{aligned}$$

L'ultimo membro in (19) è così ottenuto algebricamente dal primo.

Argomentazioni analoghe a quelle tenute alla fine del numero 2 consentono di parlare di una *funzione spaziale di Dirac*  $\delta(P - Q)$  e delle sue successive derivate. Infine è possibile introdurre, in corrispondenza ad ogni funzione d'insieme di elemento  $dm$ , una sua *derivata spaziale di Dirac*  $m'(P)$ , come quella per cui è, simbolicamente,

$$(20) \quad dm = m'(P) dS,$$

e pertanto cosiffatta che, identicamente, per convenzione, si ha:

$$(21) \quad \iiint_S dm = \iiint_S m'(P) dS.$$

Nel caso di una *densità*  $\rho(P)$ , funzione puntuale definita come  $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}$  la relazione (20) può scriversi

$$(20') \quad dm = \rho(P) dS,$$

e ne risulta

$$(22) \quad m'(P) = \rho(P).$$

Pertanto, per una funzione d'insieme dotata di densità, questa non è che la sua derivata di Dirac.

Un altro notevole esempio di impiego della nozione di derivata di Dirac di una funzione di insieme si ha nel caso in cui quest'ultima si identifichi col flusso  $\Phi$  di un campo vettoriale  $\bar{v}$  attraverso il contorno  $\Sigma$  del generico volume  $S$ . Si ha allora

$$(23) \quad \Phi = \iiint_S d\Phi = \iiint_S \Phi'(P) \cdot dS,$$

e, ove il campo sia derivabile in  $S$ ,

$$(24) \quad \Phi = \oint_{\Sigma} \bar{v} \times \bar{n} d\Sigma = \iiint_S \operatorname{div} \bar{v} dS.$$

È dunque allora

$$(25) \quad \Phi'(P) = \operatorname{div} \bar{v}.$$

In particolare, per il campo gradiente di uno scalare  $f$  dotato di laplaciano, si ha:

$$(26) \quad \Phi'(P) = \Delta_2 f.$$

Le relazioni (25) e (26) dimostrano che la derivazione di Dirac applicata a  $\Phi$  si identifica con operatori differenziali noti sotto ipotesi opportune di derivabilità. In generale, potranno ancora adoperarsi i simboli di  $\operatorname{div}$  e  $\Delta_2$  per denotare la derivazione di Dirac da applicarsi al flusso di  $\bar{v}$  e di  $\operatorname{grad} f$  rispettivamente, in condizioni di invalidità di tali ipotesi, attribuendo ai simboli stessi un significato di più ampia applicabilità, per cui è sempre

$$(27) \quad \iiint_S \operatorname{div} \bar{v} dS = \oint_{\Sigma} \bar{v} \times \bar{n} d\Sigma$$

e

$$(28) \quad \iiint_S \Delta_2 f \cdot dS = \oint_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial n} d\Sigma.$$

In tale significato esteso è impiegato il simbolo di Laplace negli esempi del prossimo numero.

#### 4. ESEMPLI. — 1° Il Laplaciano della funzione

$$(28) \quad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi r} \quad (r = |P - Q|).$$

Si ha notoriamente  $\Delta_2^{(P)} \varphi = 0$  fuorché in  $Q$ .



È inoltre, conformemente a (28), per ogni volume  $S$  racchiudente  $Q$  e limitato da  $\Sigma$ ,

$$\frac{1}{4\pi} \iiint_S \Delta_2 \frac{1}{r} dS = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\Sigma = -1,$$

come si riconosce assumendo per  $S$  una sfera generica di centro  $Q$ . È dunque

$$(29) \quad \Delta_2^{(P)} \frac{1}{4\pi r} = -\delta(P - Q).$$

2° Il d'Alembertiano della funzione

$$(30) \quad \begin{cases} g(r, t) = \frac{\delta(t - t_r)}{4\pi r}, & t_r = t_0 - \frac{r}{v} \\ v, t_0 \text{ costanti, } r = |P - Q|. \end{cases}$$

La funzione  $g(r, t)$  può interpretarsi quale ampiezza di un segnale luminoso viaggiante in un mezzo otticamente omogeneo con velocità  $v$  e convergente nel punto  $Q$  all'istante  $t_0$ . Introdotto l'operatore d'Alembertiano  $\square = \Delta_2 - 1/v^2 \partial^2/\partial t^2$ , si ha:

$$(31) \quad \begin{aligned} \square g(r, t) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \Delta_2 \frac{\delta(t - t_r)}{r} - \frac{1}{v^2 r} \delta''(t - t_r) \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \delta(t - t_r) \Delta_2 \frac{1}{r} - \frac{2}{r^2} \frac{1}{v} \delta'(t - t_r) + \frac{1}{r} \frac{1}{v^2} \delta''(t - t_r) + \frac{2}{r^2} \frac{1}{v} \delta'(t - t_r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{v^2 r} \delta''(t - t_r) \right\} = -\delta(t - t_r) \delta(P - Q) \equiv \delta(t - t_0) \delta(P - Q). \end{aligned}$$

3° La formula di Kirchhoff.

L'impiego della funzione di Dirac porge una rapida deduzione della nota formula di Kirchhoff cui soddisfa una generica soluzione dell'equazione di d'Alembert

$$(32) \quad \square f = h(P, t).$$

A ciò dedico qui soltanto un brevissimo cenno, rinviando per una deduzione più estesa a una bella e moderna opera di G. Toraldo di Francia<sup>(4)</sup>, da cui traggio questo esempio.

Ancora col significato (30) di  $g(r, t)$ , per ogni  $S$  racchiudente  $Q$  e limitato da  $\Sigma$ , si ha intanto, in virtù (32) e di (30):

$$(33) \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt \iiint_S [g \square f - f \square g] dS = \frac{1}{4\pi} \iiint_S \frac{h(P, t_r)}{r} dS + f(Q, t_0).$$

(4) G. TORALDO DI FRANCIA, *Onde elettromagnetiche*. Bologna (1953).

Ma è anche, per una nota formula di Green:

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & \int_{-\infty}^{\infty} dt \iiint_S [g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n}] dS = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \oint_{\Sigma} \left( g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) d\Sigma - \\
 & - \frac{1}{v^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \iiint_S \frac{\partial}{\partial t} \left[ g \frac{\partial f}{\partial t} - f \frac{\partial g}{\partial t} \right] dS = \\
 & \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial n} + \left( \frac{1}{r^2} f + \frac{1}{vr} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial r}{\partial n} \right]_{t=t_r} d\Sigma.
 \end{aligned}$$

Confrontando (33) e (34) si ha subito:

$$\begin{aligned}
 (35) \quad & f(Q, t_0) = - \frac{1}{4\pi} \iiint_S \frac{h(P, t_r)}{r} dS + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial n} + \left( \frac{1}{r^2} f + \frac{1}{vr} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial r}{\partial n} \right]_{t=t_r} d\Sigma,
 \end{aligned}$$

che è la richiamata formula di Kirchhoff.

**Analisi.** — *Su certe estensioni del concetto di volume.* Nota di EDGARD RAYMOND LORCH, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Nelle discussioni sul volume dei solidi, è tacitamente supposto che la definizione del volume sia unica. Cioè, per volume si intende quella proprietà numerica d'un corpo che fu studiata a fondo dai greci nel caso di figure semplici e che per oggetti più complicati fu determinata con l'aiuto del calcolo nei secoli più recenti. Mostriamo in questa Nota che vi sono definizioni diverse da quella classica che sono altrettanto ragionevoli quando sono sottoposte alle esigenze della matematica e dell'estetica.

Vedremo nel seguito che se si considera un solido in uno spazio ad  $n$  dimensioni, un ellissoide per esempio, è possibile assegnare un volume a questo solido per ogni valore del numero reale  $r$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ . A questo modo, invece di parlare del volume  $V(\mathfrak{K})$  del corpo  $\mathfrak{K}$ , parleremo del volume di ordine  $r$ ,  $V_r(\mathfrak{K})$ , per un certo valore di  $r$  nell'intervallo sopra indicato. Vi sono tre valori particolari di  $r$  che sono di speciale interesse. Il valore  $r = 1$  dà il volume « classico ». Il caso  $r = \infty$  è in certo modo antipodico a quello di  $r = 1$ . Per  $r = \infty$ , otterremo una formula semplice per il volume d'un corpo convesso. Il terzo caso è intermedio tra  $r = 1$  e  $r = \infty$ : è il caso

(\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

$r = 2$ . Vedremo in un lavoro che sarà pubblicato altrove, che in questo caso è possibile considerare volumi nello spazio di Hilbert. La Nota attuale espone una estensione semplice ed una reinterpretazione di un lavoro dell'autore che fu pubblicato tre anni fa <sup>(1)</sup>.

2. Descriveremo brevemente le premesse discusse nell'opera citata che saranno necessarie al nostro scopo. Consideriamo uno spazio euclideo reale di dimensione  $n$ . I punti o vettori di questo spazio saranno denotati con  $x, y, z$ , ecc.; le componenti del vettore  $x$  sono  $x_1, \dots, x_n$ .

Sia  $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$  una funzione positiva e positivamente omogenea di grado 1 ( $\varphi(tx) = t\varphi(x)$  per  $t > 0$ ) e che possieda derivate seconde continue. Sia  $r$  un numero reale,  $r > 1$ . Consideriamo la funzione  $G(x)$  definita da  $rG(x) = \varphi^r(x)$ . Supponiamo che la matrice  $\|G_{ij}(x)\|$  sia definita positiva per  $x \neq 0$ . Gli indici indicano qui la derivazione rispetto alle componenti del vettore  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . In queste ipotesi, abbiamo dimostrato che la ipersuperficie  $\varphi(x) = 1$  è convessa e limita un corpo convesso  $\mathfrak{K}$ .

Consideriamo la trasformazione  $x \rightarrow x^*$  dove le componenti  $x_i^*$  di  $x^*$  sono date da  $x_i^* = G_i(x)$ .

Questa trasformazione è un omeomorfismo dello spazio  $n$ -dimensionale in sé. Esiste una funzione  $\psi(x^*)$ , positiva, positivamente omogenea, di grado 1 in  $x^*$ , con derivate seconde continue, e che gode delle proprietà seguenti: Sia  $r'$  determinato da  $1/r + 1/r' = 1$ . Poniamo  $\psi'(x^*) = r' F(x^*)$ . Allora  $r' F(x^*) = rG(x)$  per la trasformazione  $x \leftrightarrow x^*$ , e la ipersuperficie  $\psi(x^*) = 1$  è convessa. Questa ipersuperficie è contorno d'un corpo convesso  $\mathfrak{K}^*$  che è chiamato il corpo aggiunto a  $\mathfrak{K}$ . Infine abbiamo  $x^{**} = x$  e  $\mathfrak{K}^{**} = \mathfrak{K}$ . Dunque  $\mathfrak{K}$  e  $\mathfrak{K}^*$  sono aggiunti l'uno all'altro. Si noti che le ipersuperfici che limitano  $\mathfrak{K}$  e  $\mathfrak{K}^*$  sono indipendenti da  $r$ .

Per il volume nel senso classico di  $\mathfrak{K}^*$ , abbiamo stabilito la formula seguente <sup>(2)</sup>:

$$(1) \quad V(\mathfrak{K}^*) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{n(r-1)} \int_{\Omega} |G_{ij}(x)| d\Omega,$$

ove l'integrando è il determinante della trasformazione  $\|G_{ij}(x)\|$ , e il dominio d'integrazione è la superficie della sfera unitaria dello spazio  $n$ -dimensionale. Dobbiamo osservare che vi sono altre espressioni per  $V(\mathfrak{K}^*)$  che non fanno intervenire il passaggio al limite  $r \rightarrow 1$  e che necessariamente contengono un integrando più complicato di quello che si trova in (1).

Deriveremo adesso una tale espressione.

(1) E. R. LORCH, *Differentiable inequalities and the theory of convex bodies*. «Trans. Amer. Math. Soc.», vol. 71, pp. 243-266 (1951).

(2) Loc. cit., p. 262.

3. Dato che  $rG(x) = \varphi^r(x)$ , abbiamo  $G_i(x) = \varphi^{r-1}(x) \varphi_i(x)$  e  $G_{ij}(x) = \varphi^{r-2}(x) [\varphi(x) \varphi_{ij}(x) + (r-1) \varphi_i(x) \varphi_j(x)]$ . Per ragioni di convenienza sopprimiamo la variabile  $x$ . Così abbiamo  $|G_{ij}| = \varphi^n(r-2) \cdot |\varphi \varphi_{ij} + (r-1) \varphi_i \varphi_j|$ . Il determinante  $D = |\varphi \varphi_{ij} + (r-1) \varphi_i \varphi_j|$  può essere sviluppato per colonne. Questo sviluppo esprime  $D$  come somma di  $2^n$  determinanti. Il primo di questi è  $\varphi^n |\varphi_{ij}|$ . Questo termine è uguale a zero perché  $\varphi$  è omogeneo di grado 1 e perciò,  $\sum_j x_j \varphi_j = 0$  per il teorema di Eulero. Gli altri determinanti dello sviluppo contengono almeno una colonna del tipo  $(r-1) \varphi_i \varphi_j$ . Se vi sono due tali colonne il determinante è nullo perché queste colonne sono proporzionali. Vi sono, dunque, solamente  $n$  termini nello sviluppo di  $D$  che debbono essere considerati. Il primo di questi, per esempio, contiene i termini  $(r-1) \varphi_i \varphi_j$  nella prima colonna e  $\varphi \varphi_{ij}$  nelle altre colonne.

Si può vedere in definitiva che

$$(2) \quad |G_{ij}(x)| = (r-1) \varphi^{nr}(x) C(x)$$

dove  $C(x)$  non dipende da  $r$ . Giacché  $|G_{ij}| \neq 0$  sulla sfera unitaria, ed anche perché la sfera è compatta,  $C(x)$  soddisfa alla relazione  $k^{-1} \leq C(x) \leq k$  per un certo  $k > 0$ . Se sostituiamo il valore (2) di  $|G_{ij}|$  in (1) abbiamo per il volume classico:

$$(3) \quad V(\mathfrak{R}^*) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi^n(x) C(x) d\Omega.$$

4. Le formule (2) e (3) suggeriscono la chiave per la definizione di volume che introdurremo.

DEFINIZIONE. — Sia  $\mathfrak{R}$  un corpo convesso definito come sopra dall'equazione  $\varphi(x) = 1$ . Sia  $\mathfrak{R}^*$  il corpo aggiunto a  $\mathfrak{R}$ . Per ogni  $r$ ,  $1 \leq r < \infty$ , si introduca una funzione  $V_r(\mathfrak{R}^*)$  per mezzo dell'equazione

$$(4) \quad V_r(\mathfrak{R}^*) = \left[ \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi^{nr}(x) C(x) d\Omega \right]^{1/r}.$$

Il numero  $V_r(\mathfrak{R}^*)$  si chiama il volume d'ordine  $r$  del corpo  $\mathfrak{R}^*$ . Di più, il numero  $V_{\infty}(\mathfrak{R}^*)$  è il limite, quando esiste,

$$(5) \quad V_{\infty}(\mathfrak{R}^*) = \lim_{r \rightarrow \infty} V_r(\mathfrak{R}^*).$$

È chiaro che  $V_1(\mathfrak{R}^*)$  è precisamente il volume classico dato dalla formula (3). È facile adesso dedurre il teorema seguente:

TEOREMA 1. — Il volume d'ordine  $\infty$ ,  $V_{\infty}(\mathfrak{R}^*)$ , esiste sempre, ed abbiamo

$$(6) \quad V_{\infty}(\mathfrak{R}^*) = \max_{x \in \Omega} \varphi^n(x).$$

*Dimostrazione.* — È ben noto che per funzioni continue e positive  $f(x)$ ,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} f^r(x) d\Omega \right]^{1/r} = \max_{x \in \Omega} f(x).$$

Giacché  $C(x)$  soddisfa a  $k^{-1} \leq C(x) \leq k$  per una costante  $k > 0$  e per tutti i punti  $x$  di  $\Omega$ , si vede che per  $r$  abbastanza grande  $[C(x)]^{1/r}$  è arbitrariamente vicino a 1, uniformemente in  $x$  su  $\Omega$ . Per terminare la dimostrazione basta scrivere  $\varphi^{nr}(x) C(x) = [\varphi^n(x) C^{1/r}(x)]^r$  ed applicare la regola data qui sopra. Questo conduce subito all'equazione (6).

TEOREMA 2. - Per il corpo convesso  $\mathfrak{R}$  abbiamo

$$(7) \quad V_{\infty}(\mathfrak{R}) = \max_{x \in \Omega} \varphi^{-n}(x).$$

*Dimostrazione.* - Sarà sufficiente dimostrare che  $\max_{x \in \Omega} \varphi(x) \cdot \min_{x^* \in \Omega} \psi(x^*) = 1$ , giacché in questo caso, da (6) segue  $V_{\infty}(\mathfrak{R}^*) = [\min_{x^* \in \Omega} \psi(x^*)]^{-n} = \max_{x^* \in \Omega} \psi^{-n}(x^*)$ . Poiché la relazione tra  $\mathfrak{R}$  e  $\mathfrak{R}^*$  è reciproca, otteniamo (7) sostituendo a  $\mathfrak{R}^*$ ,  $\mathfrak{R}$ , ed a  $\psi(x^*)$ ,  $\varphi(x)$ .

Abbiamo dimostrato nel lavoro citato <sup>(3)</sup> che per ogni coppia di vettori  $y, x$ ,

$$(8) \quad \Sigma y_i x_i^* \leq \varphi(y) \psi(x^*).$$

Inoltre, sia  $x_i^* = G_i(x)$  e  $y_i^* = G_i(y)$ , allora il caso d'uguaglianza ha luogo in (8) se e solamente se  $y$  è positivamente proporzionale a  $x$ .

Sia  $y$  tale che  $\varphi(y) = 1$ . Allora  $y^*$  soddisfa alla  $\psi(y^*) = 1$ , giacché, come abbiamo detto sopra,  $\psi^{r'}(y^*) = r' F(y^*) = r' G(y) = \varphi^r(y)$ . Da (8) si deduce  $\Sigma y_i y_i^* = \varphi(y) \psi(y^*) = 1$ .

Siano  $y = \|y\| x$  e  $y^* = \|y^*\| x'$ , dove la norma  $\|y\|$  è definita da  $\|y\|^2 = \Sigma y_i^2$ . Allora  $\|x\| = 1$  e  $\|x'\| = 1$ . Abbiamo anche  $1 = \|y\| \|y^*\| \cdot \varphi(x) \psi(x')$ . Scegliamo adesso  $x$  tale che  $\varphi(x)$  sia un massimo per  $\|x\| = 1$ , cioè, per  $x \in \Omega$ . Dimosteremo che per questa scelta,  $\|y\| \|y^*\| = 1$ .

In primo luogo, la condizione «  $\varphi(x)$  è un massimo per  $\|x\| = 1$  » è equivalente a quella «  $\|y\|$  è un minimo per  $\varphi(y) = 1$  ». Un semplice calcolo mostra che se  $\|y\|$  è un minimo per  $\varphi(y) = 1$ ,  $y_1/\varphi_1 = \dots = y_n/\varphi_n$ . Giacché  $y_i^* = G_i(y) = \varphi^{r-1}(y) \varphi_i(y)$ , abbiamo  $y_i^* = \varphi_i(y)$  e  $y^*$  è proporzionale a  $y$ . Perciò  $\Sigma y_i y_i^* = \|y\| \|y^*\|$ . Ma, come abbiamo dimostrato,  $\Sigma y_i y_i^* = 1$ . Dunque,  $\|y\| \|y^*\| = 1$ .

Se ritorniamo all'equazione  $1 = \|y\| \|y^*\| \varphi(x) \psi(x')$ , vediamo che  $1 = \varphi(x) \psi(x')$ , dove  $x$  è stato scelto in maniera che  $\varphi(x)$  sia un massimo. Abbiamo dunque  $1 \geq \max_{x \in \Omega} \varphi(x) \min_{z \in \Omega} \psi(z)$ . Analogamente possiamo scegliere  $x'$  tale che  $\psi(x')$  sia minimo per  $\|x'\| = 1$ . Questo ci dà l'equazione  $1 = \varphi(x) \psi(x')$  dove  $x$  e  $x'$  sono legati da:  $y^* = \|y^*\| x'$ ,  $y = \|y\| x$ ,  $y_i^* = G_i(y)$ . Facendo variare  $x$  fino ad ottenere un massimo di  $\varphi(x)$ , troviamo che  $1 \leq \max_{x \in \Omega} \varphi(x) \min_{z \in \Omega} \psi(z)$ . Le due disuguaglianze di questo paragrafo dimostrano che  $1 = \max_{x \in \Omega} \varphi(x) \min_{z \in \Omega} \psi(z)$ , e la dimostrazione del teorema è terminata.

(3) Loc. cit., p. 252.



Sarebbe stato possibile fare questa dimostrazione in una maniera in apparenza più semplice sfruttando la geometria intuitiva della situazione. Abbiamo preferito la dimostrazione analitica qui data perché la nostra discussione di convessità e qui e nel nostro lavoro anteriore è stata fatta esclusivamente in termini analitici.

5. Prendiamo ora in particolare considerazione il caso in cui il corpo  $\mathfrak{K}$  sia un ellissoide. Siano  $a_1, \dots, a_n$  i suoi semiassi e supponiamo  $a_1 \geq \dots \geq a_n$ . Abbiamo dunque  $rG(x) = \varphi^r(x) = [(x_1/a_1)^2 + \dots + (x_n/a_n)^2]^{r/2}$ . Per la ipersuperficie aggiunta abbiamo  $r'F(x^*) = \psi^{r'}(x^*) = [(a_1 x_1^*)^2 + \dots + (a_n x_n^*)^2]^{r'/2}$ ,  $1/r + 1/r' = 1$ . Abbiamo dunque  $V_\infty(\mathfrak{K}) = a_1^n$ . Si noti che  $a_1^2$  è il limite nel senso dell'analisi funzionale della forma quadratica  $a_1^2 x_1^2 + \dots + a_n^2 x_n^2$ .

Per l'ellissoide dato  $\mathfrak{K}$ , il determinante  $|G_{ij}(x)|$  in (1) ha una forma speciale. Abbiamo infatti:

TEOREMA 3. — *Per l'ellissoide definito da  $rG(x) = [(x_1/a_1)^2 + \dots + (x_n/a_n)^2]^{r/2}$*

$$(9) \quad |G_{ij}(x)| = (r-1) (a_1 \cdots a_n)^{-2} [(x_1/a_1)^2 + \dots + (x_n/a_n)^2]^{\frac{n(r-2)}{2}}.$$

La dimostrazione è simile a quella data nel paragrafo 3. Il fattore  $C(x)$  che appare in (2) può essere valutato esplicitamente dando la (9).

6. Consideriamo adesso il caso dell'ellissoide  $\mathfrak{K}$  dato sopra per il valore  $r = 2$ . Dalla formula (9) si deduce che  $|G_{ij}(x)| = (a_1 \cdots a_n)^{-2}$ . Si vede dunque che  $V_2(\mathfrak{K}^*) = (a_1 \cdots a_n)^{-1} \cdot \left[ (1/n) \int_{\Omega} d\Omega \right]^{1/2}$ . Il fattore  $(a_1 \cdots a_n)^{-1}$

è il prodotto dei semiassi di  $\mathfrak{K}^*$ . Il fattore  $\left[ (1/n) \int_{\Omega} d\Omega \right]^{1/2}$  è la radice

quadrata del volume classico della sfera unitaria nello spazio  $n$ -dimensionale. Questo ci dà il seguente risultato:

TEOREMA 4. — *Se  $\mathfrak{K}$  è un ellissoide, allora il volume d'ordine 2 di  $\mathfrak{K}$ ,  $V_2(\mathfrak{K})$ , è uguale al prodotto dei semiassi di  $\mathfrak{K}$  per la radice quadrata del volume classico della sfera unitaria.*

Segue da questo teorema che se  $\mathfrak{K}_1$ , e  $\mathfrak{K}_2$  sono due ellissoidi nello spazio  $n$ -dimensionale,  $V_1(\mathfrak{K}_1)/V_1(\mathfrak{K}_2) = V_2(\mathfrak{K}_1)/V_2(\mathfrak{K}_2)$ . In altri termini, se si tratta di ellissoidi, il calcolo dei volumi relativi è lo stesso, sia che si usi l'ordine  $r = 1$  o l'ordine  $r = 2$ .

Dunque lo stesso risultato si ottiene in modo approssimativo se si considerano corpi convessi che siano approssimativamente ellissoidi. Questo fatto suggerisce che i volumi d'ordine 2 possano essere importanti nella trattazione di certi problemi. Vi è di più, l'altro fatto già citato, che la teoria dei volumi d'ordine 2 può essere estesa al caso degli spazi di Hilbert, il che dà appoggio all'ipotesi dell'importanza di questo concetto.

**Matematica.** — *Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse.* Nota I di MICHELE SCE, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

Per costruire una teoria delle funzioni di variabile ipercomplessa, la via naturale consiste nel cercare di generalizzare quella delle funzioni di variabile complessa. Quando però dalle funzioni di variabile complessa (per le quali dall'unicità della derivata seguono le condizioni di monogeneità) si passi a quelle di variabile ipercomplessa, si presentano due possibilità: la prima è di tener ferma la unicità della derivata, e questa via conduce alla teoria delle *funzioni totalmente derivabili* (1); la seconda è di generalizzare le condizioni di monogeneità e così si giunge alla teoria delle *funzioni monogene* (2).

Nel corso tenuto all'Istituto di Alta Matematica nell'anno 1952-53 il prof. B. Segre propose di studiare le algebre per le quali — dal concetto di funzione totalmente derivabile — segua quello di funzione monogena.

La ricerca delle condizioni cui deve soddisfare la base di un'algebra — che, per semplicità, supponiamo dotata di modulo — affinché accada un tale fatto occupa appunto questa Nota I. Nelle successive Note II e III esamineremo quali fra le algebre del 2°, 3°, 4° ordine (3), e talune algebre di ordini superiori, hanno basi soddisfacenti a quelle condizioni. Ci sembrano di particolare interesse i risultati a cui giungeremo per le algebre reali del 4° ordine, nel qual caso le algebre richieste risultano in numero di cinque. Quattro di esse (precisamente la bicomplexa, la biduale, quella dei qua-

(\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) N. SPAMPINATO, *Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo*. «Rend. Lincei» (6), vol. 21 (1935), I, pp. 621-625, II, pp. 683-687.

Funzioni totalmente derivabili nell'algebra bicomplexa sono studiate da G. SCORZA DRAGONI, *Sulle funzioni olomorfe di una variabile bicomplexa*. «Mem. Acc. d'Italia», vol. 5 (1934), pp. 597-665; nell'algebra biduale da L. SOBRERO, *Algebra delle funzioni ipercomplesse e sua applicazione alla teoria matematica dell'elasticità*. «Mem. Acc. d'Italia», vol. 6 (1935), pp. 1-64.

(2) Questo è il nome usato da B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali* (Roma 1951), cap. IV, n. 90 e, nel caso particolare dell'algebra dei quaternioni, da Gr. C. MOISIL, *Sur les quaternions monogenes*. «Bull. Sc. Math.» (2), vol. LV, P. I, pp. 168-174.

Parla invece di funzioni regolari R. FUETER, *Ueber die Funktionentheorie in einer hypercomplexen Algebra*. «Elem. Math.», vol. 3 (1948), pp. 89-94 e la denominazione, oltre che dalla scuola del Fueter, è adottata da G. B. RIZZA, *Sulle funzioni analitiche nelle algebre ipercomplesse*. «Comm. Pont. Ac. Sc.», vol. 14 (1950), pp. 169-194. Questo ultimo Autore chiama poi monogene le funzioni totalmente derivabili.

(3) Le algebre di questi ordini in un campo qualunque sono state classificate da G. SCORZA, nei lavori: *Le algebre doppie*. «Rend. Acc. Napoli» (3), vol. 28 (1922), pp. 65-79; *Le algebre del 3° ordine*. «Atti Acc. Napoli» (2), vol. 20 (1935), n. 13; *Le algebre del 4° ordine* [ibid. n. 14].

ternioni e quella delle matrici di 2° ordine) sono già state ampiamente studiate; la quinta crediamo che venga qui particolarmente considerata per la prima volta, e meriterebbe forse uno studio più approfondito.

1. Sia  $\mathfrak{A}$  un'algebra di ordine  $n$  dotata di modulo sul campo reale o complesso. Data una base  $u = (u_1, \dots, u_n)$ , diciamo *prima e seconda rappresentazione regolare* di  $\mathfrak{A}$  <sup>(4)</sup> le algebre  $\mathfrak{A}'$  e  $\mathfrak{A}''$  i cui elementi sono le matrici quadrate di ordine  $n$ ,  $X'$  ed  $X''$ , definite per ogni elemento  $x$  di  $\mathfrak{A}$  dalle relazioni

$$(1) \quad xu = uX'$$

$$(1') \quad ux = uX''_{-1} \quad (5).$$

Diciamo che un elemento di  $\mathfrak{A}$ :

$$y = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n = (y_1, \dots, y_n) (u_1, \dots, u_n)_{-1} = \eta u_{-1}$$

è *funzione totalmente derivabile destra o sinistra* di un elemento pure di  $\mathfrak{A}$ :

$$x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n = \xi u_{-1},$$

se rispettivamente la matrice jacobiana  $\partial\eta/\partial\xi = dy/dx$  appartiene ad  $\mathfrak{A}'$  o la sua trasposta a  $\mathfrak{A}''$  <sup>(6)</sup>.

Diciamo infine che l'elemento  $y$  di  $\mathfrak{A}$  è *funzione monogena destra o sinistra* <sup>(7)</sup> di un elemento  $x$  di  $\mathfrak{A}$ , se si ha:

$$(2) \quad u \frac{dy}{dx} u_{-1} = 0$$

oppure

$$(2') \quad u \left( \frac{dy}{dx} \right)_{-1} u_{-1} = 0.$$

Quando si faccia il cambiamento di base

$$(3) \quad u' = uP_{-1},$$

dovendo essere

$$x = \xi u_{-1} = \xi' u'_{-1}, \quad Y = \eta u_{-1} = \eta' u'_{-1},$$

risulta

$$\xi' = \xi P_{-1}, \quad \eta' = \eta P_{-1}$$

e quindi

$$\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{\partial\eta}{\partial\eta'} \frac{\partial\eta'}{\partial\xi'} \frac{\partial\xi'}{\partial\xi} = P_{-1} \frac{\partial\eta'}{\partial\xi'} P.$$

(4) Cfr. A. A. ALBERT, *Structure of algebras*. «A. M. S.», Chap. I, § 9 (1939).

(5) Nel seguito considereremo sempre  $u$  ed il suo trasposto  $u_{-1}$  come ordinari  $n$ -complessi, il primo orizzontale, il secondo verticale, ed applicheremo ad essi le solite regole del calcolo di matrici.

(6) Cfr. N. SPAMPINATO, cit. in <sup>(1)</sup>, I, n. 1.

(7) Cfr. B. SEGRE, cit. in <sup>(2)</sup>, p. 442.

Perciò, mentre *la definizione di funzioni totalmente derivabili è invariante rispetto ai cambiamenti di base* (infatti

$$xu' = xuP^{-1} = uX'P^{-1} = u'PX'P^{-1} = u'X'^*$$

con  $X' = P^{-1}X'^*P$ ), quando si operi il cambiamento di base (3) le (2), (2') diventano

$$(4) \quad u' \frac{\partial \eta'}{\partial \xi'} PP_{-1} u_{-1} = 0$$

$$(4') \quad u' PP_{-1} \left( \frac{\partial \eta'}{\partial \xi'} \right)_{-1} u_{-1} = 0;$$

le condizioni (4), (4') dipendono generalmente dal cambiamento di base effettuato<sup>(8)</sup>, ma permettono di prescindere da questo attraverso la considerazione della matrice  $P$ , nel senso che esse assicurano l'esistenza (quando  $|P| \neq 0$ ) di una base opportuna  $u = u'P$  rispetto alla quale  $y$  è funzione monogena di  $x$ .

Dopo di ciò il problema di confrontare la nozione di funzione monogena con quella di funzione totalmente derivabile si traduce senz'altro nella ricerca delle condizioni affinché una funzione totalmente derivabile sia monogena *rispetto ad una base opportuna*, ossia nel confronto tra le condizioni che  $dy/dx$  appartenga ad  $\mathfrak{A}'$  e le (4), (4').

2. Consideriamo ora le funzioni

$$y_i(x) = u_i x = u'_i \xi_{-1} \quad (i = 1, \dots, n);$$

in virtù della (1), potremo scrivere

$$u_i x = u_i u'_i \xi_{-1} = u U'_i \xi_{-1},$$

con  $U'_i$  in  $\mathfrak{A}'$ , e risulta

$$\xi_{-1} = U'_i \xi_{-1}.$$

Ma allora

$$\frac{du_i x}{dx} = U'_i$$

e le  $y_i(x) = u_i x$  sono *totalmente derivabili destre*.

Perciò, se nella nostra algebra le funzioni totalmente derivabili destre sono anche monogene, dovrà esistere una base rispetto alla quale le  $u_i x$  siano funzioni monogene destre o sinistre di  $x$ , cioè si dovrà rispettivamente avere:

$$(5) \quad u U'_i PP_{-1} u_{-1} = 0,$$

(8) Esse coincidono con le (2) quando  $PP_{-1}$  è una matrice scalare; se però le matrici elementi di  $\mathfrak{A}'$  hanno la forma di una somma diretta di matrici, tale coincidenza ha luogo anche per opportune matrici  $PP_{-1}$  diagonali non scalari. La proprietà suddetta degli elementi di  $\mathfrak{A}'$  è goduta dalle algebre riducibili, ma anche da algebre irriducibili (ad esempio, quella dei ternioni con la base considerata al n. 5).



oppure

$$(5') \quad uPP_{-1}(U_i')_{-1}u_{-1} = 0,$$

per qualche matrice  $P$  non degenerare <sup>(9)</sup>.

Poiché le  $U_i'$  sono elementi di  $\mathfrak{A}'$ , avuto riguardo alla (1), dalle (5), (5') si deducono le

$$(6) \quad u_i uPP_{-1}u_{-1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$(6') \quad uPP_{-1}u_i u_{-1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ogni elemento  $z$  di  $\mathfrak{A}$  essendo una combinazione lineare (con coefficienti reali o complessi) delle  $u_i$ , combinando linearmente le (6), (6') si ha per qualunque elemento  $z$  di  $\mathfrak{A}$

$$(7) \quad zuPP_{-1}u_{-1} = 0,$$

oppure

$$(7') \quad uPP_{-1}zu_{-1} = 0;$$

viceversa, se le (7), (7') valgono per ogni elemento  $z$  di  $\mathfrak{A}$ , varranno anche per le  $u_i$  onde si riottengono le (6), (6').

Quando in particolare si prenda come elemento  $z$  l'unità, la (7) e la (7') danno luogo alla

$$(8) \quad uPP_{-1}u_{-1} = 0;$$

da questa si riottengono in modo ovvio sia la (7) che le (6) e quindi la (8) equivale a queste ultime <sup>(10)</sup>.

Data una funzione totalmente derivabile destra  $y(x)$ , la sua matrice jacobiana  $dy/dx$  apparterrà per definizione ad  $\mathfrak{A}'$ ; diciamo  $z$  l'elemento di  $\mathfrak{A}$  ad esso corrispondente e supponiamo che valgano la (8) o le (6'). Allora varranno anche la (7) o la (7'), sicché, a causa della (1), ritroviamo la (4) o la (4'); quindi la  $y(x)$  risulta monogena a destra od a sinistra.

Possiamo dunque concludere che la (8) e le (6'), con  $P$  matrice non degenera, sono le condizioni necessarie e sufficienti affinché le funzioni totalmente derivabili destre in un'algebra  $\mathfrak{A}$  siano monogene destre o sinistre (rispetto ad una base opportuna); la condizione (8) è necessaria anche per la monogeneità sinistra <sup>(11)</sup>.

L'ultima affermazione ci assicura che, affinché dalla totale derivabilità destra segua la monogeneità sinistra, è necessario che  $y(x)$  sia monogena a destra; dunque *le algebre in cui la totale derivabilità destra implica la mono-*

(9) Naturalmente la distinzione tra funzioni monogene destre e sinistre viene a cadere nelle algebre commutative.

(10) Poiché, a causa della (1), dalle (6) si possono riottenere le (5), la (8) risulterà anche equivalente a tutte le (5).

(11) In modo del tutto analogo si dimostra che la (8) e le (6') sono le condizioni necessarie e sufficienti affinché le funzioni totalmente derivabili a sinistra, siano monogene a sinistra od a destra.

*geneità sinistra sono algebre in cui le funzioni totalmente derivabili destre sono monogene sia a destra che a sinistra.*

Ricordiamo ora che le condizioni di monogeneità costituiscono un sistema di  $n$  equazioni differenziali e che quelle di totale derivabilità uno di  $n(n-1)^{(12)}$ ; inoltre le condizioni perché si abbia monogeneità destra e sinistra sono in numero di  $n+m \leq 2n$ .

Poiché la (8) o le (6') si traduce in condizioni lineari sugli elementi della base, e quindi in condizioni concernenti soltanto l'algebra, per ottenere, soddisfatta la (8) o le (6'), la totale derivabilità destra, bisogna aggiungere  $n(n-2)$  equazioni differenziali alle  $n$  derivanti dalla monogeneità destra od alle  $n+m$  derivanti dalla coincidenza delle monogeneità.

3. Diciamo *solenoidale* un'algebra dotata di unità le cui basi soddisfino a relazioni del tipo (8) con  $P$  non degenerare e la diremo in particolare *bisolenoidale* se ha basi soddisfacenti a relazioni del tipo (6').

Date due algebre  $\mathfrak{A} = (u_1, \dots, u_n)$  e  $\mathfrak{B} = (v_1, \dots, v_m)$ , come basi dell'algebra  $\mathfrak{C}$  loro somma diretta e dell'algebra  $\mathfrak{B}$  loro prodotto diretto si possono prendere rispettivamente

$$w = (u_1^\circ, \dots, u_n^\circ, v_1^\circ, \dots, v_m^\circ) = (u^\circ; v^\circ),$$

$$w' = (u_1^\circ v_1^\circ, u_1^\circ v_2^\circ, \dots, u_n^\circ v_m^\circ) = (u_1^\circ v^\circ; \dots; u_n^\circ v^\circ),$$

dove

$$\mathfrak{A}_0 = (u_1^\circ, \dots, u_n^\circ) \text{ e } \mathfrak{B}_0 = (v_1^\circ, \dots, v_m^\circ)$$

sono algebre isomorfe ad  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  <sup>(13)</sup>.

Se  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  sono bisolenoidali tali sono anche  $\mathfrak{A}_0$  e  $\mathfrak{B}_0$ , sicché esistono matrici non degeneri  $P$  e  $Q$  tali che

$$(8') \quad \begin{aligned} u^\circ P P_{-1} u_i^\circ u_{-1}^\circ &= 0 & (i = 1, 2, \dots, n), \\ v^\circ Q Q_{-1} v_k^\circ v_{-1}^\circ &= 0 & (k = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Da qui, ponendo

$$R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

e ricordando che nella somma diretta  $u_i^\circ v_k^\circ = v_k^\circ u_i^\circ = 0$ , si ha

$$w R R_{-1} u_i^\circ w_{-1} = w R R_{-1} \begin{pmatrix} u_i^\circ u_{-1}^\circ \\ 0 \end{pmatrix} = (u^\circ v^\circ) \begin{pmatrix} P P_{-1} & 0 \\ 0 & Q Q_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^\circ u_{-1}^\circ \\ 0 \end{pmatrix} = u^\circ P P_{-1} u_i^\circ u_{-1}^\circ = 0;$$

e, in modo analogo, si trova che

$$w R R_{-1} v_k^\circ w_{-1} = 0.$$

(12) Cfr. SEGRE, cit. in <sup>(2)</sup>, p. 443 e p. 451.

(13) Cfr. A. A. ALBERT, *Modern higher Algebra* (Chicago 1937), Chap. X, n. 4 e ALBERT, cit. in <sup>(4)</sup>, Chap. I, n. 5.

Ma allora, se  $w_i$  è un qualunque elemento di  $w$ , esiste una matrice non degenera  $R$  tale che

$$wRR_{-1}w_iw_{-1} = 0,$$

cioè la somma diretta di due algebre bisolenoidali è bisolenoidale.

Sia ora soltanto  $\mathfrak{B}$  bisolenoidale cioè valgano le (8'); allora, ponendo

$$R = Q \times I_n = \begin{pmatrix} Q & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & Q \end{pmatrix}$$

e ricordando che nel prodotto diretto  $u_i v_k = v_k u_i$ , risulta

$$\begin{aligned} w' RR_{-1} u_i^\circ v_k^\circ w_{-1}' &= w' RR_{-1} v_k^\circ \begin{pmatrix} v_{-1}^\circ & u_i^\circ & u_1^\circ \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{-1}^\circ & u_i^\circ & u_n^\circ \end{pmatrix} = \\ &= (u_1^\circ v^\circ, \dots, u_n^\circ v^\circ) \begin{pmatrix} QQ_{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & QQ_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k^\circ v_{-1}^\circ & u_i^\circ & u_1^\circ \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_k^\circ v_{-1}^\circ & u_i^\circ & u_n^\circ \end{pmatrix} = \\ &= u_1^\circ v^\circ QQ_{-1} v_k^\circ v_{-1}^\circ u_i^\circ u_1^\circ + \dots + u_n^\circ v^\circ QQ_{-1} v_k^\circ v_{-1}^\circ u_i^\circ u_n^\circ = 0. \end{aligned}$$

Dunque il prodotto diretto di due algebre una delle quali sia bisolenoidale è bisolenoidale <sup>(14)</sup>.

**Geometria.** — *Cerchi iperosculatori ad una superficie in un punto e questioni connesse.* Nota di GIUSEPPE VACCARO, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

In una recente Nota <sup>(1)</sup> A. Corio ha determinato il numero delle sezioni piane uscenti da un punto  $P$  di una superficie di  $S_3$  aventi in  $P$  cerchio osculatore a contatto del 4° ordine (o 5-punto), ma il risultato va corretto, com'era stato previsto dal prof. B. Segre, nel senso che tali sezioni sono 10 e non 12. Ed è appunto dietro consiglio del prof. Segre che ho ripreso la questione dimostrando esatta tale previsione.

Al risultato pervengo per due vie diverse, entrambe suggeritemi dal prof. Segre, le quali — indipendentemente dal problema iniziale — danno origine a due ordini di problemi a cui conto dedicare successivi lavori.

(14) Naturalmente non è detto che un'algebra prodotto diretto sia bisolenoidale soltanto se una delle algebre fattori è bisolenoidale.

(\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) Cfr. A. CORIO, *Sopra una notevole famiglia di supergeodetiche*. «Atti Accademia delle Scienze di Torino», 87 (1952-53).



Nella presente Nota, dopo aver ritrovato il numero delle tangenti 4-punte ad una  $F^n$  algebrica in punti di una sua retta semplice  $C$ , sulla quale non vi siano punti singolari <sup>(2)</sup>, estendo il risultato nell'ipotesi che  $F^n$  possenga su  $C$  qualche punto doppio di tipo semplice (nn. 1 e 2). Mostro quindi (n. 3) come il problema studiato dal Corio si possa ricondurre a quello della determinazione del numero delle tangenti 4-punte ad una  $F^n$  in punti di una sua retta semplice, sulla quale sono situati due punti  $(n-1)$ -pli per  $F^n$ , e provo che tale numero vale 10.

Il problema studiato dal Corio può venire anche ricondotto a quello della determinazione dei piani uscenti da un punto  $P$  di una superficie  $\Phi$  appartenente ad una ipersfera di  $S_4$  ed aventi in  $P$  incontro 5-punto con  $\Phi$ . A tale determinazione è dedicato l'ultimo numero di questa Nota, dove la ricerca viene effettuata - più generalmente - per una qualunque superficie a punti non parabolici di  $S_4$  <sup>(3)</sup>.

1. NUMERO DELLE TANGENTI 4-PUNTE AD UNA  $F^n$  IN PUNTI DI UNA SUA RETTA. - Sia  $F^n$  una superficie algebrica di  $S_3$  di ordine  $n \geq 3$  e si supponga che essa contenga una retta semplice  $C$ , senza possedere su  $C$  punti singolari.

Assunta  $C$  come retta  $x = y = 0$ , l'equazione della  $F^n$  è del tipo:

$$(I.1) \quad \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \dots + \varphi_n(x, y) + z \{ \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y) + \dots + \psi_{n-1}(x, y) \} + z^2 \{ \theta_1(x, y) + \dots + \theta_{n-2}(x, y) \} + \dots + z^{n-1} \chi_1(x, y) = 0$$

ove le  $\varphi_i, \psi_i, \theta_i, \dots, \chi_i$  sono forme di grado  $i$  in  $x$  e  $y$ ; ovvero, in forma più comoda ed in coordinate omogenee  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ :

$$(I.2) \quad x_1 \alpha_0(x_3, x_4) + x_2 \alpha_1(x_3, x_4) + x_1^2 \beta_0(x_3, x_4) + x_1 x_2 \beta_1(x_3, x_4) + x_2^2 \beta_2(x_3, x_4) + x_1^3 \gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) + x_1^2 x_2 \gamma_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + x_1 x_2^2 \gamma_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + x_2^3 \gamma_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

dove le  $\alpha, \beta, \gamma$ , sono forme di gradi rispettivi  $n-1, n-2, n-3$  nei loro argomenti.

La curva residua  $\Gamma$  intersezione di  $F^n$  con un piano  $\pi$  di equazione  $x_2 = \lambda x_1$ , è rappresentata dall'equazione:

$$(I.3) \quad \alpha_0 + \lambda \alpha_1 + x_1 (\beta_0 + \lambda \beta_1 + \lambda^2 \beta_2) + x_1^2 (\bar{\gamma}_0 + \lambda \bar{\gamma}_1 + \lambda^2 \bar{\gamma}_2 + \lambda^3 \bar{\gamma}_3) = 0$$

dove  $\bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3$  sono il risultato della sostituzione  $\lambda x_1$  al posto di  $x_2$  in  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ .

(2) Questo numero trovasi determinato in B. SEGRE, *The maximum number of lines lying on a quartic surface*. «Quarterly Journal of Math., Oxford Series», vol. 14, pp. 86-96 (1953).

(3) Si arreca così un contributo nell'ordine d'idee segnalato sin dal 1912 da E. BOMPIANI, *Sopra alcune estensioni del teorema di Meusnier*. «Atti Accademia delle Scienze di Torino», 48, pp. 279-296 (1912).

Il gruppo della  $g_{n-1}^1$  segato su  $\Gamma$  da  $C$  è dato da  $x_1 = x_2 = 0$  e da:

$$(1.4) \quad \alpha_0(x_3, x_4) + \lambda \alpha_1(x_3, x_4) = 0.$$

La condizione affinché i punti di questo gruppo siano inflessionali per  $\Gamma$  è data dall'annullarsi della Hessiana della (1.3). Per  $x_1 = 0$  questa condizione è data da:

$$(1.5) \quad \begin{vmatrix} a_3 & b_2 & c_2 \\ b_2 & d_1 & e_1 \\ c_2 & e_1 & f_1 \end{vmatrix} = 0$$

dove  $a_3, b_2, c_2, d_1, e_1, f_1$  sono polinomi in  $\lambda$  di grado rispettivamente uguale all'indice ed i cui coefficienti sono forme di grado  $n-3$  in  $x_3, x_4$ . Ora, o la (1.4) implica di conseguenza la (1.5) per qualunque  $\lambda$ , oppure l'eliminazione di  $\lambda$  tra la (1.4) e la (1.5) dà una equazione omogenea in  $x_3, x_4$  di grado:

$$(1.6) \quad 5(n-1) + 3(n-3) = 8n-14.$$

Nel primo caso, ogni curva  $\Gamma$  interseca  $C$  in  $n-1$  punti che sono inflessionali per  $\Gamma$ . Nel secondo caso la equazione che si ottiene dà i punti di  $C$ , ciascuno dei quali è di flesso per una curva  $\Gamma$ , cioè il numero delle tangenti 4-punte alla  $F^n$  in punti della  $C$  <sup>(4)</sup>.

2. INFLUENZA DI EVENTUALI PUNTI DOPPI. — Vediamo ora l'influenza di un punto doppio conico di  $F^n$  appartenente alla  $C$  sul numero  $N$  delle tangenti 4-punte trovato in precedenza. Se tale punto è  $O(0, 0, 0, 1)$  deve essere nella (1.1)  $\varphi_1(x, y) = 0$  cioè nella (1.2):

$$\alpha_0 = x_3 \alpha'_0(x_3, x_4) \quad ; \quad \alpha_1 = x_3 \alpha'_1(x_3, x_4)$$

dove  $\alpha'_0, \alpha'_1$  sono ora forme di grado  $n-2$  in  $x_3, x_4$ .

Operando come al numero precedente (e scartando i punti coincidenti con  $O$ ), poiché ora la (1.4) è di grado  $n-2$  in  $x_3, x_4$ , l'eliminazione di  $\lambda$  tra questa equazione e la (1.5) mostra che attualmente risulta:

$$N = 8n - 19,$$

cioè ogni punto doppio conico della  $F^n$  appartenente alla  $C$  assorbe 5 delle  $8n-14$  tangenti 4-punte appoggiate alla  $C$ .

Il massimo numero  $\delta$  di punti doppi conici che la  $F^n$  può possedere sulla  $C$  senza che vi sia un piano tangente fisso lungo  $C$  è  $\delta = n-2$ : in questo caso il numero delle tangenti 4-punte appoggiate alla  $C$  fuori dei  $\delta$  punti doppi è:

$$N = 8n - 14 - 5(n-2) = 3n - 4.$$

(4) Ho riprodotto fin qui la dimostrazione di B. Segre (ved. nota <sup>(2)</sup>).

Se poi nella (1.1) non solo  $\varphi_1(x, y) \equiv 0$  ma anche  $\psi_1(x, y)$  è identicamente nullo, cioè se nella (1.2) è:

$$\alpha_0 = x_3^2 \alpha_0''(x_3, x_4) \quad ; \quad \alpha_1 = x_3^2 \alpha_1''(x_3, x_4)$$

con  $\alpha_0'', \alpha_1''$  forme di grado  $n-3$  in  $x_3, x_4$ , allora il punto O è doppio biplanare per  $F^n$  con ambo i piani tangenti passanti per C. In questo caso la (1.4) diviene di grado  $n-3$  in  $x_3, x_4$  e l'eliminazione di  $\lambda$  tra questa e la (1.5) mostra che ora è:

$$N = 8n - 24;$$

sicché ogni punto doppio biplanare per  $F^n$ , appartenente alla C, assorbe 10 tangenti 4-punte alla  $F^n$  appoggiate a C.

Ha speciale interesse (per le applicazioni che faremo in seguito) il caso in cui O sia un punto doppio biplanare per  $F^n$  ma con uno solo dei piani tangenti passanti per C. In questo caso occorre distinguere due eventualità, a seconda che la retta comune ai due piani tangenti in O è tangente tripunta oppure 4-punta per la  $F^n$ . È noto che nel primo caso la  $F^n$  nell'intorno di O non è approssimabile con due calotte superficiali aventi centro in O; nel secondo caso, invece, ciò è possibile.

Supponiamo dapprima che la retta comune ai due piani tangenti in O sia tangente tripunta per  $F^n$ , e che l'equazione complessiva dei due piani sia  $z\psi_1(x, y) = 0$ .

In questo caso la (1.2) diviene:

$$\begin{aligned} x_3 \{ x_1 \alpha_0'(x_3, x_4) + x_2 \alpha_1'(x_3, x_4) + x_1^2 \beta_0'(x_3, x_4) + x_1 x_2 \beta_1'(x_3, x_4) + x_2^2 \beta_2'(x_3, x_4) \} + \\ + x_1^3 \gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) + x_1^2 x_2 \gamma_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \\ + x_1 x_2^2 \gamma_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + x_2^3 \gamma_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \end{aligned}$$

dove le  $\alpha'$  sono forme di grado  $n-2$  e le  $\beta', \gamma$  forme di grado  $n-3$  nei rispettivi argomenti.

In questo caso la (1.4) risulta di grado  $n-2$  in  $x_3, x_4$  ed eliminando  $\lambda$  tra essa e la (1.5) si avrebbe una equazione omogenea di grado  $8n-19$  in  $x_3, x_4$ . Ma l'effettivo calcolo mostra come per questa equazione la  $x_3 = 0$  è una soluzione doppia; essa si ottiene dando a  $\lambda$  il valore per cui  $\psi_1(1, \lambda) = 0$ .

In definitiva quindi, in questo caso, il numero delle tangenti 4-punte appoggiate alla C fuori di O è:

$$N = 8n - 21.$$

Se invece la retta comune ai due piani tangenti in O è tangente 4-punta per  $F^n$  deve essere nella (1.1):

$$\varphi_1(x, y) \equiv 0 \quad ; \quad \varphi_2(x, y) \equiv 0 \quad ; \quad \varphi_3(x, y) \equiv \psi_1(x, y) \bar{\varphi}_2(x, y).$$

In queste ipotesi, operando come prima, si ottiene che il numero delle tangenti 4-punte appoggiate a C, fuori di O, è:

$$N = 8n - 22.$$



Riassumendo i risultati finora ottenuti, possiamo enunciare il teorema (la prima parte del quale deve a B. Segre):

*Se una superficie algebrica d'ordine  $n$ ,  $F^n$ , possiede una retta  $C$  (semplice) il numero delle tangenti 4-punte alla  $F^n$  in punti della  $C$  è in generale:  $N = 8n - 14$ .*

*Se sulla retta  $C$  esiste un punto doppio conico  $P$ , per  $F^n$ , il numero delle tangenti 4-punte appoggiate alla  $C$ , fuori di  $P$  è  $N = 8n - 19$  se  $P$  è biplanare con un solo piano tangente principale passante per  $C$  è:  $N = 8n - 21$  oppure  $N = 8n - 22$  a seconda che la retta comune ai due piani tangenti in  $P$  è tangente tripunta oppure 4-punta per  $F^n$ .*

*Se infine  $P$  è biplanare, ma con ambo i piani tangenti principali passanti per  $C$ , si ha:  $N = 8n - 24$ .*

3. SEZIONI PIANE DI UNA SUPERFICIE USCENTI DA UN SUO PUNTO  $O$  E CON CERCCHIO OSCULATORE AD INCONTRO 5-PUNTO IN  $O$ . — Sia  $F^n$  una superficie d'ordine  $n$  dell'ordinario spazio euclideo  $(x, y, z)$  e sia  $O$  un generico suo punto proprio.

Una trasformazione per raggi vettori reciproci di centro  $O$  muta la  $F^n$  in una  $\bar{F}^{2n-1}$  la quale possiede una retta  $O'$  impropria (trasformata di  $O$ ) i cui punti ciclici sono  $(n-1)$ -pli per  $\bar{F}^{2n-1}$ .

Le sezioni piane di  $F^n$  passanti per  $O$  od aventi in  $O$  cerchio osculatore ad incontro 5-punto si trasformano in curve di  $\bar{F}^{2n-1}$  appoggiate ad  $O'$  in punti in cui la  $\bar{F}^{2n-1}$  ha una tangente 4-punta.

Determiniamo il numero delle tangenti 4-punte ad  $\bar{F}^{2n-1}$  appoggiate ad  $O'$ , fuori dei punti ciclici.

Sia:

$$(3.1) \quad z + \varphi_2(x, y, z) + \varphi_3(x, y, z) + \dots + \varphi_n(x, y, z) = 0$$

dove le  $\varphi_i$  sono forme di grado  $i$  in  $x, y, z$ , l'equazione di una  $F^n$  tangente in  $O(0, 0, 0)$  al piano  $z = 0$ .

La trasformazione:

$$x = x' t' \quad , \quad y = y' t' \quad , \quad z = z' t' \quad , \quad t = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

muta la (3.1) nella superficie:

$$(3.2) \quad \theta^{n-1} z + t \theta^{n-2} \varphi_2 + t^2 \theta^{n-3} \varphi_3 + \dots + t^{n-1} \varphi_n = 0$$

avendo posto:

$$\theta = x^2 + y^2 + z^2$$

ed avendo indicato le nuove variabili ancora con  $x, y, z, t$ .

La retta  $z = t = 0$  appartiene alla (3.2). Un piano  $\pi$  di equazione  $t = \lambda z$  sega la (3.2) nella curva residua  $\Gamma$ :

$$(3.3) \quad \theta^{n-1} + \lambda \theta^{n-2} \varphi_2 + \lambda^2 z \theta^{n-3} \varphi_3 + \dots + \lambda^{n-1} z^{n-2} \varphi_n = 0.$$

La retta  $z = t = 0$  sega su questa, fuori dei punti ciclici, il gruppo di punti dato da:

$$(3.4) \quad \bar{\theta} + \lambda \bar{\varphi}_2 = 0$$

ove  $\theta = x^2 + y^2$  e  $\bar{\varphi}_2$  è una forma di 2° grado in  $x$  e  $y$ .

L'Hessiana della (3.3) per  $z = 0$ , è una equazione di 5° grado in  $\lambda$  i cui coefficienti sono forme di grado 3 ( $2n - 4$ ) in  $x, y$ . L'eliminazione di  $\lambda$  tra questa e la (3.4) dà un'equazione omogenea in  $x, y$  di grado  $10 + 3(2n - 4)$ , la quale, come si verifica con facili calcoli, risulta dividibile per  $\theta^{3(n-2)}$ . In definitiva quindi, fuori dei due punti  $(n - 1)$ -pli per  $F^n$ , vi sono 10 tangenti 4-punte alla  $F^n$  in punti della  $O'$ .

Si ha pertanto il teorema:

*Per un generico punto O di una superficie  $F^n$  algebrica (di  $S_3$ ) passano 10 piani le cui sezioni con  $F^n$  hanno in O cerchio osculatore ad incontro 5-punto.*

4. PIANI PER UN PUNTO O DI UNA SUPERFICIE  $\Phi$  DI  $S_4$  AD INCONTRO 5-PUNTO IN O CON  $\Phi$ . - All'ultimo teorema si può pervenire, come si è detto nell'introduzione, con la seguente considerazione, facilmente collegabile a quella del n. 3.

Immaginiamo riferiti mediante una proiezione stereografica, in modo generalmente biunivoco, i punti di una ipersfera  $\Sigma$  contenuta in  $S_4$  ed i punti di un  $S_3$ .

Sia O il centro di proiezione su  $\Sigma$ . Ad una superficie  $F$  dello spazio  $S_3$ , sostituiamo la sua immagine  $F'$  su  $\Sigma$ .  $F'$  ammette un doppio sistema di linee coniugate, che si proietta, appartenendo  $F'$  a  $\Sigma$ , nel doppio sistema delle linee di curvatura su  $F$  <sup>(5)</sup>.

Il numero delle sezioni piane di  $F$  uscenti da un suo punto P ed aventi in P cerchio osculatore a contatto del 4° ordine è dato dal numero dei piani ad incontro 5-punto in  $P'$  con  $F'$ .

Dimostriamo il seguente teorema:

*Da un punto O non parabolico di una superficie  $\Phi$  qualsiasi di  $S_4$  escono 10 piani aventi in O incontro 5-punto con  $\Phi$ .*

Infatti, dette  $x_1, x_2, x_3, x_4$  le coordinate non omogenee di un punto di  $S_4$ , la calotta del 4° ordine di  $\Phi$  di centro per esempio O (0, 0, 0, 0), come è noto, può sempre scriversi:

$$(4.1) \quad \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = v \\ x_3 = u^2 + \varphi_3(u, v) + \varphi_4(u, v) \\ x_4 = v^2 + \psi_3(u, v) + \psi_4(u, v) \end{cases}$$

ove le  $\varphi$  e le  $\psi$  sono forme di grado uguale all'indice in  $u, v$ .

(5) Cfr. E. BOMPIANI, *Sull'equazione di Laplace*. « Rend. Circolo Matem. di Palermo », T. XXXIV, pp. 383-407 (1912).

Consideriamo un elemento  $E_4$  di curva per  $O$ :

$$v = \lambda u + \mu u^2 + \nu u^3 + \rho u^4$$

cioè

$$(4.2) \quad \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = \lambda u + \mu u^2 + \nu u^3 + \rho u^4 \\ x_3 = u^2 + u^3 \varphi_3(1, \lambda) + u^4 \{ \varphi_4(1, \lambda) + 3 \mu \theta_2(1, \lambda) \} \\ x_4 = \lambda^2 u^2 + u^3 \{ 2 \lambda \mu + \psi_3(1, \lambda) \} + u^4 \{ \mu^2 + 2 \lambda \nu + \psi_4(1, \lambda) + 3 \mu \chi_2(1, \lambda) \} \end{cases}$$

ove  $\theta_2$  e  $\chi_2$  sono polinomi di 2° grado in  $\lambda$ .

Il suo piano osculatore in  $O$  è:

$$x_2 - \lambda x_1 - \mu x_2 = 0$$

$$x_4 - \lambda^2 x_3 = 0.$$

L' $E_4$  (4.2) appartiene a tale piano se:

$$(4.3) \quad \begin{cases} \nu - \mu \varphi_3(1, \lambda) = 0 \\ \rho - \mu \varphi_4(1, \lambda) - 3 \mu^2 \theta_2(1, \lambda) = 0 \\ 2 \lambda \mu + \psi_2(1, \lambda) - \lambda^2 \varphi_3(1, \lambda) = 0 \\ \mu^2 + 2 \lambda \nu + 3 \mu \chi_2(1, \lambda) + \psi_4(1, \lambda) - \lambda^2 \varphi_4(1, \lambda) - 3 \lambda^2 \mu \theta_2(1, \lambda) = 0. \end{cases}$$

Sottraendo dalla 4ª delle precedenti la prima moltiplicata per  $2 \lambda$  si ha:

$$\mu^2 + 2 \lambda \mu \varphi_2(1, \lambda) + 3 \mu \chi_2(1, \lambda) + \psi_4(1, \lambda) - \lambda^2 \varphi_4(1, \lambda) - 3 \lambda^2 \mu \theta_2(1, \lambda) = 0$$

ed eliminando  $\mu$  tra questa e la 3ª delle (4.2) si ottiene una equazione di 10° grado in  $\lambda$ , la quale ci fornisce 10 direzioni, che possiamo chiamare *d'iperosculazione*, per ciascuna delle quali passa un piano ad incontro 5-punto con la (1).

Il teorema risulta così dimostrato e da questo consegue di nuovo il risultato del n. 3, indipendentemente dalla algebricità della superficie  $F$ .

5. Osserviamo che se la superficie  $\Phi$  di  $S_4$  è algebrica, un'altra facile conseguenza del teorema precedente è che:

*L'ordine di una superficie algebrica di  $S_4$ , a punti non parabolici, è  $\geq 5$ , salvo che la superficie contenga infinite curve piane.*



**Idrodinamica.** — *Campi potenziali attorno a schiere di cerchi.*  
 Nota di GIOVANNI COCCHI, presentata (\*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. In varie questioni di fisica applicata si presenta il problema di determinare un potenziale nel campo esterno a una schiera di cerchi, intendendo qui, con tale locuzione, l'insieme di infiniti cerchi di ugual raggio  $r$ , con i centri posti su una retta ad uguale distanza  $d$  (passo della schiera), ( $d > 2r$ ).

Il procedimento qui esposto consente di determinare in modo semplice un potenziale nel campo esterno a una schiera di curve chiuse tutte uguali, le quali, pur non essendo rigorosamente circolari, si discostano dai cerchi di raggio  $r$ , che appartengono a una schiera di passo  $d$ , di quantità che per le applicazioni si possono ritenere trascurabili (anche per valori di  $r$  fino a  $d/4$  e più).

2. Vogliamo anzitutto trovare, mediante una trasformazione conforme, il potenziale complesso di una schiera di sorgenti piane, ossia di infinite sorgenti di uguale intensità, allineate ed equidistanti.

Nel piano della variabile complessa  $\zeta$ , si abbiano una sorgente e un pozzo di intensità unitaria, posti rispettivamente nei punti  $-1$  e  $+1$ . Il relativo potenziale complesso è

$$(1) \quad \log \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}.$$

Poniamo

$$(2) \quad z = \log \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}.$$

La (2) definisce una trasformazione conforme per la quale le linee equipotenziali e le linee di flusso del campo (1) si trasformano, nel campo della variabile complessa  $z = x + iy$ , rispettivamente in rette parallele agli assi  $x$  e  $y$ . Ai punti  $\zeta = 1$ ,  $\zeta = -1$  corrisponde  $z = \infty$ . A un punto generico del piano  $\zeta$ , per la polidromia della funzione logaritmo, corrispondono nel piano  $z$  infiniti punti allineati parallelamente all'asse immaginario e distanti  $2\pi$  l'uno dall'altro.

Così a  $\zeta = 0$  corrisponde  $z = i\pi \pm i2k\pi$ ; a  $\zeta = \infty$  corrisponde  $z = 0 \pm i2k\pi$ , con  $k$  intero o nullo.

Se nell'origine del piano  $\zeta$  vi fosse una sorgente di intensità  $m$  (reale), con potenziale complesso

$$(3) \quad m \log \zeta,$$

(\*) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

la trasformazione (2) farebbe corrispondere nel piano  $z$  una schiera di sorgenti di intensità  $m$  nei punti  $z = i\pi \pm i 2 k \pi$ . Ma poiché il potenziale (3) della sorgente comporta, come altra singolarità, un pozzo (di intensità  $-m$ ) all'infinito, nel piano  $z$  si avrebbe anche una schiera di pozzi nei punti  $z = 0 \pm i 2 k \pi$ , corrispondenti a  $\zeta = \infty$ , ossia intercalati alle sorgenti, sull'asse immaginario.

Per avere nel piano  $z$  solamente una schiera di sorgenti, consideriamo nel piano  $\zeta$  il potenziale relativo a una sorgente di intensità  $m$  nell'origine e a due pozzi, di intensità  $-m/2$ , nei punti  $+1$  e  $-1$ :

$$(4) \quad m \log \zeta - \frac{m}{2} \log (\zeta + 1) (\zeta - 1) = \frac{m}{2} \log \frac{\zeta^2}{(\zeta + 1)(\zeta - 1)} = \frac{m}{2} \log \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1}.$$

Poiché l'intensità complessiva del gruppo è nulla, abbiamo eliminato la singolarità all'infinito. Con la trasformazione (2), i pozzi nei punti  $+1$  e  $-1$  vanno all'infinito; e nel piano  $z$  rimane la schiera di sorgenti di intensità  $m$  nei punti  $z = i\pi \pm i 2 k \pi$ , corrispondenti alla sorgente nell'origine del piano  $\zeta$ . Dalla (2) si ricava

$$(5) \quad \zeta = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}.$$

Sostituendo (5) in (4), si ottiene

$$(6) \quad \frac{m}{2} \log \frac{(e^z + 1)^2}{(e^z + 1)^2 - (e^z - 1)^2} = \frac{m}{2} \log \frac{e^z + e^{-z} + 2}{4} = \frac{m}{2} \log \frac{1}{2} (\operatorname{ch} z + 1),$$

espressione del potenziale complesso della schiera di sorgenti di intensità  $m$  nei punti  $z = i\pi \pm i 2 k \pi$ .

Convieni operare una traslazione di assi in modo da portare l'origine in una delle sorgenti; per questo basta porre nella (6)  $z + i\pi$  al posto di  $z$ . Poiché  $\operatorname{ch}(z + i\pi) = -\operatorname{ch} z$ , si ottiene infine

$$(7) \quad f(z) = \frac{m}{2} \log \frac{1}{2} (1 - \operatorname{ch} z),$$

espressione del potenziale complesso della schiera di sorgenti di intensità  $m$ , di passo uguale a  $2\pi$ , allineate sull'asse immaginario, con origine degli assi in una di esse.

Separiamo parte reale e parte immaginaria di  $f(z)$ . Poiché

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y,$$

si ricava

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{m}{4} \log \frac{1}{4} [(1 - \operatorname{ch} x \cos y)^2 + \operatorname{sh}^2 x \sin^2 y] + i \frac{m}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} x \sin y}{\operatorname{ch} x \cos y - 1} = \\ &= \varphi(x, y) - i \psi(x, y). \end{aligned}$$

Il potenziale ordinario del campo della schiera di sorgenti, corrispondente al potenziale complesso (7), è dunque

$$\varphi(x, y) = \frac{m}{4} \log \frac{1}{4} [(1 - \operatorname{ch} x \cos y)^2 + \operatorname{sh}^2 x \sin^2 y].$$

L'equazione delle linee di flusso è

$$\psi(x, y) = \operatorname{cost},$$

ossia

$$\frac{\operatorname{sh} x \sin y}{\operatorname{ch} x \cos y - 1} = \operatorname{cost}.$$

3. In vari casi si tratta di determinare il potenziale attorno a una schiera di cerchi a potenziale costante (campo elettrico di una griglia di conduttori cilindrici; sistema di pozzi artesiani disposti a distanza costante su uno stesso allineamento, ecc.).

Se il raggio dei cerchi è piccolo rispetto alla distanza dei centri, il problema è risolto con buona approssimazione dal potenziale della schiera di sorgenti ricavato al numero precedente, perché le linee equipotenziali chiuse attorno alle sorgenti, se abbastanza piccole, sono approssimativamente circolari. Più precisamente, esse sono ovali con l'asse maggiore disposto lungo l'allineamento delle sorgenti; il rapporto fra asse maggiore e asse minore è tanto più grande quanto più esse si allargano attorno alle sorgenti.

Un semplice artificio per ottenere una schiera di curve chiuse equipotenziali che si discostino poco da cerchi di raggio  $r$  anche per  $r$  non piccolo rispetto al passo della schiera è il seguente.

Sovrapponiamo due campi del tipo (7) dopo aver dato a uno la traslazione  $a$ , all'altro la traslazione  $-a$  ( $a$  reale). Si ottiene il campo di una schiera di coppie di sorgenti di uguale intensità di passo  $2\pi$ ; con le sorgenti di ciascuna coppia simmetricamente disposte rispetto all'asse immaginario e distanti  $2a$ . Assumendo uguale a  $m/2$  l'intensità di ciascuna sorgente, in modo che l'intensità di ogni coppia sia ancora  $m$ , il relativo potenziale complesso risulta

$$f(z) = \frac{m}{4} \log \frac{1}{4} [1 - \operatorname{ch}(z - a)][1 - \operatorname{ch}(z + a)],$$

e, dopo alcuni semplici passaggi,

$$(8) \quad f(z) = \frac{m}{4} \log \frac{1}{4} (\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} z)^2 = \frac{m}{2} \log \frac{1}{2} (\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} z).$$

Separando parte reale e parte immaginaria della (8), si ha

$$(9) \quad f(z) = \frac{m}{4} \log \frac{1}{4} [(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} x \cos y)^2 + \operatorname{sh}^2 x \sin^2 y] + \\ + i \frac{m}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} x \sin y}{\operatorname{ch} x \cos y - \operatorname{ch} a} = \varphi(x, y) - i \psi(x, y).$$

Il potenziale ordinario corrispondente al potenziale complesso (8) è dunque

$$(10) \quad \varphi(x, y) = \frac{m}{4} \log \frac{1}{4} [(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} x \cos y)^2 + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sen}^2 y].$$

Ora determiniamo  $\operatorname{ch} a$  in modo che una linea equipotenziale  $l$  chiusa attorno alla coppia di sorgenti abbia due semidiametri ortogonali, paralleli rispettivamente agli assi  $x$  e  $y$ , uguali a  $r$ . Deve perciò essere

$$\varphi(r, 0) = \varphi(0, r),$$

ossia

$$(\operatorname{ch} a - \cos r)^2 = (\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} r)^2,$$

da cui

$$(11) \quad \operatorname{ch} a = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} r + \cos r).$$

Il potenziale  $\varphi(r, 0) = \varphi(0, r)$  su  $l$ , tenuto conto di (11), vale

$$(12) \quad \frac{m}{2} \log \frac{1}{4} (\operatorname{ch} r - \cos r).$$

Le distanze dei punti di  $l$  dal suo centro, uguali a  $r$  nelle due direzioni ortogonali degli assi, nelle altre direzioni differiscono da  $r$  sempre in difetto. Le differenze raggiungono percentualmente massimi del 5‰ per  $r = \pi/3$  (diametro uguale a 1/3 del passo della schiera), del 3‰ per  $r = \pi/2$  (diametro uguale a 1/2 del passo della schiera), del 7‰ per  $r = 2/3 \pi$  (diametro uguale a 2/3 del passo della schiera). Almeno fino a  $r = \pi/2$ , la linea  $l$ , che chiameremo quasi-cerchio di raggio  $r$ , si può dunque confondere con buona approssimazione con un cerchio di raggio  $r$ .

Il potenziale complesso (8), col valore di  $\operatorname{ch} a$  dato da (11), rappresenta quindi il campo potenziale attorno a una schiera, con passo  $d = 2\pi$ , di quasi cerchi di raggio  $r$  a potenziale costante. I centri dei quasi-cerchi si trovano sull'asse immaginario, e uno di essi nell'origine.

Nelle figure 1 e 2 sono tracciate alcune linee equipotenziali e linee di flusso di questo campo (ottenute da (9) ponendo rispettivamente  $\varphi = \text{cost}$  e  $\psi = \text{cost}$ ) nei casi  $r = \pi/3$  e  $r = \pi/2$ . L'equidistanza delle linee equipotenziali è  $m/4$ . Le differenze dei quasi-cerchi da cerchi sono troppo piccole per potere essere rilevate dalle figure.

4. Per studiare campi più generali, può interessare di trasformare conformemente il campo esterno a un cerchio nel campo esterno alla schiera di quasi-cerchi.

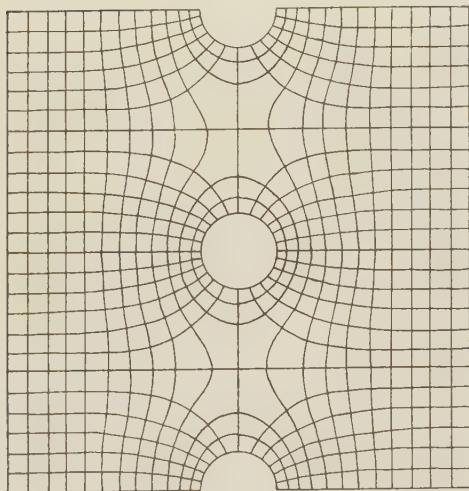
Nel piano della variabile complessa  $Z$  sia un cerchio  $\gamma$  di raggio uno col centro nell'origine. Nei punti  $+1/b$  e  $-1/b$  siano due sorgenti di inten-



sità  $m/2$ , e nei punti  $+b$  e  $-b$  due pozzi di intensità  $-m/2$  ( $b$  reale maggiore di uno). In tale caso il cerchio  $\gamma$  è notoriamente linea equipotenziale. Il potenziale complesso di questo campo, aggiuntavi una costante addittiva arbitraria  $m/2 \log c$  ( $c$  reale), risulta

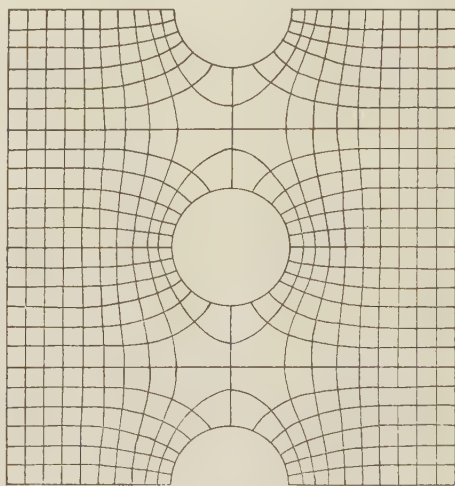
$$(13) \quad \frac{m}{2} \log c \frac{\left(Z + \frac{1}{b}\right)\left(Z - \frac{1}{b}\right)}{(Z+b)(Z-b)} = \frac{m}{2} \log c \frac{Z^2 - \frac{1}{b^2}}{Z^2 - b^2} = \frac{m}{2} \log \frac{c}{b^2} \frac{b^2 Z^2 - 1}{Z^2 - b^2}.$$

Il potenziale reale sul cerchio  $\gamma$  vale  $\frac{m}{2} \log \left(-\frac{c}{b^2}\right)$ . Determiniamo  $c$



$$r = \frac{d}{6}$$

Fig. 1.



$$r = \frac{d}{4}$$

Fig. 2.

in modo che questo valore del potenziale su  $\gamma$  sia uguale al valore (12) del potenziale sui quasi-cerchi della schiera. Si ricava

$$(14) \quad \frac{c}{b^2} = -\frac{1}{4} (\operatorname{ch} r - \cos r).$$

Il flusso  $2\pi m$  uscente da  $\gamma$  è uguale a quello uscente da ciascuno dei quasi-cerchi.

Se uguagliamo (13) con (8), otteniamo una relazione (analitica) fra  $Z$  e  $z$  che definisce una trasformazione conforme per la quale alle linee equipotenziali e alle linee di flusso definite nel piano  $z$  dal potenziale complesso (13) corrispondono le linee equipotenziali e linee di flusso definite nel piano  $z$  dal potenziale complesso (8); in particolare, soddisfatta la (14), al cerchio  $\gamma$  nel piano  $Z$  corrisponde la schiera dei quasi-cerchi nel piano  $z$ .

Uguagliando dunque (13) a (8) e tenendo conto di (14) e di (11), si ottiene

$$-\frac{1}{4}(\operatorname{ch} r - \cos r) \frac{b^2 Z^2 - 1}{Z^2 - b^2} = \frac{1}{4}(\operatorname{ch} r + \cos r) - \frac{1}{2} \operatorname{ch} z$$

e risolvendo rispetto a  $Z^2$ :

$$(15) \quad Z^2 = \frac{(b^2 - 1) \cos r + (b^2 + 1) \operatorname{ch} r - 2 b^2 \operatorname{ch} z}{-(b^2 - 1) \cos r + (b^2 + 1) \operatorname{ch} r - 2 \operatorname{ch} z}.$$

Poiché  $b$  è arbitraria, può essere scelta in modo da semplificare la (15). Così, se  $r < \pi/2$ , ponendo

$$b^2 = \frac{\operatorname{ch} r + \cos r}{\operatorname{ch} r - \cos r},$$

la (15) diventa

$$Z^2 = b^2 - \frac{A}{\operatorname{ch} z},$$

con

$$A = \frac{2 \operatorname{ch} r \cos r}{\operatorname{ch} r - \cos r}.$$

Se  $r > \pi/2$ , ponendo

$$b^2 = \frac{\operatorname{ch} r - \cos r}{\operatorname{ch} r + \cos r},$$

la (15) diventa

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{A}{\operatorname{ch} z}.$$

I casi considerati escludono  $r = \pi/2$ , dovendo essere  $b > 1$ . In tal caso però la (15) si semplifica in modo ovvio.

Le formule sopra scritte definiscono la cercata trasformazione conforme del campo esterno al cerchio  $\gamma$  nel campo esterno alla schiera di quasi-cerchi; in tale trasformazione, ai punti  $+b$ ,  $-b$  del piano  $Z$  del cerchio  $\gamma$  corrisponde l'infinito del piano  $z$ .

Ora è noto che concentrando opportune sorgenti e vortici nei punti  $b$ ,  $-b$ ,  $1/b$ ,  $-1/b$ , si possono ottenere campi nei quali il cerchio  $\gamma$  è linea equipotenziale oppure linea di flusso con punti di arresto. Nel passaggio dal piano  $Z$  al piano  $z$ , le sorgenti vorticosi in  $b$  e  $-b$  vanno all'infinito, generando dei campi che per  $x \rightarrow \infty$  e  $x \rightarrow -\infty$  tendono a diventare uniformi, con inclinazioni rispetto agli assi dipendenti dai rapporti fra intensità della sorgente e del vortice, e nei quali i quasi-cerchi della schiera sono linee equipotenziali, oppure linee di flusso. Si possono così risolvere vari problemi generali di carattere tecnico, per i quali l'approssimazione rispetto ai cerchi è più che sufficiente, come sarà successivamente indicato in periodici d'ingegneria.

**Meccanica.** — *Sui moti centrali relativi.* Nota di ARNALDO MASOTTI, presentata (\*) dal corrisp. BRUNO FINZI.

Con referenza a un osservatore fisso, si considerano due punti mobili. Si propone (nel n. 1) una plausibile definizione del *moto centrale relativo* di uno di essi rispetto all'altro (definizione che contiene quella classica di moto centrale rispetto a un punto fisso). Nel caso più generale l'accelerazione relativa di ciascun punto rispetto all'altro sta sulla retta congiungente i due punti, e il moto relativo di ciascun punto rispetto all'altro è detto *centrale in senso lato*. Nell'importante caso particolare, in cui le singole accelerazioni assolute stanno sulla retta anzidetta, il moto relativo di ciascun punto rispetto all'altro è detto *centrale in senso stretto*.

Indi si esamina il seguente problema: supposto assegnato il moto di uno dei due punti, determinare — se è possibile — il moto dell'altro, in modo che il moto relativo di ciascun punto rispetto all'altro sia centrale, in senso lato o in senso stretto. E si vede che nel primo caso il problema è sempre risolubile, e facile è caratterizzare le infinite soluzioni (n. 2). Nel secondo caso, invece, il problema non sempre ammette soluzione, ma soltanto se esiste una direzione fissa, secondo la quale la velocità del moto assegnato ha componente costante (n. 3). Soddisfatta questa condizione, si possono determinare le infinite soluzioni (n. 4). Infine, questo caso è illustrato coll'esempio in cui il moto assegnato è un moto uniforme lungo un'elica cilindrica qualsiasi (n. 5).

1. Come è notissimo, il moto di un punto P dicesi *centrale* rispetto a un punto *fisso* Q quando, in ogni istante, l'*accelerazione* di P giace sulla retta PQ, cioè

$$(1) \quad (P - Q) \wedge \ddot{P} = 0.$$

Questa equazione equivale all'altra

$$(2) \quad (P - Q) \wedge \dot{P} = c,$$

essendo  $c$  un vettore costante. Dice la (2) che la *velocità areolare* di P rispetto a Q (la metà del vettore che sta nel primo membro) è costante: dunque il moto di P avviene nel piano passante per Q e perpendicolare a  $c$ , quindi invariabile, e su questo piano il raggio QP descrive aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle. Poiché le (1) e (2) sono equivalenti, queste proprietà sono caratteristiche del moto in esame.

Analogamente, il moto di un punto P si può dire *centrale* rispetto a un punto *mobile* Q quando, in ogni istante, l'*accelerazione relativa* di P rispetto a Q (†) giace sulla retta PQ, cioè

$$(3) \quad (P - Q) \wedge (\ddot{P} - \ddot{Q}) = 0.$$

(\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(†) È appena necessario ricordare che per «moto rispetto a Q» si intende il moto rispetto a un osservatore solidale con Q e mobile di moto traslatorio: ved. per esempio B. FINZI, *Meccanica razionale* (II ediz., Bologna, Zanichelli, 1950), vol. II, p. 100.

Questa equazione equivale all'altra

$$(4) \quad (P - Q) \wedge (\dot{P} - \dot{Q}) = \mathbf{c},$$

essendo  $\mathbf{c}$  un vettore costante. Dice la (4) che la *velocità areolare relativa* di  $P$  rispetto a  $Q$  (la metà del vettore che sta nel primo membro) è costante: dunque il moto relativo di  $P$  avviene nel piano passante per  $Q$  e perpendicolare a  $\mathbf{c}$ , avente perciò giacitura invariabile, e su questo piano il raggio  $QP$  descrive aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle. Poiché le (3) e (4) sono equivalenti, le proprietà ora rilevate sono caratteristiche del moto in esame.

La (3) è simmetrica rispetto a  $P$  e  $Q$ : perciò, se il moto di  $P$  è centrale rispetto a  $Q$ , anche il moto di  $Q$  è centrale rispetto a  $P$ . Inoltre, poiché pure la (4) è simmetrica rispetto a  $P$  e  $Q$ , ai due moti compete la medesima velocità areolare relativa costante. Detto  $\mathbf{u}$  il versore di questa velocità areolare relativa, esso pure costante, a  $\mathbf{u}$  si mantiene perpendicolare il vettore  $P - Q$ , non che il vettore  $\dot{P} - \dot{Q}$ : perciò sono eguali, in ogni istante, le componenti secondo  $\mathbf{u}$  delle velocità  $\dot{P}$  e  $\dot{Q}$ , quindi anche quelle delle accelerazioni  $\ddot{P}$  e  $\ddot{Q}$ .

In particolare sussiste la (3), e quindi la (4), se le accelerazioni assolute di  $P$  e  $Q$  giacciono ambedue sulla retta  $PQ$ , cioè

$$(5) \quad (P - Q) \wedge \ddot{P} = 0, \quad (P - Q) \wedge \ddot{Q} = 0.$$

Allora, come  $P - Q$ , anche  $\ddot{P}$  e  $\ddot{Q}$  sono perpendicolari a  $\mathbf{u}$ :

$$\ddot{P} \times \mathbf{u} = 0, \quad \ddot{Q} \times \mathbf{u} = 0;$$

ne segue:

$$\dot{P} \times \mathbf{u} = \text{cost.}, \quad \dot{Q} \times \mathbf{u} = \text{cost.};$$

quindi, in questo caso, le componenti di  $\dot{P}$  e  $\dot{Q}$  secondo  $\mathbf{u}$ , non soltanto sono in ogni istante eguali fra loro, ma sono costanti.

Converrà distinguere il precedente caso generale da questo notevole caso particolare, dicendo che nel primo il moto è centrale in senso *lato*, nel secondo il moto è centrale in senso *stretto*.

#### *Osservazioni:*

a) A titolo di esempio, osserviamo che se  $P$  e  $Q$  sono punti materiali soggetti solo a mutua attrazione, il moto di ciascuno rispetto all'altro è centrale in senso stretto; invece se  $P$  e  $Q$  sono punti materiali pesanti soggetti anche a mutua attrazione, il moto di ciascuno rispetto all'altro è centrale in senso lato. Il primo esempio è quello del classico problema newtoniano dei due corpi <sup>(2)</sup>; anche il secondo esempio è offerto da un problema noto <sup>(3)</sup>.

(2) Ved. per esempio E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics* (III ediz., Cambridge, University Press, 1927), pp. 76-77.

(3) Ved. per esempio E. J. ROUTH, *Dynamics of a Particle* (ristampa, New York, Stechert, 1945), esempio 5 del n. 404.



b) Se i moti di due punti P e Q sono mutuamente centrali, in senso lato o in senso stretto, tali sono i moti di P e R, e di Q e R, essendo R un punto che in ogni istante appartiene alla retta PQ e divide il segmento PQ in un rapporto costante. Se P e Q sono punti materiali, un particolare notevole punto R è il loro baricentro.

c) Se i moti di due punti P e Q sono mutuamente centrali, ossia vale la (3), e uno dei punti si muove di moto rettilineo uniforme, sicché vale una delle (5), si deduce che vale anche l'altra (5), e quindi il moto di ciascun punto rispetto all'altro è centrale in senso stretto.

2. Ci proponiamo l'esame del seguente problema: dato il moto di un punto P, cioè  $P = P(t)$  (essendo  $t$  il tempo), determinare - se è possibile - il moto di un altro punto Q, cioè  $Q = Q(t)$ , in modo che il movimento di P rispetto a Q (quindi anche il movimento di Q rispetto a P) sia centrale, in senso lato o in senso stretto.

Nel primo caso (moto centrale in senso lato) il problema è risolubile, e in infiniti modi, qualunque sia l'assegnato moto di P. Infatti basta, in un piano passante per P e avente giacitura arbitraria ma invariabile, far muovere Q in modo che, nel piano anzidetto, il raggio PQ descriva aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.

Nel secondo caso (moto centrale in senso stretto) il problema non sempre è risolubile: lo è, solo se l'assegnato moto di P soddisfa una condizione. Indicare questa condizione, determinare le soluzioni, studiare un esempio notevole, è oggetto dei successivi paragrafi.

3. Se il moto di P rispetto a Q deve essere centrale in senso stretto, sappiamo (n. 1) che deve esistere un versore  $\mathbf{u}$  (versore della velocità areolare relativa costante di una eventuale soluzione) tale che siano soddisfatte le condizioni equivalenti  $\dot{P} \times \mathbf{u} = \text{cost.}$  e  $\ddot{P} \times \mathbf{u} = 0$ .

La duplice condizione è evidentemente verificata, e rispetto a un  $\mathbf{u}$  arbitrario, quando P si muove di moto rettilineo uniforme: allora ogni punto Q che si muove di moto centrale in senso lato rispetto a P, quindi determinabile come indicammo nel paragrafo precedente, si muove pure di moto centrale in senso stretto rispetto a P (n. 1, osservazione c).

Esaurito questo caso speciale, passiamo agli altri moti di P, pei quali esiste un versore fisso  $\mathbf{u}$  secondo cui è costante la componente della velocità e nulla quella dell'accelerazione (non senza rilevare che moti siffatti sono quelli di un punto materiale soggetto a forza costantemente normale a una retta fissa).

I moti in esame si possono caratterizzare come quelli pei quali il corrispondente moto odografo è piano. Infatti il moto odografo è quello del punto V definito dalla posizione

$$(6) \quad V - O = \dot{P},$$

dove  $O$  denota un punto fisso qualunque, e sono quindi manifestamente equivalenti le condizioni  $\dot{P} \times u = \text{cost.}$  e  $(V - O) \times u = \text{cost.}$ , la seconda delle quali esprime appunto che il moto odografo è piano, e che si effettua in un piano normale a  $u$ . Ma questa condizione circa il moto di  $V$  si esprime anche scrivendo:

$$(7) \quad \text{vers } (\dot{V} \wedge \ddot{V}) = u^{(4)},$$

e questa, mediante la (6), si traduce tosto nella seguente:

$$(8) \quad \text{vers } (\ddot{P} \wedge \ddot{P}) = u \text{ (cost.)},$$

che esprime sotto forma atta alla verifica la condizione preliminare circa il moto di  $P$  (e dà inoltre il versore della velocità areolare relativa costante di una eventuale soluzione).

4. Ora constateremo che supposta verificata la (8) per  $P$ , è possibile determinare  $Q$ , sicché la (8) è condizione non solo necessaria ma pure sufficiente per la soluzione del problema.

Infatti, in virtù della prima (5), deve essere

$$(9) \quad Q = P + \lambda \ddot{P},$$

essendo  $\lambda$  una funzione scalare del tempo, da determinare — se è possibile — in modo che sia soddisfatta anche la seconda (5). Questa, quando è verificata la prima (5), equivale alla (3), che a sua volta equivale alla (4). Poniamo dunque nella (4) la espressione di  $Q$  data dalla (9): otteniamo

$$\lambda \ddot{P} \wedge \frac{d}{dt} (\lambda \ddot{P}) = c,$$

da cui

$$(10) \quad \lambda^2 \ddot{P} \wedge \ddot{P} = c.$$

Questa equazione equivale alle due che si ottengono eguagliando versori e moduli dei due membri: l'eguaglianza dei versori, tenuta presente la (8), conferma che  $u$  è il versore di  $c$ ; l'eguaglianza dei moduli porge l'incognita  $\lambda$ :

$$(11) \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{c}{|\ddot{P} \wedge \ddot{P}|}}.$$

Si conclude, dalle (9) e (11), che per ogni  $c$  (arbitrario purché positivo) vi sono le due soluzioni:

$$(12) \quad Q = P \pm \sqrt{\frac{c}{|\ddot{P} \wedge \ddot{P}|}} \ddot{P}.$$

(4) Infatti il primo membro della (7) è il vettore unitario binormale della traiettoria di  $V$ , la cui costanza equivale all'annullarsi della torsione (in virtù della terza formula di FRENET).

*Osservazione.* - Dalla (9), con due derivazioni rispetto al tempo, si deduce la accelerazione di Q:

$$(13) \quad \ddot{Q} = (1 + \ddot{\lambda}) \ddot{P} + \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dt} (\lambda^2 \ddot{P}).$$

Tenendo presente la (10) si controlla facilmente che  $\ddot{Q}$  e  $\ddot{P}$  sono paralleli. Qualora, di più, risultassero coi versi opposti e coi moduli in un rapporto costante  $k^2$ , fosse cioè

$$(14) \quad \ddot{Q} = -k^2 \ddot{P},$$

P e Q si muoverebbero come punti materiali, di masse rispettive  $m$  e  $m/k^2$  (essendo la massa  $m$  arbitraria), soggetti a mutua attrazione (o repulsione), cioè si sarebbe nel caso del problema dei due corpi, già ricordato (n. 1, osservazione a).

5. Per illustrare con un esempio le cose dette nei nn. 3 e 4, consideriamo il caso in cui l'assegnato moto di P è un moto uniforme lungo un'elica cilindrica qualunque. È costante la componente della velocità di P secondo la direzione (comunque orientata) delle generatrici del cilindro a cui l'elica appartiene, ed è perciò soddisfatta la condizione preliminare relativa al moto di P<sup>(5)</sup>.

Siano:  $v$  il modulo costante della velocità di P;  $\rho$  e  $\tau$  i raggi di flessione e di torsione della traiettoria;  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  i versori della sua terna intrinseca. Si ha:

$$(15) \quad \dot{P} = v\mathbf{t}, \quad \ddot{P} = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}, \quad \ddot{P} = -\frac{v^3}{\rho^2} \left( \mathbf{t} + \rho' \mathbf{n} + \frac{\rho}{\tau} \mathbf{b} \right),$$

dove l'apice indica derivazione rispetto all'arco della traiettoria. Ne segue:

$$(16) \quad \ddot{P} \wedge \ddot{P} = \frac{v^5}{\rho^3} \left( -\frac{\rho}{\tau} \mathbf{t} + \mathbf{b} \right).$$

La (16) vale per un moto uniforme su traiettoria qualsiasi. Se questa è un'elica cilindrica, il rapporto  $\sigma/\tau$  è costante e, detto  $\theta$  l'angolo acuto sotto cui l'elica taglia le generatrici del cilindro a cui appartiene, eguaglia  $\mp \cotg \theta$  a seconda che l'elica è destrorsa o sinistrorsa<sup>(6)</sup>. Quindi, in questo caso,

$$(17) \quad \ddot{P} \wedge \ddot{P} = \frac{v^5}{\rho^3 \sin \theta} (\pm \cos \theta \cdot \mathbf{t} + \sin \theta \cdot \mathbf{b}).$$

(5) Si osservi che, non solo, se un moto uniforme è elicoidale, esso soddisfa la condizione preliminare, ma, viceversa, se un moto uniforme soddisfa la condizione preliminare, esso è elicoidale.

(6) Ved. per esempio L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale* (ristampa della III ediz., Bologna, Zanichelli, 1927-1930), vol. I, p. 24.

La (17) conferma che è soddisfatta la condizione preliminare relativa al moto di P, sotto la forma (8) e con  $\mathbf{u} = \pm \cos \theta \cdot \mathbf{t} + \sin \theta \cdot \mathbf{b}$ , e dice inoltre che

$$(18) \quad |\ddot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}| = \frac{v^5}{\rho^3 \sin \theta}.$$

Tenendo conto delle espressioni di  $\ddot{\mathbf{P}}$  e  $|\ddot{\mathbf{P}} \wedge \ddot{\mathbf{P}}|$  date da (15) e (18), la (12) dà

$$(19) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P} \pm \sqrt{C\rho} \mathbf{n},$$

avendo posto, per semplicità di scrittura,

$$C = \frac{c}{v} \sin \theta.$$

Quindi l'assegnato moto di P è centrale, in senso stretto, rispetto a ciascuno dei punti Q definiti dalla (19). La giacitura del moto centrale relativo è quella del piano normale alle generatrici del cilindro a cui l'elica appartiene. Il doppio della velocità areolare relativa ha per modulo  $c = Cv/\sin \theta$ .

#### *Osservazioni:*

a) Dalla seconda (15) e dalla (19) si deduce che l'accelerazione assoluta di P è esprimibile mediante la formula

$$(20) \quad \ddot{\mathbf{P}} = \pm \frac{Cv^2}{|\mathbf{P}-\mathbf{Q}|^2} \text{vers} (\mathbf{P}-\mathbf{Q}),$$

sicché P si muove come se fosse attratto o respinto dal centro mobile Q con legge newtoniana.

b) Ricordando l'osservazione del n. 4, si presenta il problema di determinare quando P e Q si muovono come punti materiali sottoposti a mutue attrazioni (o repulsioni), necessariamente del tipo newtoniano, in virtù della osservazione che precede. Ecco una traccia della soluzione: Dalla (19), derivando due volte rispetto al tempo, si ricava  $\ddot{\mathbf{Q}}$ , e precisamente, posto

$$(21) \quad \sigma = \pm \sqrt{C\rho},$$

si ottiene la espressione di  $\ddot{\mathbf{Q}}$  che ora scriviamo insieme alla espressione di  $\ddot{\mathbf{P}}$  mediante la stessa  $\sigma$ :

$$(22) \quad \ddot{\mathbf{P}} = v^2 \frac{C}{\sigma^2} \mathbf{n} \quad , \quad \ddot{\mathbf{Q}} = v^2 \left( \frac{C}{\sigma^2} - \frac{C^2}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\sigma^3} + \sigma'' \right) \mathbf{n}$$

(dove gli apici indicano derivazioni rispetto all'arco  $s$  dell'elica descritta da P). Introdotte le (22) nella (14), si ottiene una equazione differenziale del secondo ordine per  $\sigma$ , che si integra facilmente. La (21) e l'integrale trovato definiscono  $\rho$  in funzione di  $s$ ; la rammentata relazione di proporzionalità fra  $\rho$  e  $\tau$  porge poi  $\tau$  in funzione di  $s$ ; e con ciò sono determinate in modo intrinseco le traiettorie di P, nelle imposte condizioni dinamiche.



**Geofisica.** — *Sulla genesi delle montagne.* Nota di M. MATSCHINSKI, presentata (\*) dal Corrisp. L. SOLAINI.

1. La genesi delle montagne e, in generale, dei continenti, è stata oggetto di numerosi studi. Il problema è molto difficile e le obiezioni alle teorie formulate sono ben note. Noi le abbiamo considerate altrove (ved. per esempio [1]) e non intendiamo tornare sull'argomento. Senza pretendere di risolvere tutte le difficoltà, crediamo che si possa raggiungere una più completa visione del processo orogenetico, ricorrendo all'ipotesi di uno stato di tensione.

Partendo da questa ipotesi, che non esclude l'esistenza di compressioni locali [2] abbiamo già enunciato le basi di una teoria generale del processo di evoluzione della crosta terrestre e della orogenesi.

Subito dopo la sua formazione, la crosta terrestre è in stato di tensione; le rotture che sopravvengono dividono la crosta in parti più o meno completamente staccate (formazione dei continenti). Le singole parti hanno un raggio di curvatura minore di quello della Terra, a causa del raffreddamento più rapido negli strati superficiali che in quelli profondi. Finalmente le curvature tendono ad uguagliarsi e quindi, a causa della inapplicabilità di due sfere di raggio diverso, si determina una piegatura (o, se si vuole, un increpamento) della crosta: l'orogenesi.

2. Quest'ultimo punto è forse il più importante; cerchiamo di spiegarlo con l'aiuto delle figure 1 e 2. La fig. 1 mostra un caso immaginario in cui si suppone che non esista la gravitazione. Il frammento di crosta, supposto di forma planimetrica triangolare, più freddo del nucleo, potrebbe prendere liberamente la forma di uno strato sferico di raggio minore di quello terrestre, senza tensioni o compressioni.

In fig. 2 è rappresentato un altro caso estremo: un frammento completamente deformabile e la forza di gravità esageratamente grande. Lo strato si adatta allora esattamente al sottostante nucleo. Ma le forze di tensione e di compressione insorgono, come è indicato con freccia in fig. 2. Nella parte centrale si determina uno stato di compressione, mentre ai bordi le sollecitazioni sono più complesse, perché in una direzione la materia è tesa, in un'altra compressa.

In natura si verificano naturalmente stati intermedi, quali quelli rappresentati nelle figg. 3 e 4.

Questi stati sono in condizioni di energia minimale. Ritorneremo su questo punto nel paragr. 4; ci preme ora solo far notare che uno stato primario di tensione può produrre, creando dei frammenti con raggi di curvatura più piccola di quelli della Terra, un gioco di tensioni e compressioni secondarie (essendo questo termine inteso solo col tempo) necessario per dare origine alle montagne.

(\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

3. Lo scopo di una teoria non si limita a formulare una serie di idee ammissibili; essa deve spiegare tutto quello che è stato acquisito dalle teorie precedenti e rendere conto di fenomeni non ancora spiegati. Abbiamo perciò applicato a casi concreti la teoria prima abbozzata in una serie di articoli (ved. bibl. da n. [1] a [11]). Ora è certo che in genere i lavori che si appoggiano sulla teoria per rendere conto di fatti e di fenomeni non sono i soli importanti; le teorie che hanno un valore *indicativo* appaiono come le più interessanti, perché le teorie passano e i fatti restano. Perciò meritano di essere applicate specialmente le teorie che conducono a scoperte o a constatazioni di fenomeni e fatti nuovi. Tali fatti restano acquisiti alla scienza,

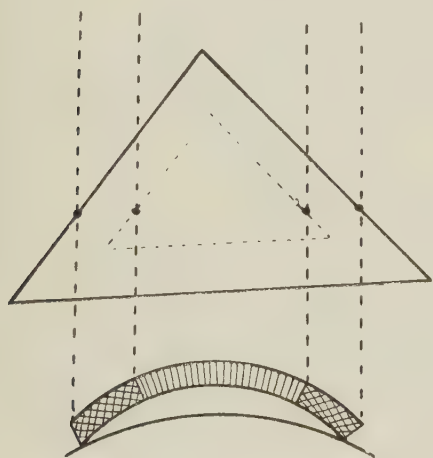


Fig. 1.

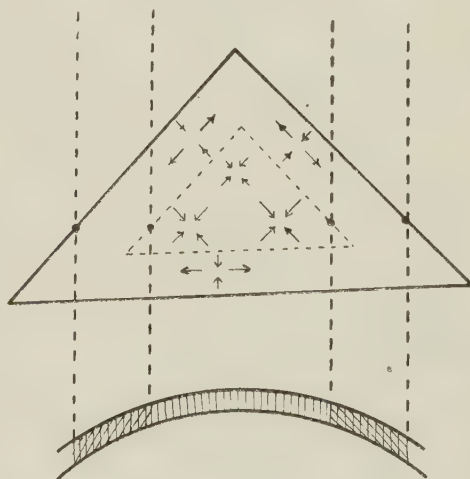


Fig. 2.

anche se lo sviluppo storico del pensiero sostituisce alla teoria iniziale un'altra più profonda e più precisa.

Questo « *experimentum crucis* » è stato effettuato per la teoria proposta ed ha rivelato la possibilità di scoprire dei fatti semplici, ma molto importanti, che possono essere espressi sotto forma di leggi geografiche sperimentali: correlazioni tra l'altezza media dei continenti e le loro dimensioni [12], correlazione tra le densità dei vulcani e la curvatura dell'arco che essi formano [7].

4. Torniamo alla genesi delle montagne propriamente dette, cioè alla genesi di una piega. Considerando la superficie della Terra, si vedono forme troppo complicate perché possano essere sottoposte ad una analisi geometrica e alla applicazione delle equazioni della meccanica. In prima approssimazione dobbiamo sostituire a tali configurazioni altre di forme geometriche semplici e sufficientemente approssimate.

Supponiamo in prima approssimazione che la porzione di crosta possa essere assimilata ad un triangolo sferico; il nostro scopo sarà allora quello di cercare, su un continente approssimativamente triangolare, le forme di

piegamento (la posizione delle pieghe principali) che derivano dalla ipotesi dello stato iniziale di tensione e della applicazione delle considerazioni che si possono fare sulle figg. 2 e 3.

Esaminiamo una porzione separata di crosta terrestre di forma approssimativamente triangolare (formata da tre rotture incrociate), che si può considerare come un triangolo sferico. Reagendo in modo elastico e anche plastico, questa porzione può subire una delle quattro seguenti deformazioni: o le parti periferiche cedono, mentre la parte centrale resta rialzata (fig. 3 prima alternativa), oppure il frammento si piega lungo uno dei tre lati (fig. 4 altre tre alternative). Non ci si deve perciò meravigliare della mol-

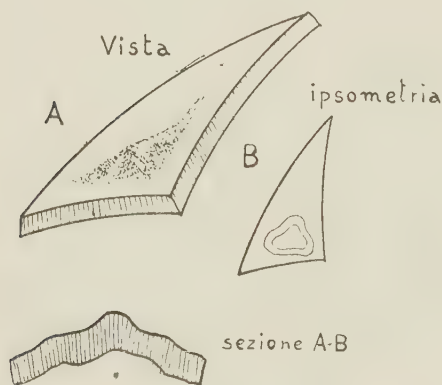


Fig. 3.

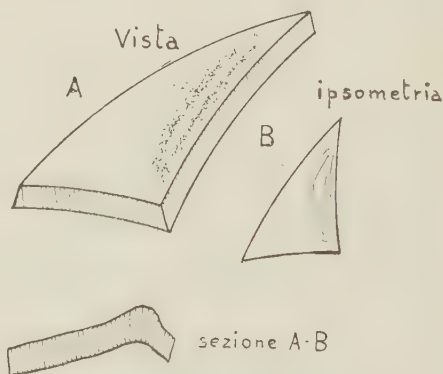


Fig. 4.

plicità di soluzione delle equazioni differenziali corrispondenti; ciò risulta dalla loro non-linearità

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial x_2} + w \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial X_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial X_{33}}{\partial x_3}; \\ \rho \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x_1} + v \frac{\partial v}{\partial x_2} + w \frac{\partial v}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial X_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial X_{32}}{\partial x_3}; \\ \rho \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x_1} + v \frac{\partial w}{\partial x_2} + w \frac{\partial w}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial X_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial X_{33}}{\partial x_3}; \end{aligned} \right.$$

in cui il significato dei simboli è:  $x_i$  coordinate;  $\rho$  densità;  $t$  tempo;  $u, v, w$  componenti della velocità;  $X_{ij}$  tensioni. Il tensore  $X_{ij}$  dipende finché la crosta si comporta elasticamente, dalle deformazioni  $\partial u_i / \partial x_j$ , dove  $u_i = \int u dt$  ecc. sono gli spostamenti. Tuttavia  $X_{ij}$  dipende anche dalle velocità di deformazione  $\partial u / \partial x_i$  ecc., tanto più, quanto più la crosta si comporta plasticamente. Finalmente le parti plastiche di  $X_{ij}$  sono legate tra loro dalle condizioni di Tresca-St. Venant [13] [14] nella forma semplice o generalizzata (Mises [13] [14]). Anche sopprimendo la plasticità, le soluzioni di (I) sono multiple. Un esempio classico è fornito dalla forma presa da una massa fluida pesante in rotazione; sono possibili tanto gli ellissoidi di rotazione quanto

le figure di Liapounoff. L'introduzione della plasticità aumenta il numero delle soluzioni.

Le equazioni (1) in cui  $X_{ij}$  è composto dalle due parti elastica e plastica non sono mai state applicate alla crosta terrestre, perché le difficoltà matematiche sembrano insormontabili. Generalmente si considera solo la parte elastica o quella plastica. La prima strada è stata seguita da diversi autori, tra cui Smoluchowski [13] da Ross Gunn [16] e da noi [11]; l'altra è stata considerata da Vening-Meinesz [17].

Per giungere a formule semplici e nello stesso tempo conglobanti le proprietà elastiche e plastiche, conviene partire da un principio minimale della meccanica [14]. Consideriamo uno stato del frammento (fig. 3 e 4) in via di afflosciamento: stato intermedio, ma quasi stazionario. Scartando per ora la prima possibilità, esaminiamo le altre. Scriviamo le espressioni della energia di contrazione e di distensione contenuta in tale frammento; essa è:

$$(2) \quad E = \int_V \sum_{i,j,k,m} \alpha_{i,j,k,m} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) dx_1 dx_2 dx_3,$$

in cui l'integrazione è estesa al volume  $V$  del frammento.

Il fatto che nella espressione (2) appaiono solo le componenti  $\partial u_i / \partial x_j$ , non limita la generalità, perché l'energia di uno stato, elastica o gravitazionale, dipende dalle posizioni, ma non dalle velocità. Solo l'energia dissipata nel passaggio da uno stato all'altro dipende dalle velocità. La formula (2) non può essere applicata in senso variazionale; per farla variare è necessario introdurre le  $\partial u / \partial x_j$ ,  $\partial v / \partial x_j$  ecc., perciò l'integrale deve essere applicato tale e quale. L'applicazione della analisi variazionale è d'altra parte inutile, perché ci condurrebbe alle equazioni (1).

## 5. Il significato geografico delle derivate

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_3}, \text{ ecc.}$$

risulta dalle figure 5, 6 e 7 dove sono rappresentate le diverse possibilità di contrazione e di formazione di una piega asimmetrica o coricata ( $r$ , distanza tra il punto considerato e il centro della Terra). Dalle tre figure risulta che si può introdurre la proporzionalità generalizzata

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_3} ; \quad \frac{\partial v}{\partial x_1} = \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \\ \quad + \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_3} ; \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \\ \quad + \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_3} , \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} = \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \text{cost} \frac{\partial r}{\partial x_3} ; \text{ ecc.} \dots \end{array} \right.$$



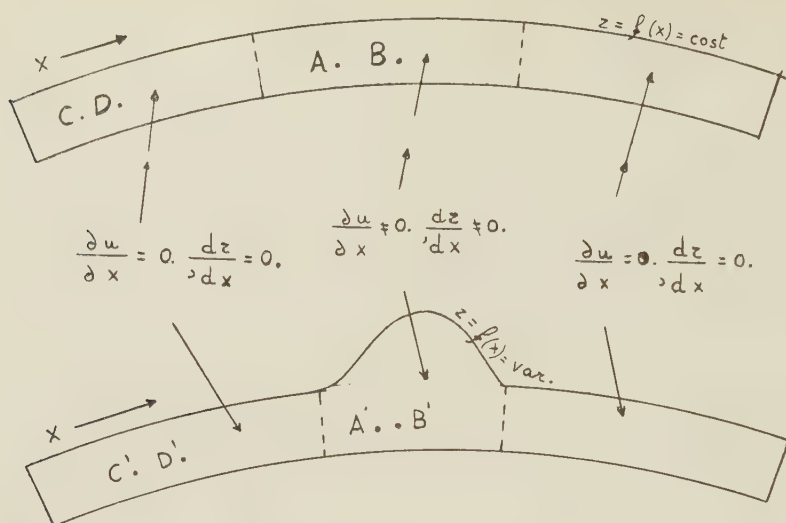


Fig. 5.

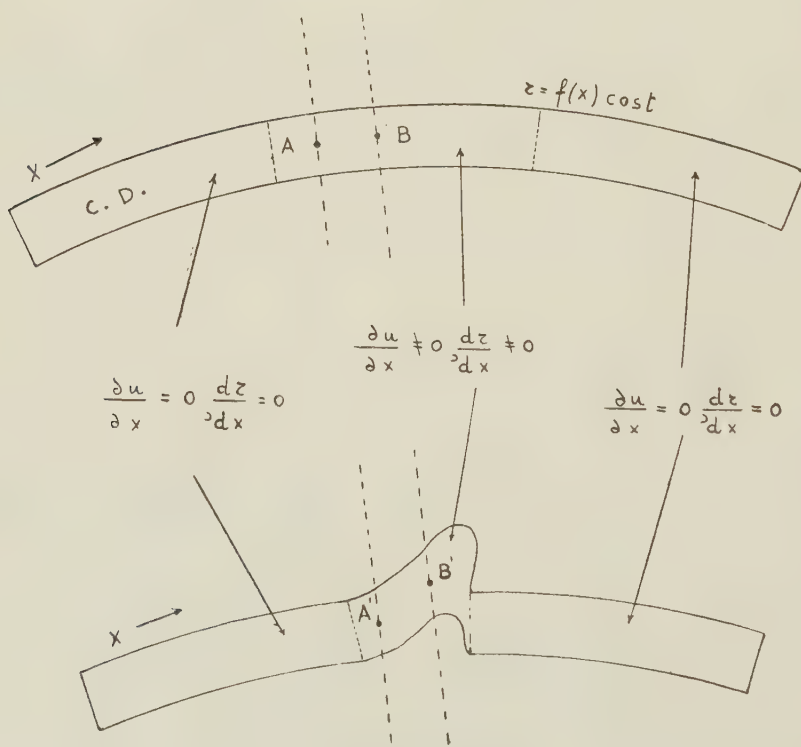


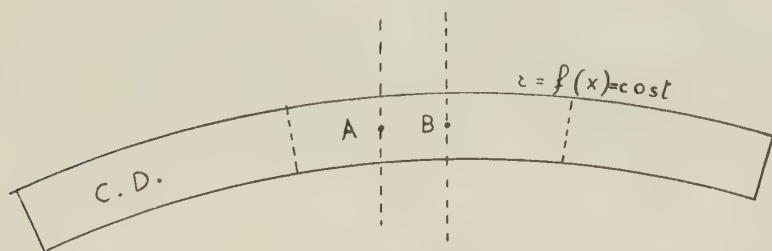
Fig. 6.

perché le componenti del tensore di deformazione normali a  $r$  sono trascurabili e praticamente non accumulano energia. In altri termini, dove le derivate (2) sono piccole, si avrà pianura, dove sono grandi, montagna.

Tenendo conto di (4) si ottiene

$$(5) \quad \bar{E} = \int_{\bar{V}} \sum_{v,k} \beta_{v,k} \left( \frac{\partial r}{\partial x_v} \right) \left( \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Non basta vedere nei coefficienti  $\beta_{v,k}$  semplici combinazioni di  $\alpha_{i,j,k,m}$ , e dei coefficienti di (4), derivanti dalla sostituzione di (4) in (2), devono contenere aggiunti altri termini  $\gamma_i$ , se vogliamo che (5) rappresenti la *energia*



$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{dz}{dx} \neq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0$$

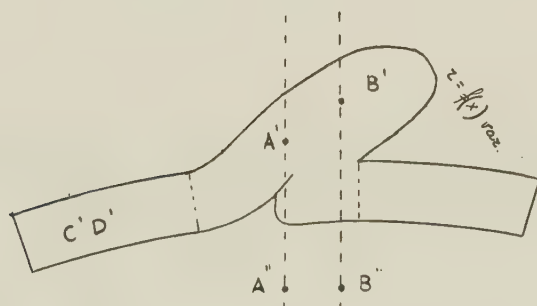


Fig. 7.

*totale*, somma cioè di quella di deformazione e di quella di gravitazione, quest'ultima espressa da termini del tipo  $\gamma_i (\partial r / \partial x_i)$ .

Avendo già trascurato in (5) le componenti di  $X_{ij}$ , normali a  $r$ , si possono a più forte ragione omettere  $\partial r / \partial x_i$  laddove non ci sono montagne; perciò, detta  $\Delta V$  la parte di  $V$  corrispondente alle montagne, si ha

$$(6) \quad E = \int_{\Delta V} \sum_{v,k} \beta_{v,k} \left( \frac{\partial r}{\partial x_v} \right) \left( \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Indichiamo con  $\delta V$  un volume variabile, relativamente piccolo e poniamo

$$(7) \quad I = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \sum_{v,k} \left( \frac{\partial r}{\partial x_v} \right) \left( \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

$I$  rappresenta il valore quadratico medio delle derivate e indica in certo modo l'intensità della orogenesi (ved. [19] e § 3 in [18]). A causa della non linearità delle equazioni differenziali in oggetto, la espressione [7] non è proporzionale alle dimensioni del frammento o delle sue parti; praticamente conviene considerare [7] come variante leggermente da un frammento all'altro e costante in uno stesso frammento, ciò che corrisponde alla nota equazione

$$(8) \quad \text{Val. ass. } |\text{grad. } r_{\text{sup.}}| = \text{Val. ass. } \left| i \frac{\partial r}{\partial x} + j \frac{\partial r}{\partial y} \right| = \text{cost}$$

di un corpo floscio,  $x$  e  $y$  sono le coordinate geografiche di  $r$  in superficie. Citando le equazioni (8), non vogliamo significare naturalmente che si può applicare alle montagne la meccanica della materia granulare, ma solo ricordare che il gradiente macroscopico (per alcune decine di chilometri) di  $r_{\text{sup.}}$

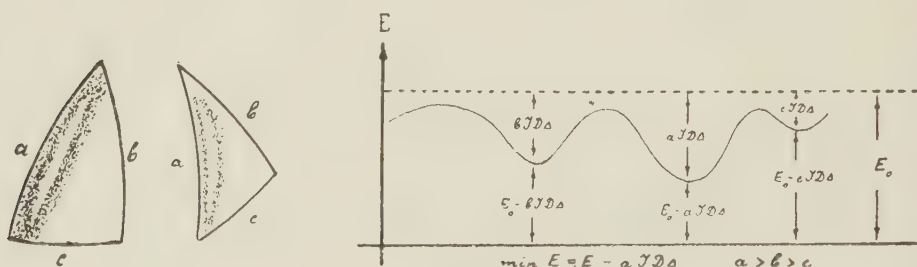


Fig. 8.

varia nelle regioni montagnose in limiti molto ristretti, malgrado la diversità dei valori del gradiente per alcune decine di metri.

Tornando al calcolo della energia, la espressione (6) può essere scritta nella forma

$$(9) \quad E \cong J \cdot F_m \cdot D$$

dove  $F_m$  e  $D$  sono la superficie delle montagne e lo spessore medio del frammento di crosta considerato. A sua volta,  $F_m$  può essere espresso, per semplicità, da

$$(10) \quad F_m \cong l \cdot \Delta,$$

in cui  $\Delta$  è la larghezza e  $l$  la lunghezza, della catena di montagne;  $\Delta$  può essere ritenuto poco variabile. Nel caso del continente triangolare della fig. 4, si possono avere le tre seguenti espressioni dell'energia

$$(11) \quad E = a ID\Delta; \quad \text{o} \quad E = b ID\Delta; \quad \text{o} \quad E = c ID\Delta.$$

Il risultato è rappresentato in fig. 8. È molto importante che i valori (11) siano sottratti (rappresentano per così dire la scarica di energia accumulata nello stato iniziale sollevato). Naturalmente, la posizione più probabile è quella per cui l'energia è minima (cioè  $c$ ).

6. Consideriamo un piegamento di un continente di forma triangolare in base alla teoria della semplice contrazione. Ammettiamo l'esistenza di forze di compressione, senza chiederci da dove vengono; tutte le formule da (2) a (11) sono ancora valide. Tuttavia l'analogia si ferma qui, perché, come risulta dalla fig. 9, le espressioni (11) si aggiungono in questo caso alla energia, perché nel par. 5 si trattava della scarica di una riserva di energia a causa di una caduta, mentre ora si ha una accumulazione di energia sotto l'azione di forze di compressione. Poiché l'energia sorpassa il livello  $E_0$  (crescendo), avrà naturalmente come valore più probabile il valore minimo, però esso non è più  $c$  (a causa della inversione della curva), ma  $a$ , e la configurazione corrispondente a  $a$  sarà più probabile.

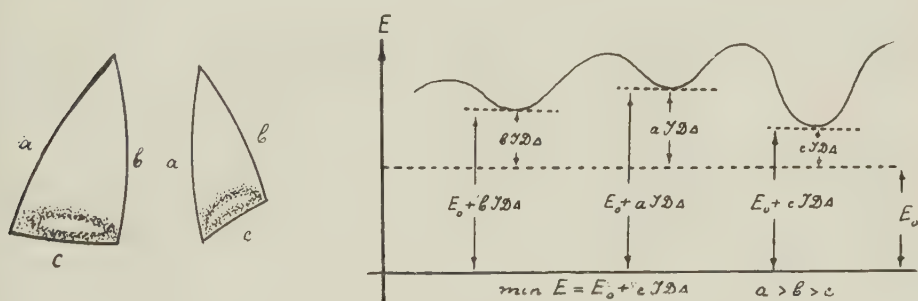


Fig. 9.

7. I corollari geografici dei risultati dei due precedenti paragrafi costituiscono un nuovo argomento a favore della nostra teoria [1] [12]. Infatti i nostri risultati conducono a stabilire che il piegamento principale deve essere disposto secondo il più lungo dei lati, mentre per la teoria della compressione dovrebbe accadere l'inverso. Il confronto con i dati geografici dovrebbe dare ragione all'una o all'altra teoria; che va naturalmente applicata solo ai grandi continenti.

Basta dare una occhiata ad un mappamondo per rispondere a questa domanda. Per varie ragioni bisogna eliminare l'Africa, poiché rappresenta diverse eccezioni: le pieghe mancano quasi completamente, poiché quelle dell'Atlante fanno parte più dell'Europa che dell'Africa; non è interamente isolata e le sue unioni all'Asia e all'Europa possono naturalmente modificare, fino a renderli irricognoscibili, i risultati della semplice teoria qui tracciata, ecc., ma fortunatamente degli altri sei continenti, tre (le due Americhe e l'Australia) posseggono una forma più o meno triangolare. Per i due primi la risposta è evidente: le pieghe sono situate secondo i lati più lunghi, ma anche per l'Australia, malgrado la sua forma irregolare e il fatto che alcune sue parti siano coperte dal mare, è più semplice ammettere che il lato più lungo del triangolo che essa forma va dal Capo York fino alla estremità sud della Tasmania; ora è proprio lungo questo lato che si stendono le pieghe principali.



Questi risultati non cambiano sensibilmente se in luogo dei continenti si considerano i contorni dei « blocchi continentali » [22] [11]. Nel caso dei blocchi, come nei casi prima considerati, sono i risultati della teoria della tensione primaria e non quelli dell'ipotesi della compressione che corrispondono alla realtà.

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] MATSCHINSKI M., *Sur l'origine des forces géodynamiques*. « Cahiers Géol. de Thoiry », n. 7, p. 59 (1951).
- [2] » *Stades de l'évolution du plissement sur un continent isolé*. Ibid., n. 10, p. 84 (1952).
- [3] » *Altitude moyenne des continents et forces géodynamiques*. « Rév. de Géomorph. dynamique », n. 4, p. 157 (1951).
- [4] » *La formation des continents et des forces géodynamiques*. « C.R. des Séances de l'Acad. des Sciences », t. 230, p. 1182 (1950).
- [5] » *Sur la distribution des volcans à la surface de la Terre*. Ibid., t. 233, p. 669 (1951).
- [6] » *Ressemblance des côtes atlantiques africaines et sud-américaines et développement du plissement d'un continent isolé*. Ibid., t. 233, p. 1653 (1951).
- [7] » *Densité linéaire des volcans sur l'arc volcanique et courbure de cet arc*. Ibid., t. 233, p. 1474 (1951).
- [8] » *Données numériques sur la distribution des volcans des bords de l'Océan Pacifique*. « Rév. de Géomorph. dynamique », n. 6, p. 276 (1951).
- [9] » *Distribution des volcans sur la surface de la Terre*. « C.R.S. de la Soc. Géol. de France », n. 11, p. 218 (1952). *Errata*, Ibid., n. 14, p. 314 (1952).
- [10] » *Sur les éruptions péleennes et hawaïennes*. Ibid., n. 16, p. 341 (1952).
- [11] » *Le critérium eulérien de la stabilité de blocs continentaux, critérium d'orogénèse*. « Proceedings of the Kon. Neder. Ak. van Wetensch. », sér. B, 55, n. 4, p. 411 (1952).
- [12] » *Relation entre l'altitude moyenne et la superficie des continents*. « C.R.S. de l'Acad. des Sciences », t. 233, p. 492 (1951).
- [13] NADAI, *Plasticity* (édit. amer. 1948, édit. allem. 1930).
- [14] GEIGER-SCHELL, *Handbuch der Physik*, Band 8, Berlin, Springer 1950.
- [15] SMOLUCHOWSKI, « Anzeiger d. Akad. d. Wiss. » Krakau, Math. Nath. Kl. 12 (1909).
- [16] ROSS GUNN, « Journ. of Franklin Institute », 224, 19 (1937); 236, 47 (1943); 236, 373 (1943); 237, 139 (1944).
- [17] ROSS GUNN, « Geophysics », 12, 378 (1947).
- [18] VENING MEINESZ, *The determination of the Earth's plasticity from the postglacial uplift in Scandinavia*. « Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. », Amsterdam 33, 6 (1930).
- [19] VENING MEINESZ, *Earth's crust deformations in Geosynclin*. « Proc. Kon. Ak. Wet. », 53, n. 1, 27 (1950).
- [20] MATSCHINSKI M., *Lois générales du relief terrestre*. « C.R.S. de l'Acad. des Sciences », t. 234, p. 1192 (1952).
- [21] PENCK, *Morphologie des Erdoberfläche*. Stuttgart (1894).
- [22] MATSCHINSKI M., *Les limites des blocs continentaux*. « C.R.S. de la Soc. Géol. de France », n. 7, p. 105 (1952).

**Fisica matematica.** — *Sulla rappresentazione del campo elettromagnetico in una guida d'onda a pareti assorbenti.* Nota di MARIALUISA DE SOCIO, presentata (\*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. È ben noto come un campo elettromagnetico, propagantesi in una guida d'onda limitata da conduttori perfetti, può suppersi dovuto alla sovrapposizione di alcune onde piane ordinarie, che subiscono successive riflessioni sulle pareti della guida stessa.

In questa Nota ci proponiamo di verificare che analoga proprietà vale per le guide a pareti assorbenti. Studieremo un caso particolare per evitare lunghi calcoli ed ipotesi semplificatrici (1) sul comportamento delle pareti della guida; è però probabile che i risultati ottenuti abbiano carattere generale.

Consideriamo l'intercapedine, riempita da un dielettrico omogeneo, fra due conduttori a forma di semispazio, limitati da piani paralleli; l'intercapedine si potrà pensare come una guida particolare per un campo elettromagnetico che si propaga in una direzione parallela a quei piani. *Dimostriamo che il campo può rappresentarsi con due onde piane sovrapposte di cui una può interpretarsi come la riflessa dell'altra sulle pareti dell'intercapedine; è però opportuno notare che tali onde non sono ordinarie, ma evanescenti* (2).

2. Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxyz$  e detti al solito  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  i versori lungo questi tre assi, supponiamo che i piani che limitano la guida abbiano equazione  $y = -d$ ,  $y = d$ . Siano  $\epsilon$  e  $\mu$  rispettivamente la costante dielettrica e la permeabilità magnetica nel dielettrico,  $\gamma$  e ancora  $\mu$  la conduttività e la permeabilità del mezzo conduttore; porremo, al solito,  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ . Nella guida si propaghi, nella direzione dell'asse  $z$ , un modo TM (agli stessi risultati si giungerebbe considerando un modo TE), cioè un campo elettromagnetico  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  con componente di  $\mathbf{H}$  lungo l'asse  $z$  nulla. Il campo, per ipotesi sinusoidale, dipenderà allora da  $z$  e dal tempo  $t$  secondo il fattore  $\exp\left(j\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right)$  (3), dove  $\omega$  è la pulsazione,  $v$  una costante di noto significato fisico,  $j$  l'unità immaginaria.

(\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) Ricordiamo, ad esempio, l'ipotesi avanzata dallo Schelkunoff e da altri autori, che stabilisce una relazione fra le componenti tangenziali del campo elettrico e del campo magnetico alla superficie dei conduttori.

(2) G. TORALDO DI FRANCA, *Onde elettromagnetiche*. Zanichelli, Bologna 1953, Cap. VII, § 19-20.

(3) Per comodità tipografiche useremo sempre il simbolo  $\exp(z)$  in luogo di  $e^z$ .

Nelle nostre ipotesi, le relazioni <sup>(4)</sup> fra le componenti trasversali del campo elettromagnetico ed  $E_z$ , nell'intercapedine si riducono a:

$$(1) \quad k^2 E_x = 0 \quad k^2 E_y = -j \frac{\omega}{v} \frac{dE_z}{dy} \quad k^2 H_x = \varepsilon j \omega \frac{dE_z}{dy} \quad k^2 H_y = 0.$$

Si ha poi, posto  $k^2 = \varepsilon \mu \omega^2 - \omega^2/v^2$ :

$$(2) \quad \frac{d^2 E_z}{dy^2} + k^2 E_z = 0.$$

Nei conduttori, supposte trascurabili le correnti di spostamento rispetto a quelle di conduzione, sussistono le stesse relazioni (1) salvo che in luogo di  $\varepsilon j \omega$  si deve porre  $\gamma$  ed in luogo di  $k^2$  il numero  $h^2 = -j \gamma \mu \omega - \omega^2/v^2$ .

È bene notare, prima di proseguire, che è  $k^2 \neq h^2$  e che sia  $k^2$  che  $h^2$  non possono essere nulle, altrimenti il campo elettromagnetico sarebbe ovunque nullo. Infatti, supposto dapprima  $h^2 = 0$ , dalla relazione (2), in cui si dovrebbe sostituire  $k^2$  con  $h^2$ , a sua volta nulla, si otterrebbe  $E_z$  funzione lineare di  $y$  nei semispazi  $y > d$ ,  $y < -d$ ; ma, dovendo  $E_z$  annullarsi per  $y = \pm \infty$ , dovrà essere allora  $E_z$  identicamente nulla. Poiché anche le altre componenti del campo elettromagnetico soddisfano ad equazioni del tipo (2) (con  $h^2 = 0$ ) si avrebbe intanto identicamente nullo il campo nei conduttori e, per la continuità delle componenti tangenziali del campo elettromagnetico, in particolare di  $E_x$  ed  $H_x$ , sui piani  $y = \pm d$ , dalle (1) risulterebbe:  $E_z = dE_z/dy = 0$  e perciò, per le (1) e (2),  $E_z$  e tutte le altre componenti del campo elettromagnetico identicamente nulle anche nell'intercapedine.

Se fosse invece  $k^2 = 0$ , risulterebbe  $\omega/v = \omega/\sqrt{\varepsilon \mu}$ , ossia  $\omega/v$  reale e quindi il campo non subirebbe assorbimento, cioè i flussi medi del vettore di Poynting su due piani indefiniti perpendicolari all'asse  $z$  dovrebbero essere uguali; ma ciò è possibile solo se il calore di Joule sviluppato fra i due piani è nullo, cioè se il campo entro i conduttori è nullo. Allora ragionando come poco fa, tenendo anche presente che  $E_y$  e  $H_x$  soddisfano la (2), risulterebbe nullo anche il campo nell'intercapedine.

Concludendo:  $k^2$  ed  $h^2$  devono essere, come si è affermato, diversi da zero; è perciò lecito nelle (1) dividere per  $k^2$  o  $h^2$ .

Da quanto si è detto risulta anche che  $\omega/v$  è complessa.

Allora, risolvendo la (2), si ha, nell'intercapedine:

$$E_z = [D_1 \exp(jky) + D_2 \exp(-jky)] \exp\left(j\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right)$$

dove  $D_1$  e  $D_2$  sono due costanti. Da questa e dalle relazioni (1) si ha

$$(3) \quad \mathbf{E} = \left[ \left( \frac{\omega}{vk} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) D_1 \exp(jky) + \left( -\frac{\omega}{vk} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) D_2 \exp(-jky) \right] \exp\left(j\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right)$$

$$(4) \quad \mathbf{H} = \frac{\varepsilon \omega}{k} [-D_1 \exp(jky) + D_2 \exp(-jky)] \exp\left(j\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right) \mathbf{i}.$$

(4) D. GRAFFI, *Le guide d'onda*. « Rendiconto del Seminario matematico e fisico di Milano », vol. XXI, 1950.

Nell'interno del conduttore che occupa il semispazio  $y > d$  valgono le stesse formule (3) e (4), ove però in luogo di  $\varepsilon j \omega$  si deve porre  $\gamma$ , e in luogo di  $k$ ,  $h$ ; la radice di  $h^2$  si sceglierà in modo che la sua parte immaginaria risulti negativa. Allora nel semispazio  $y < -d$  deve essere nullo il coefficiente di  $\exp(-jhy)$ , perché il campo si annulla per  $y \rightarrow -\infty$ ; analogamente nel semispazio  $y > d$  deve essere nullo il coefficiente di  $\exp(jhy)$ . Si ha così, introducendo nuove costanti  $C_1, C_2$ : per  $y < -d$ :

$$(3') \quad \mathbf{E} = C_1 \left( \frac{\omega}{v h} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \exp \left( j h y + j \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right)$$

$$(4') \quad \mathbf{H} = j \frac{\gamma}{h} C_1 \exp \left( j h y + j \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right) \mathbf{i}$$

e, in modo analogo, per  $y > d$ :

$$(3'') \quad \mathbf{E} = C_2 \left( -\frac{\omega}{v h} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \exp \left( -j h y + j \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right)$$

$$(4'') \quad \mathbf{H} = -j \frac{\gamma}{h} C_2 \exp \left( -j h y + j \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right) \mathbf{i}$$

Dalle condizioni di continuità delle componenti tangenziali del campo elettromagnetico sui piani  $y = \pm d$ , si ha il sistema:

$$(5) \quad \begin{cases} D_1 \exp(jkd) + D_2 \exp(-jkd) = C_2 \exp(-jhd) \\ D_1 \exp(-jkd) + D_2 \exp(jkd) = C_1 \exp(-jhd) \\ -\frac{\varepsilon \omega}{k} (D_1 \exp(jkd) - D_2 \exp(-jkd)) = -j \frac{\gamma}{h} C_2 \exp(-jhd) \\ -\frac{\varepsilon \omega}{k} (D_1 \exp(-jkd) - D_2 \exp(jkd)) = j \frac{\gamma}{h} C_1 \exp(-jkd) \end{cases}$$

da cui, eliminando  $C_1$  e  $C_2$ , si ottiene:

$$(5') \quad \begin{cases} D_1 (\varepsilon \omega h - j \gamma k) \exp(jkd) - D_2 (\varepsilon \omega h + j \gamma k) \exp(-jkd) = 0 \\ D_1 (\varepsilon \omega h + j \gamma k) \exp(-jkd) + D_2 (\varepsilon \omega h - j \gamma k) \exp(jkd) = 0 \end{cases}$$

sistema omogeneo nelle due incognite  $D_1$  e  $D_2$  non entrambe nulle. Dovrà essere allora nullo il determinante dei suoi coefficienti, si ottiene così l'equazione:

$$(6) \quad \exp(4jkd) = \left( \frac{\varepsilon \omega h + j \gamma k}{\varepsilon \omega h - j \gamma k} \right)^2$$

che, ricordando la relazione  $h^2 = k^2 - j \gamma \mu \omega - \varepsilon \mu \omega^2$ , si riduce a:

$$(6') \quad \exp(2jkd) = \pm \frac{1 - j \frac{\varepsilon \omega}{\gamma} \frac{h}{k}}{1 + j \frac{\varepsilon \omega}{\gamma} \frac{h}{k}} = \pm \frac{1 - j \frac{\varepsilon \omega}{\gamma} \sqrt{1 - j \frac{\gamma \mu \omega}{k^2} - \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{k^2}}}{1 + j \frac{\varepsilon \omega}{\gamma} \sqrt{1 - j \frac{\gamma \mu \omega}{k^2} - \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{k^2}}}$$

equazione che determina la costante  $k$  e di conseguenza  $h$  e  $v$  e quindi il campo elettromagnetico a meno di una costante moltiplicativa.



3. La risoluzione della (6') è nel caso generale assai complessa; nei casi concreti però è risolubile in via approssimata.

Supposto, per fissare le idee, il conduttore di rame e nell'intercapedine il vuoto, potremo scrivere, usando unità Giorgi:  $\gamma = \frac{1}{1,7} \cdot 10^8$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ ,  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ .

Assumiamo poi  $2d = 0,1$  m, sicché se la parete fosse perfettamente conduttrice si avrebbe la pulsazione critica  $\omega_c = \frac{\pi c}{2d} = 3\pi \cdot 10^9$ . Consideriamo perciò un'onda di pulsazione  $\omega$  almeno dell'ordine di  $10^{10}$ .

Ora, se il conduttore fosse perfetto ( $\gamma = \infty$ ), il parametro adimensionale  $\varepsilon\omega/\gamma$  sarebbe nullo e  $k$  avrebbe il valore  $k_0 = \frac{n\pi}{2d}$  con  $n$  intero pari o dispari a seconda che nell'ultimo membro di (6') si sceglie il segno positivo o negativo. Nel nostro caso si ha invece  $\varepsilon\omega/\gamma$  dell'ordine di  $10^{-8}$ , ossia molto piccolo, potremo perciò supporre che la correzione  $k'$  di  $k_0$ , dovuta al fatto che  $\gamma$  è finita, sia abbastanza piccola da non commettere sensibile errore se allo ultimo membro di (6') si pone  $k = k_0 = \frac{n\pi}{2d}$  (5).

Si ha allora, con sufficiente approssimazione, notando che il radicando di (6') si riduce a:  $-j \frac{4\gamma\mu\omega d^2}{n^2\pi^2}$  (6) e che  $\exp(2jk_0d) = \pm 1$  (il doppio segno è in accordo col doppio segno all'ultimo membro di (6')):

$$\exp(2jk'd) = \frac{1 - j2 \sqrt{\frac{\varepsilon\omega}{\gamma}} \frac{\omega d}{n\pi c} \sqrt{-j}}{1 + j2 \sqrt{\frac{\varepsilon\omega}{\gamma}} \frac{\omega d}{n\pi c} \sqrt{-j}}.$$

Prendendo i logaritmi di ambo i membri di questa equazione (meglio quel logaritmo che si annulla per  $\gamma = \infty$ ) e osservando che il termine  $\frac{\omega d}{n\pi c} \sqrt{\frac{\varepsilon\omega}{\gamma}}$  è abbastanza piccolo da poterne trascurare i quadrati e le potenze superiori si ha, scegliendo per  $\sqrt{-j}$ , per quanto si è detto, il valore  $\frac{1-j}{\sqrt{2}}$ :

$$(7) \quad k' = - \sqrt{\frac{2\varepsilon\omega}{\gamma}} \frac{\omega}{n\pi c} (1-j)$$

cioè la soluzione approssimata di (6') è:  $k = k_0 + k'$ .

È da notare che trascurando  $k'$  rispetto a  $k_0$  si commette un errore dell'ordine di  $\sqrt{\frac{\varepsilon\omega}{\gamma}}$ , cioè  $k$  differisce da  $k_0$  per quantità molto piccole.

(5) In sostanza risolviamo le (6') con un metodo di approssimazioni successive di cui non sarebbe difficile dimostrare la convergenza.

(6) La radice di questa espressione, uguale a  $\sqrt{\frac{\hbar^2}{k_0^2}}$  con  $k_0^2$  positivo, deve scegliersi, come la radice di  $\hbar^2$ , con parte immaginaria negativa.

4. Riprendiamo il sistema (5'); fissato un valore di  $k$  soluzione di (6'), dalla prima equazione si ha, indicando con  $D$  un'altra costante:

$$D_1 = \frac{D}{h\varepsilon\omega - j\gamma k} \exp(-jk d) \quad D_2 = \frac{D}{h\varepsilon\omega + j\gamma k} \exp(jk d).$$

Perciò il campo magnetico del modo corrispondente al fissato valore di  $k$  vale, mettendo in evidenza ad esponente il fattore  $-j\frac{\omega}{c}$

$$(3^*) \quad \mathbf{H} = \left[ \frac{-D}{h\varepsilon\omega - j\gamma k} \exp\left(-j\frac{\omega}{c} \left[ \frac{c}{v} z - \frac{kc}{\omega} (y-d) \right] + j\omega t \right) + \right. \\ \left. + \frac{D}{h\varepsilon\omega + j\gamma k} \exp\left(-j\frac{\omega}{c} \left[ \frac{c}{v} z + \frac{kc}{\omega} (y-d) \right] + j\omega t \right) \right] \frac{\varepsilon\omega}{k} \cdot \mathbf{i}$$

e analoga formula vale per il campo elettrico, salvo che i coefficienti dei due esponenziali sono rispettivamente:

$$\frac{D}{h\varepsilon\omega - j\gamma k} \left( \frac{\omega}{vk} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \quad , \quad \frac{D}{h\varepsilon\omega + j\gamma k} \left( -\frac{\omega}{vk} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right).$$

Ora, ricordando l'espressione di  $k$ , si ha:

$$(8) \quad \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{c^2}{v^2} = 1.$$

Perciò il campo elettromagnetico nella guida risulta, formalmente, dalla sovrapposizione di due onde piane che si propagano con velocità  $c$  nella direzione definita rispettivamente dai coseni:  $\left(0, \frac{kc}{\omega}, \frac{c}{v}\right)$ ,  $\left(0, -\frac{kc}{\omega}, \frac{c}{v}\right)$ ; le diremo rispettivamente prima e seconda onda. I coseni direttori di queste onde sono però complessi, perché tali sono  $k$  e  $v$ , le due onde non sono perciò di tipo ordinario, ma evanescenti come si è detto in principio.

5. Per meglio conoscere la natura di queste onde poniamo:

$$(9) \quad \frac{kc}{\omega} = \alpha - j\beta \quad \frac{c}{v} = \rho - j\nu$$

con  $\rho, \nu, \alpha, \beta$  reali. Abbiamo subito, sostituendo nella (8) e separando la parte reale dalla immaginaria:

$$(8') \quad \alpha^2 + \rho^2 - (\beta^2 + \nu^2) = 1 \quad \alpha\beta + \rho\nu = 0.$$

È allora facile verificare che i piani di ugual fase della 1<sup>a</sup> onda sono perpendicolari alle rette di coseni direttori  $\left(0, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \rho^2}}, \frac{\rho}{\sqrt{\alpha^2 + \rho^2}}\right)$ , quelli della 2<sup>a</sup> onda alle rette di coseni direttori  $\left(0, -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \rho^2}}, \frac{\rho}{\sqrt{\alpha^2 + \rho^2}}\right)$  e pertanto tali direzioni sono quelle di propagazione delle due onde. La velocità di fase, uguale per le due onde, vale  $\frac{c}{\sqrt{\alpha^2 + \rho^2}}$ . Dunque se una delle due onde forma un

angolo acuto con l'asse  $y$ , l'altra forma l'angolo ottuso supplementare, cioè se l'una nella sua propagazione va verso la parete  $y=d$ , l'altra va nel verso opposto.

Osserviamo ancora che in  $y > d$  e in  $y < -d$ , cioè nei conduttori, si ha, come è facile vedere, una sola onda da classificare fra le onde evanescenti,

Tornando alle onde nell'intercapedine, supponiamo, per fissare le idee, che la 1<sup>a</sup> onda si propaghi verso la parete  $y = d$ ; è facile vedere che la 2<sup>a</sup> onda e l'onda presente nel semispazio  $y > d$  costituiscono rispettivamente l'onda riflessa e l'onda rifratta della 1<sup>a</sup> nel piano  $y = d$ . Basta a questo scopo osservare che la somma dei campi dell'onda incidente e dell'onda riflessa ha, per le prime equazioni di (5), le stesse componenti dell'onda rifratta sul piano  $y = d$ . Poiché analoghe considerazioni possono farsi sul piano  $y = -d$ , si ha, come si è detto in principio, che la guida è percorsa da due onde piane evanescenti di cui una è la riflessa dell'altra sulle pareti della guida stessa.

Riprendendo le formule (9), è bene notare che  $\beta$  si riduce alla parte immaginaria di  $k'$  moltiplicata per  $c/\omega$ , cioè  $\beta = \frac{\sqrt{2}}{n\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon\omega}{\gamma}}$ , quantità di cui si può trascurare il quadrato. Poiché la 2<sup>a</sup> equazione di (8'), se  $\rho$  non è molto piccola (cioè se  $\omega$  non è molto vicina alla frequenza critica),  $\nu$  è dell'ordine di  $\beta$ , si ha che anche  $\nu^2$  è trascurabile e quindi, in prima approssimazione:  $\alpha^2 + \rho^2 = 1$  e la velocità di fase è ancora  $c$ , velocità delle onde libere.

6. Non sarà inutile da ultimo osservare che le onde evanescenti nella loro propagazione non vengono assorbite, perciò l'attenuazione del campo elettromagnetico propagantesi lungo l'asse  $z$  sarà dovuta alla perdita per riflessione delle onde evanescenti che lo rappresentano.

A riprova di quanto si è ora affermato consideriamo 2 punti  $P_1, P_2$  sull'asse delle  $z$  e a distanza tale che i raggi che rappresentano le due onde e partono da  $P_1$  si ricongiungano in  $P_2$  dopo una riflessione su una delle pareti della guida. La distanza  $l$  tra  $P_1$  e  $P_2$  vale  $2d$  per la cotangente dell'angolo fra il raggio e l'asse  $z$ . Poiché come è facile vedere questa cotangente vale  $\rho/\alpha$ , si ha  $l = \frac{2d\rho}{\alpha}$ .

Ora dalle formule (3) e (4) si ha per l'attenuazione del campo nel passaggio da  $P_1$  a  $P_2$ , ricordando la 2<sup>a</sup> di (8'):

$$\begin{aligned} A &= \left| \exp \left( -j \frac{\omega}{c} \frac{2d\rho}{\alpha} \right) \right| = \left| \exp \left( -j \frac{\omega}{c} (\rho - j\nu) \frac{2d\rho}{\alpha} \right) \right| = \\ &= \left| \exp \frac{2\omega}{c} \beta d \right| = \left| \exp (-2jk d) \right| = \left| \frac{h\varepsilon\omega - j\gamma k}{h\varepsilon\omega - j\gamma k} \right|. \end{aligned}$$

D'altra parte l'attenuazione di un'onda per riflessione sulle pareti vale il modulo del rapporto fra l'ampiezza di una componente del campo elettrico o magnetico sulla parete stessa, rapporto che, come è facile verificare, è nel nostro caso uguale per tutte quelle componenti. Riferendoci per brevità al campo magnetico, sempre diretto secondo  $z$ , tale rapporto vale, sul piano  $y = d$  ove i due esponenti coincidono,  $A = \left| \frac{h\varepsilon\omega - j\gamma k}{h\varepsilon\omega + j\gamma k} \right|$  e, come è ovvio e come si verifica con un semplice calcolo (tenendo presente (6)) è pure identico l'assorbimento sul piano  $y = -d$ . Dunque l'attenuazione del campo nella propagazione da  $P_1$  a  $P_2$  coincide con questo assorbimento sulle pareti delle onde che lo rappresentano, conforme a quanto abbiamo affermato poco fa.

**Chimica.** — *Spettro ultrarosso dell'N-metilpirrolo* (\*). Nota di PAOLO MIRONE e ANNA MARIA DRUSIANI, presentata (\*\*) dal Socio G. B. BONINO.

Argomento della presente Nota è l'indagine dello spettro d'assorbimento ultrarosso dell'N-metilpirrolo e il suo confronto con lo spettro Raman dello stesso composto, studiato nel 1934 da Bonino e Collaboratori (1), e con gli spettri Raman e ultrarossi del pirrolo.

L'apparecchio impiegato per queste esperienze era uno spettrofotometro Beckman IR2 a registrazione diretta, con monocromatore a prisma in LiF per la zona da 2 a  $5\mu$ , e monocromatore a prisma in NaCl per la zona da 5 a  $15\mu$ . La larghezza della fenditura veniva regolata automaticamente durante le registrazioni, e assumeva i seguenti valori.

$$a\ 3\mu = 0,13\text{ mm. } (14\text{ cm}^{-1})$$

$$5\text{ »} = 0,33\text{ » } (7\text{ »})$$

$$6\text{ »} = 0,15\text{ » } (14\text{ »})$$

$$10\text{ »} = 0,43\text{ » } (9\text{ »})$$

$$15\text{ »} = 1,40\text{ » } (8\text{ »})$$

L'N-metilpirrolo è stato preparato da uno di noi (A. M. Drusiani) nel Laboratorio di Chimica Organica di questo Istituto, secondo il metodo di K. Hesse, F. Wissing («B», 47, 1422 (1914); vedi anche B. Oddo, «B.», 47, 2428, 2430 (1914)) basato sull'azione dello joduro di metile sul pirrolato di potassio.

Esso veniva distillato a pressione ridotta e subito dopo veniva esaminato allo spettrofotometro in una cella dello spessore di 0,05 mm.

La tabella I raccoglie i dati relativi ai massimi d'assorbimento osservati da noi e alle righe Raman osservate da Bonino e collaboratori.

**DISCUSSIONE.** — Mentre la molecola del pirrolo appartiene molto probabilmente al gruppo di simmetria  $C_{2v}$ , la molecola dell'N-metilpirrolo, a cagione della presenza del gruppo metilico, può possedere al massimo una simmetria di grado  $C_s$ . Dovremo perciò attenderci, in base alle regole di selezione, una completa corrispondenza tra spettro Raman e spettro ultrarosso.

(\*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi di Chimica-fisica del C.N.R. nell'Istituto Chimico «G. Ciamician» dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) G. B. BONINO, R. MANZONI ANSIDEI e P. PRATESI, «Z. phys. Chem.» (B), 25, 348 (1934).



TABELLA I.

Spettro ultrarosso (sp. = 0,05 mm.)			Spettro Raman (1)
$\lambda$ ( $\mu$ )	$\nu$ (cm $^{-1}$ )	I	$\nu$ (cm $^{-1}$ )
—	—	—	3130 (3)
3,238	3088	2	3103 (2)
3,266	3062	2	—
3,296	3034	9	—
3,395	2945	9	2942 (2)
3,420	2924		—
3,556	2812	2	2819 (1)
3,651	2739	2	—
3,863	2589	1/2	—
4,041	2475	1/2	—
5,14	1945	2	—
5,38	1859	1 $\frac{1}{2}$	—
5,54	1805	1 $\frac{1}{2}$	—
5,76	1736	1/2	—
5,84	1712	1/2	—
5,98	1672	1	—
6,24	1603	5	—
6,63	1508	9	1504 (3)
6,69	1494		—
6,85	1460	5	—
7,05	1418	7	1415 (1 $\frac{1}{2}$ )
7,25	1379	4	1380 (7)
7,51	1331	2	—
7,75	1290	9	1283 (6)
8,11	1233	0	—
8,25	1212	1/2	—
8,47	1181	1 $\frac{1}{2}$	—
9,17	1091	9	1084 (4)
9,42	1061	4	1054 (4)
9,57	1045	4	—
9,69	1032	4	—
10,31	970	7	962 (3)
11,14	898	1 $\frac{1}{2}$	—
—	—	—	868 (2)
12,24	817	1 $\frac{1}{2}$	813 (1 $\frac{1}{2}$ )
12,96	772	2	—
13,7	730	10 (*)	—
14,37	696	9 (*)	688 (1 $\frac{1}{2}$ )
			660 (3 $\frac{1}{2}$ )
			607 (1)
			354 (1 $\frac{1}{2}$ )

(\*) sp. 0,01 mm.

Un primo esame della fig. 1, che permette un confronto immediato dei due spettri, può far nascere qualche obiezione riguardo a questa corrispondenza; tra l'altro, lo spettro ultrarosso è molto più ricco di frequenze dello spettro Raman. A questo proposito bisogna però notare che l'osservazione dello spettro ultrarosso è stata eseguita su un campione di spessore piuttosto forte; questa circostanza può aver causato la comparsa di numerose frequenze, che in Raman potrebbero eventualmente apparire solo dopo pose più lunghe. Inoltre è facile notare che le frequenze Raman si ritrovano tutte nello spettro ultrarosso; fa eccezione la 3130, mentre la 868 si ritrova spostata di una trentina di numeri d'onda. D'altra parte le più intense frequenze

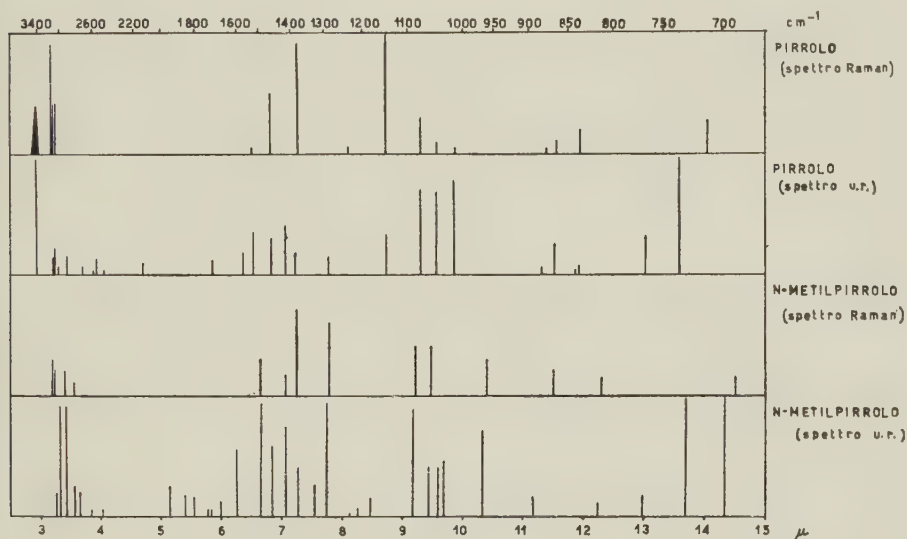


Fig. 1.

ultrarosse si ritrovano nello spettro Raman; la sola eccezione è costituita proprio dalla banda più intensa dello spettro, quella a  $730\text{ cm}^{-1}$ . Ci sembra pertanto di poter asserire che vi sia una soddisfacente corrispondenza tra spettro Raman e spettro ultrarosso dell'*N*-metilpirrolo.

Cerchiamo ora di stabilire innanzitutto quali frequenze siano riferibili alle oscillazioni interne del gruppo  $-\text{CH}_3$ . Alle oscillazioni di valenza possiamo senz'altro attribuire le intense bande a  $3034$  e a  $2945\text{--}2924\text{ cm}^{-1}$ . Questa assegnazione è resa più plausibile dal fatto che numerose molecole contenenti un gruppo metilico presentano frequenze molto vicine a queste; per esempio, l'azoturo di metile  $\text{CH}_3\text{--N} \begin{smallmatrix} \diagup \text{N} \\ \parallel \\ \diagdown \text{N} \end{smallmatrix}$  presenta due bande a  $3003$  e a

$2933\text{ cm}^{-1}$ , che sono state assegnate rispettivamente alle oscillazioni anti-simmetrica e simmetrica di valenza del gruppo  $-\text{CH}_3$ . Il doppietto assai intenso a  $1508\text{--}1494\text{ cm}^{-1}$ , che in Raman si trova, non risolto, a  $1504\text{ cm}^{-1}$ , si può d'altra parte attribuire a una delle oscillazioni di deformazione del

gruppo  $-\text{CH}_3$ . Infatti questa frequenza non trova riscontro né nello spettro Raman né nello spettro ultrarosso del pirrolo; inoltre l'azoturo di metile presenta una banda a  $1481\text{ cm}^{-1}$ , assegnata appunto a una oscillazione di deformazione del gruppo metilico <sup>(2)</sup>. Anche la banda a  $1331\text{ cm}^{-1}$ , che manca negli spettri del pirrolo, può essere attribuita a una oscillazione di deformazione del metile.

Per quanto riguarda le frequenze da assegnarsi alle oscillazioni proprie

del gruppo  $\begin{array}{c} \text{HC} \text{---} \text{CH} \\ \parallel \quad \parallel \\ \text{HC} \text{---} \text{N} \text{---} \text{CH} \end{array}$ , le due righe Raman a  $3130$  e a  $3103\text{ cm}^{-1}$  e pro-

tabilmente la banda ultrarossa a  $3062\text{ cm}^{-1}$  sono dovute alle diverse possibili oscillazioni di valenza dei gruppi CH. Nella regione spettrale al di là di  $6\text{ }\mu$  si riscontrano poi, come risulta da fig. 1, numerose coincidenze tra frequenze dell'*N*-metilpirrolo e frequenze del pirrolo. Raccogliamo in tabella II tali coincidenze, riportando anche le assegnazioni fatte da Lord e Miller <sup>(3)</sup> per il pirrolo.

TABELLA II

<i>N</i> -metilpirrolo ( $\text{cm}^{-1}$ )	Pirrolo (3) ( $\text{cm}^{-1}$ )	Assegnazione
1460 (5)	1466 <i>f</i>	<i>s-v</i> nucleo
1418 (7)	1418 <i>f</i>	<i>a-v</i> nucleo
1379 (4)	1384 <i>m</i>	<i>s-v</i> nucleo
1290 (9)	1289 <i>m</i>	armonica ( $2 \times 647$ )
1233 (0)	[1237 (1/2)]	<i>s-d</i> CH
1091 (9)	1076 <i>ff</i>	<i>s-d</i> CH
1061 (4)	1047 <i>ff</i>	<i>a-d</i> CH
[868 (2)]	[866 (1)]	<i>a-d'</i> CH
772 (2)	768 <i>f</i>	<i>s-d'</i> CH
730 (10)	736 <i>ff</i>	—
[660 ( $3\frac{1}{2}$ )]	[647 (3)]	<i>a-d</i> nucleo
[607 (1)]	[618 (0)]	combinazione (1384-768)

[ ] : frequenza Raman

*s* : simmetrica

*a* : antisimmetrica

*v* : oscillazione di valenza

*d* : oscillazione di deformazione (nel piano della molecola)

*d'* : oscillazione di deformazione (normalmente al piano della molecola).

(2) H. M. RANDALL, R. G. FOWLER, N. FUSON e J. R. DANGL, *Infrared determination of organic structures*. New York 1949.

(3) R. C. LORD e F. A. MILLER, « J. Chem. Phys. », 10, 328 (1942).

Le assegnazioni della tabella ci sembrano plausibili anche per l'N-metilpirrolo, ecettuata quella relativa alla banda a  $1290\text{ cm}^{-1}$ , che ben difficilmente può essere un'armonica, sia per la sua grande intensità, sia perché nello spettro dell'N-metilpirrolo mancano frequenze intorno a  $640\text{--}650\text{ cm}^{-1}$ . La  $607$  potrebbe essere dovuta, per analogia col pirrolo, alla combinazione  $1379\text{--}772$ .

Nello spettro dell'N-metilpirrolo ci si dovrebbe attendere una completa assenza delle tre frequenze proprie del gruppo NH, a  $3400$ ,  $1146$  e  $565\text{ cm}^{-1}$  <sup>(3)</sup>. Le ultime due infatti mancano, la prima invece compare nei nostri spettri come un debolissimo doppietto a  $3407\text{--}3447\text{ cm}^{-1}$ . Dato che il pirrolo in soluzione presenta uno sdoppiamento della banda a  $3400\text{ cm}^{-1}$  <sup>(4)</sup>, riteniamo che il doppietto in questione sia dovuto a qualche traccia di pirrolo contenuto nei campioni di N-metilpirrolo da noi esaminati. Per tale ragione abbiamo escluso il doppietto a  $3407\text{--}3447\text{ cm}^{-1}$  dalla tabella I. Abbiamo pure escluso due bande debolissime che si osservano a  $1536$  e a  $1019\text{ cm}^{-1}$ , e che corrispondono strettamente a due bande molto intense del pirrolo ( $1531$  e  $1015\text{ cm}^{-1}$ ). È da notare che quando si riduce lo spessore della cella da  $0,05$  a  $0,01\text{ mm.}$ , il doppietto a  $3407\text{--}3447\text{ cm}^{-1}$  e le bande a  $1536$  e a  $1019\text{ cm}^{-1}$  scompaiono del tutto.

In conclusione ci sembra che, in base alle numerose concordanze esistenti tra gli spettri dell'N-metilpirrolo da una parte e quelli del pirrolo dall'altra, si possa ragionevolmente supporre che la sostituzione del gruppo metilico all'idrogeno imminico non perturbi profondamente l'intima struttura del nucleo pentaatomico pirrolico. L'unica caratteristica piuttosto singolare dello spettro ultrarosso dell'N-metilpirrolo è costituita dalla banda intensa a  $1603\text{ cm}^{-1}$ . Tale frequenza può essere forse messa in relazione con la banda a  $1531\text{ cm}^{-1}$  del pirrolo, la quale è stata assegnata da Lord e Miller a una oscillazione antisimmetrica di valenza del nucleo. Però, dato che le altre frequenze nucleari del pirrolo si ritrovano pochissimo spostate negli spettri dell'N-metilpirrolo, questa ipotesi non ci sembra molto plausibile.

Lo spettro di assorbimento dell'N-metilpirrolo è stato studiato anche nell'ultravioletto da Milazzo sulla sostanza allo stato di vapore <sup>(5)</sup>. Per quanto riguarda la banda relativa al secondo salto elettronico, che compare tra  $2170$  e  $2080\text{ Å}$ , si hanno anche qui grandi analogie con la corrispondente banda nello spettro del pirrolo non sostituito; la banda relativa al primo salto elettronico, che per l'N-metilpirrolo si trova tra  $2600$  e  $2250\text{ Å}$ , è invece proibita nello spettro del pirrolo. Le frequenze di oscillazione per l'N-metilpirrolo nello stato fondamentale, usate da Milazzo per l'interpretazione dello spettro ultravioletto, sono in buon accordo, oltre che con le frequenze Raman, anche con quelle ultrarosse.

Ringraziamo vivamente il prof. G. B. Bonino per gli utili suggerimenti e consigli fornitici, e per averci messo a disposizione i mezzi sperimentali necessari per questa ricerca.

(4) P. MIRONE, « Rend. Accad. Lincei », VIII, II, 365 (1951).

(5) G. MILAZZO, « Gazz. Chim. It. », 74, 152 (1944).



**Chimica fisica.** — *Cristallografia differenziale delle polveri.* — *Analisi di polveri cristalline eterogenee.* — *Esami differenziali di secondo ordine* (\*). Nota III di RICCARDO FERRO, presentata (\*\*) dal Socio L. ROLLA.

Nella Nota precedente è stata studiata la possibilità di determinare le costanti cristallografiche dai fotogrammi delle polveri usando un metodo differenziale. Adoperando lo stesso simbolismo precedentemente introdotto verranno tentate ora alcune generalizzazioni dei metodi suddetti.

a) ANALISI DI POLVERI CRISTALLINE NON OMOGENEE.

Si abbiano, come si è accennato nella Nota I <sup>(1)</sup>, due film ottenuti a diverse temperature sulla medesima sostanza eterogenea. Il confronto, fatto nel modo descritto nella Nota II <sup>(2)</sup>, tra i  $q = \sin^2 \theta$  delle righe che si corrispondono su i due film, suggerisce la possibilità di eseguire un'analisi della sostanza.

Per analisi si intende qui l'esecuzione delle seguenti operazioni:

1° Discriminazione e riconoscimento delle riflessioni Debye appartenenti a ciascuna fase.

2° Determinazione delle costanti cristallografiche di ciascuna fase. Le operazioni 1° e 2° non sembra che possano sempre susseguirsi nell'ordine indicato.

A) *Primo caso. Miscela di sostanze cubiche.*

Il calcolo dei  $\Delta q/q$  per le varie righe che si corrispondono sui due film porterà a valori relativi a ciascuna fase (un singolo valore per ogni fase presente) ben distinti l'uno dagli altri: In questo caso cioè non c'è una serie di valori che si succedono l'un l'altro come nel caso di una sola sostanza avente bassa simmetria, ed ognuno di questi valori di  $\Delta q/q$  indicherà perciò le righe Debye relative ad una certa fase.

B) *Secondo caso. Miscela di sostanze non cubiche (due).*

In questo caso per ogni sostanza presente avremo una serie di valori di  $\Delta q/q$  che per esempio per la sostanza X saranno compresi tra  $(\Delta q/q)_{\max}^X$  e  $(\Delta q/q)_{\min}^X$ .

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale, Laboratorio di Chimica fisica dell'Università di Genova.

(\*\*) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) R. FERRO, questi «Rendiconti», vol. XV, fasc. 5, pp. 285-289 (1953).

(2) R. FERRO, questi «Rendiconti», vol. XV, fasc. 6, pp. 408-414 (1953).

$\alpha$ ) *Primo sottocaso* (abbastanza probabile e più favorevole):

$$\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\min}^X \gg \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\max}^Y.$$

Le due serie di valori sono ben separate e ciascuna di esse permette l'identificazione delle righe di una fase rispetto a quelle dell'altra. La determinazione delle costanti cristallografiche delle sostanze X ed Y sarà effettuata seguendo i procedimenti precedentemente descritti.

$\beta$ ) *Secondo sottocaso* (meno favorevole).

I  $\Delta q/q$  di una sostanza sono inframezzati a quelli dell'altra. Le possibilità di risoluzione sono scarse a partire dal sistema rombico.

$\beta'$ ) Prima possibilità:

$$\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\max}^X > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\max}^Y > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\min}^Y > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\min}^X.$$

I valori estremi della serie di  $\Delta q/q$  ci forniscono due costanti della fase X, questo può essere controllato per mezzo dell'esistenza di  $q$  che le contengono ambedue (ammettendo di non essere in presenza né di monoclini né di triclini). Si proverà poi se una delle suddette  $A_i$  moltiplicata per numeri  $(h^2 + k^2)$  o per  $(h^2 + hk + k^2)$  da valori esistenti di  $\sin^2 \theta$ . Si può tentare di prendere in considerazione i  $\Delta q/q$  immediatamente prossimi agli estremi della serie di valori (cfr. Nota II, par.  $\gamma$ ) e dopo aver determinato tutte le costanti e righe di X, per differenza, ricavare le righe di Y.

$\beta''$ ) Seconda possibilità (appare ancor meno favorevole):

$$\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\max}^X > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\max}^Y > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\min}^X > \left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\min}^Y.$$

I valori estremi della serie ci danno una costante per ciascuna delle due fasi, il che può riconoscersi (nelle ipotesi fatte) dalla impossibilità di ottenere  $\sin^2 \theta$  che le contengano ambedue. Si proverà poi a procedere come nel paragrafo precedente.

C) *Terzo caso. Miscela di una sostanza cubica con una non cubica.*

Può considerarsi come un caso limite particolarmente favorevole del caso B) e può essere discusso in modo analogo.

Osservazioni relative a casi particolari.

a) Può capitare il caso che una o più costanti cristallografiche di una fase siano uguali o coincidenti esattamente con multipli di quelle dell'altra (alto numero di coincidenze). Si potranno evitare false relazioni tenendo conto che in generale ad una riga su un film ne corrisponderanno per esempio due sull'altro.

b) Può capitare il caso che una sostanza abbia il  $(\Delta q/q)_{\max}$  prossimo a  $(\Delta q/q)_{\min}$ , e perciò ad un ristretto intervallo di valori di  $\Delta q/q$  corrispondano molte righe Debye. Questa alta frequenza può esser d'aiuto per far sospettare l'appartenenza di tutte queste righe ad una medesima fase. Ci si avvicina cioè ai casi C) o A).

Sembra cioè che questo fatto possa favorire l'esecuzione migliore di una delle due operazioni in cui consiste questa analisi di polveri eterogenee a scapito però dell'altra (si veda le osservazioni sull'accuratezza di misura nella Nota II).

#### b) ESAME DIFFERENZIALE DI SECOND'ORDINE.

In tutto quanto precede si è sempre considerato il caso del confronto eseguito tra due film. (Esame di primo ordine). Può essere utile cercare di generalizzare questi fatti e studiare per esempio il caso del confronto tra tre film (esame di secondo ordine).

Sarà al solito mantenuto il simbolismo precedentemente introdotto. Per brevità prendiamo in considerazione solo un esempio di una certa importanza se applicato praticamente ed in cui la determinazione diretta di tutte le costanti è raggiunta in modo completamente automatico.

*Ortorombico* - Si abbiano tre fotogrammi delle polveri, ottenuti da tre sostanze rombiche isostrutturali, su ognuno dei quali, perciò, si troveranno righe corrispondenti alle righe degli altri due.

Calcoliamo ora le differenze tra i film 1 e 2  $(^{1,2}\Delta q)_i = q_i^1 - q_i^2$  e successivamente (in modo perfettamente analogo a quanto fatto precedentemente):

$$\frac{q^1 - q^2}{q^1} = \frac{^{1,2}\Delta q}{q}$$

e sia

$$(I) \quad \frac{^{1,2}\Delta A_1}{A_1} < \frac{^{1,2}\Delta A_2}{A_2} < \frac{^{1,2}\Delta A_3}{A_3}$$

essendo tutte queste relazioni sempre simili a quelle valide nell'esame ordinario di due film.

Dai film 1 e 3 si ottiene ora analogamente:

$$\left( \frac{^{1,3}\Delta q}{q} \right)_i = \frac{q_i^1 - q_i^3}{q_i^1}$$

Possono verificarsi i seguenti casi:

$$o \quad (2) \quad \frac{^{1,3}\Delta A_1}{A_1} < \frac{^{1,3}\Delta A_2}{A_2} < \frac{^{1,3}\Delta A_3}{A_3}, \quad o \quad (3) \quad \frac{^{1,3}\Delta A_2}{A_2} < \frac{^{1,3}\Delta A_1}{A_1} < \frac{^{1,3}\Delta A_3}{A_3},$$

$$o \quad (4) \quad \frac{^{1,3}\Delta A_3}{A_3} < \frac{^{1,3}\Delta A_2}{A_2} < \frac{^{1,3}\Delta A_1}{A_1}.$$

Se si verificano contemporaneamente la (1) e la (3), allora tutte e tre le  $A_i$  sono determinate ed il problema è così risolto.

Se invece si verificano insieme la (1) e (2) (ipotesi più probabile) o la (1) con la (4), allora si deve ricorrere all'analisi di second'ordine propriamente detta.

Scriviamo ora la forma quadratica nella forma seguente, adesso più conveniente:

$$(5) \quad q = h^2 A_1 + k^2 A_2 + l^2 A_3 = A_1 (h^2 + k^2 r + l^2 \rho), \text{ con } r = A_2/A_1, \rho = A_3/A_1.$$

$$(6) \quad \Delta q = \Delta A_1 (h^2 + k^2 r + l^2 \rho) + (k^2 \Delta r + l^2 \Delta \rho) A_1.$$

$$(7) \quad \frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta A_1}{A_1} + \frac{k^2 \Delta r + l^2 \Delta \rho}{h^2 + k^2 r + l^2 \rho}.$$

Da tutti i  $\Delta q/q$  ottenuti dai film 1 e 2 si sottrae ora (eventualmente dopo aver fatto la media dei valori compresi nei limiti di errore) il minimo tra i detti  $\Delta q/q$  (se è negativo ovviamente si farà la sottrazione algebrica), si sottrae cioè il valore di  $\left(\frac{{}^{1,2}\Delta q}{q}\right)_{\text{min}} = \frac{{}^{1,2}\Delta A_1}{A_1}$  e indichiamo l'operazione così:

$$(8) \quad ({}^{1,2}D)_i = \left(\frac{{}^{1,2}\Delta q}{q}\right)_i - \left(\frac{{}^{1,2}\Delta q}{q}\right)_{\text{min}} = \frac{k^2 {}^{1,2}\Delta r + l^2 {}^{1,2}\Delta \rho}{h^2 + k^2 r + l^2 \rho}.$$

In modo analogo si procede sui valori ottenuti dai film 1 e 3 (sottraendo il minimo tra i  ${}^{1,3}\Delta q/q$  se nel caso (2) ed il massimo se nel (4)), ottenendo:

$${}^{1,3}D = \frac{k^2 {}^{1,3}\Delta r + l^2 {}^{1,3}\Delta \rho}{h^2 + k^2 r + l^2 \rho}.$$

Dai valori  ${}^{1,2}D$  sottraiamo ora i valori corrispondenti per le corrispondenti righe dei film 1 e 3 ed abbiamo:

$$(9) \quad (\Delta D)_i = ({}^{1,2}D)_i - ({}^{1,3}D)_i = \frac{k^2 \Delta^2 r + l^2 \Delta^2 \rho}{h^2 + k^2 r + l^2 \rho}$$

in cui:  $\Delta^2 r = {}^{1,2}\Delta r - {}^{1,3}\Delta r$  e finalmente eseguiamo i rapporti seguenti:

$$\left(\frac{\Delta D}{{}^{1,2}D}\right)_i = \frac{({}^{1,2}D)_i - ({}^{1,3}D)_i}{({}^{1,2}D)_i}$$

che ci danno:

$$(10) \quad \frac{\Delta D}{D} = \frac{k^2 \Delta^2 r + l^2 \Delta^2 \rho}{k^2 \Delta r + l^2 \Delta \rho}$$

un'espressione, cioè, analoga a quella valida per il tetragonale (esag.) nel caso dell'esame di prim'ordine, e che può essere discussa in modo identico; se infatti è per esempio:

$$\frac{\Delta^2 r}{\Delta r} > \frac{\Delta^2 \rho}{\Delta \rho}$$

si ottiene:

$$\left(\frac{\Delta D}{D}\right)_{k,0} > \left(\frac{\Delta D}{D}\right)_{k,l} > \left(\frac{\Delta D}{D}\right)_{0,l}$$



in cui sono indicati solo gli ultimi due indici, dato che  $h$  diventa indifferente. Dai valori limiti della serie di  $\Delta D/D$  si ricava nuovamente  $A_3$  ed anche  $A_2$ .

Dalla (5) per semplificazione, otteniamo l'espressione per il tetragonale:

$$(11) \quad \left( \frac{\Delta D}{D} \right)_{\text{tetrag.}} = \frac{\Delta^2 \rho}{\Delta \rho} = \text{costante (per ogni } q)$$

che naturalmente è analoga a quella di prim'ordine per il cubico.

L'analisi differenziale di second'ordine è caratterizzata da un maggior automatismo rispetto a quella di prim'ordine e da una maggiore potenza nel senso che permette di determinare la simmetria vera delle variazioni della cella primitiva, ma è limitata dall'alta precisione di misura richiesta (errori inferiori a 0,00001 nel  $\sin^2$ ). Quest'ultimo fatto rende, almeno per ora, inutile la discussione di esami di ordine superiore.

**Chimica fisica.** — *Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano*<sup>(\*)</sup>. Nota II di GIORGIO PEYRONEL, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio L. CAMBI.

Nella struttura dell'esametilciclotrisilossano precedentemente <sup>(1)</sup> determinata, l'affinamento Fourier dei parametri atomici, necessario per una esatta misura delle distanze interatomiche e degli angoli di valenza, non può essere fatto con delle ordinarie proiezioni. Per la proiezione  $\rho(xy)$ , che consentirebbe di ottenere una rappresentazione planare della molecola, sono disponibili solo quattro riflessi  $hko$ . Oltre a ciò il disordine statistico delle molecole, precedentemente illustrato, ha come risultato di triplicare il numero dei massimi atomici in qualsiasi sintesi Fourier, per cui l'effetto della sovrapposizione di massimi renderebbe inutilizzabile qualsiasi proiezione bidimensionale. Fu quindi necessario procedere, in questa struttura, con sintesi Fourier tridimensionali

$$\rho(xyz) = \frac{1}{V} \sum_h \sum_k \sum_l |F(hkl)| \cos[\theta - \alpha(hkl)]$$

in cui  $\alpha(hkl)$  = angolo di fase calcolato,  $\theta = 2\pi(hx + ky + lz)$ ,  $F(hkl)$  = fattore di struttura, osservato ( $F_o$ ) o calcolato ( $F_c$ ). Indicheremo successivamente  $\rho(xyz)$  = densità elettronica con  $\rho_o$  = calcolata con i coefficienti  $F_o$ ,  $\rho_c$  = calcolata con i coefficienti  $F_c$ ,  $\rho_d = (\rho_o - \rho_c)$  = calcolata con i coefficienti

(\*) Lavoro eseguito presso il POLYTECHNIC INSTITUTE OF BROOKLYN, N. Y., nel primo semestre 1953, con borsa di studio del Consiglio Nazionale delle Ricerche e borsa di viaggio Fulbright. L'Autore sentitamente ringrazia il prof. P. P. EWALD, il prof. I. FANKUCHEN e il dott. B. POST per la collaborazione avuta nel corso del lavoro, il prof. D. HARKER e il dott. V. LUZZATI per i loro consigli.

(\*\*) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) G. PEYRONEL, questi « Rendiconti », vol. XV, fasc. 6, pp. 402-408 (1953).

( $F_o - F_c$ ). Vennero ricavate, in base agli elementi di simmetria del reticolo reciproco e alle speciali posizioni di punti equivalenti occupate in questa struttura non centrosimmetrica, le relazioni tra gli  $F(hkl)$  e tra gli angoli di fase  $\alpha(hkl)$  per i diversi piani  $hkl$ .

Con i fattori di struttura  $F_o$  e gli angoli di fase calcolati in base ai parametri  $x_{Si} = 0,775$ ,  $x_O = 0,200$ ,  $x_C = 0,633$ ,  $z_C = 0,083$ , per 45 riflessi registrati con fotogrammi a precessione e  $MoK_\alpha$ , si calcolarono le sezioni Fourier (I)  $\rho_o(x\bar{x}o)$  e (II)  $\rho(xoo)$ , le quali mostrarono forti effetti di diffrazione per interruzione della serie. Questi vennero sensibilmente diminuiti in una nuova sezione (III)  $\rho_o(x\bar{x}o)$  ottenuta aggiungendo altri 14 riflessi più deboli registrati con fotogrammi, più intensi, a cristallo oscillante e  $CuK_\alpha$ .

Si calcolò allora una sezione (IV)  $\rho_o(xy o)$  usando tutti i riflessi osservati. Gli atomi di Si e O risultarono ben definiti, benché ancora circondati da effetti di diffrazione. Per diminuire ulteriormente gli effetti di interruzione della serie, altri 32 riflessi, possibili ma troppo deboli per essere osservati, entro la regione esplorata del reticolo reciproco, vennero allora introdotti nel calcolo di una nuova sezione (V)  $\rho_o(xy o)$  attribuendo loro una intensità media = 1, cioè approssimativamente metà del valore minimo delle intensità osservate. Fu possibile di ridurre così i massimi di diffrazione, di arrotondare la forma degli atomi e di aumentare i loro massimi. A causa della distribuzione statistica delle molecole si hanno, nella sezione (ved. fig. 3) tre massimi di silicio e tre di ossigeno anziché uno, ciascun massimo corrispondendo a 1/3 di un atomo. La sovrapposizione dei massimi è tuttavia minima ed insufficiente per influenzare apprezzabilmente le loro posizioni. Gli atomi di silicio e di ossigeno risultarono leggermente spostati, lungo le diagonali, rispetto alle posizioni assunte.

Per valutare e correggere gli errori di posizione dei massimi, dovuti a interruzione della serie, si calcolò allora una sezione (VI)  $\rho_c(x\bar{x}o)$  con i fattori di struttura calcolati. Si ottenne in essa un leggero spostamento di 0,02 Å per entrambi i massimi ( $F_c$ ) del silicio e dell'ossigeno, lungo le diagonali. Tenendo conto dei due spostamenti osservati nelle due sezioni (V) e (VI) si ricalcolarono i fattori di struttura per  $x_{Si} = 0,780$ ,  $x_O = 0,193$ ,  $x_C = 0,633$ ,  $z_C = 0,083$ , e si ottenne un miglioramento del fattore di disaccordo  $R = \Sigma ||F_o| - |F_c|| \div \Sigma |F_o|$  da 21 % a 19 % per tutti i riflessi osservati.

Una nuova sezione (VII)  $\rho_o(x\bar{x}o)$  mostrò che la posizione del massimo del silicio era ormai stazionaria e quella del massimo dell'ossigeno era ancora leggermente spostata. Una ulteriore valutazione della correzione da apportare alla posizione dell'ossigeno fu ottenuta da una sintesi di differenza (VIII)  $\rho_d(x\bar{x}o)$ . La curva  $\rho_d$  è orizzontale in corrispondenza della posizione del silicio, già risultata stazionaria nella sezione (VII); dalla sua pendenza in corrispondenza della posizione dell'ossigeno, dallo spostamento di questa osservato nella sezione (VII) e corretto per l'effetto di interruzione della serie osservato nella sezione (VI), si calcolò per il parametro  $x_O$  dell'ossigeno una correzione da 0,193 a 0,187.

Prima di applicare questa correzione si procedette alla valutazione dell'errore della posizione del carbonio. Con l'ultima serie di angoli di fase si calcolò la sezione (IX)  $\rho_0(x\bar{x} \ 5/60)$  passante attraverso il centro dell'atomo di carbonio. Per effetto della distribuzione statistica delle molecole, tre atomi di carbonio a quota  $z = 0,083 = 5/60$ , appartenenti rispettivamente alle « molecole statistiche » in posizione (000), (100), (110), vengono a trovarsi sulle diagonali della sezione esagonale a distanza di circa  $0,3 \text{ \AA}$  dall'asse ternario e di circa  $0,5 \text{ \AA}$  l'uno dall'altro (ved. fig. 1). È cioè come se i tre atomi

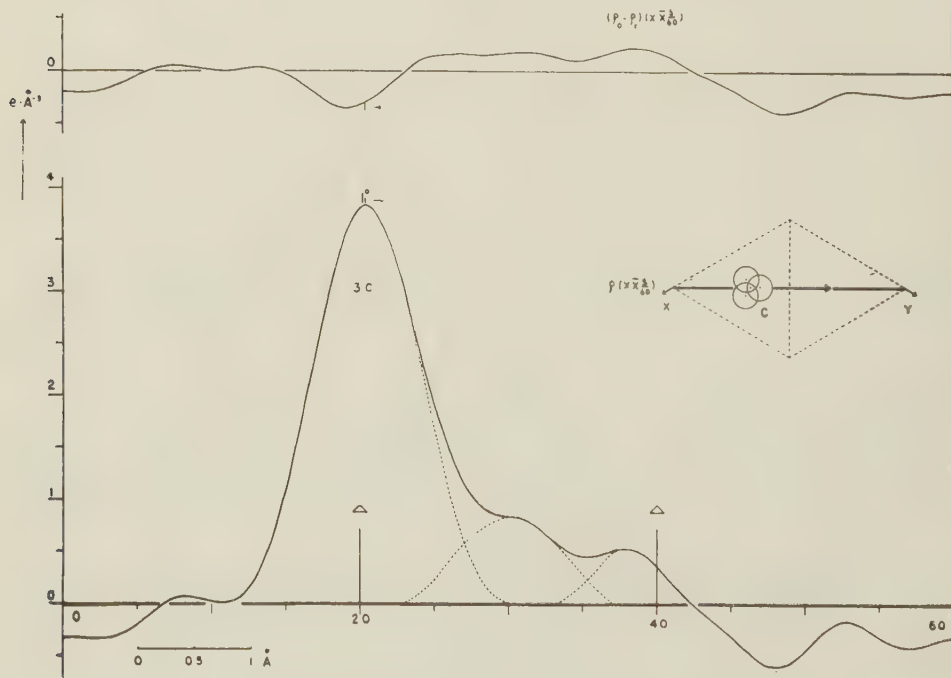


Fig. 1. - Densità elettronica (curva inferiore) e sintesi  $F_0 - F_c$  (curva superiore) lungo la sezione  $(x\bar{x} \ 5/60)$  attraverso il baricentro elettronico di un gruppo metilico. Le linee punteggiate delimitano i massimi di diffrazione sottratti dal massimo (3 C).

di carbonio fossero tra di loro spazialmente « intercompensati ». I tre massimi hanno ciascuno un apparente contenuto elettronico pari a  $1/3$  di quello del gruppo metilico, ma occupando questo contenuto elettronico lo stesso volume di un gruppo metilico reale, essi sono fortemente sovrapposti. Data questa sovrapposizione e la libera rotazione del gruppo metilico intorno all'asse Si—C, la posizione indeterminabile degli idrogeni è stata trascurata, e il gruppo metilico è stato considerato nei calcoli come un atomoide unico, e per brevità si indica nel corso del lavoro come « carbonio ». Verrà più oltre discusso il fattore di forma per esso adoperato.

Per effetto della forte sovrapposizione dei tre massimi, ciascuno di essi è molto spostato verso l'asse ternario. Dato l'elevato contributo degli altri

due massimi simmetrici alla sezione ( $\overline{x\overline{x}}$  5/60) il massimo A di questa sezione verrà perciò spesso indicato con (3C) nel corso del lavoro (fig. 1). La risoluzione del massimo (3C) può essere fatta in due modi. Il primo consiste nel sottrarre dagli  $F_0$  il contributo  $(F_c)_{2C}$  calcolato per i due carboni simmetrici alla sezione; ma poiché la posizione di questi è cristallograficamente equivalente a quella del carbonio da determinare, il massimo della sezione così calcolata sarebbe ugualmente affetto degli errori, di  $(F_c)_{2C}$  e degli angoli di fase, dovuti alla errata posizione dei tre atomi di carbonio anziché a quella di uno solo.

Si è quindi preferito l'uso del metodo della sottrazione grafica, per tentativi e in diverse posizioni, dal massimo (3C), di un massimo teorico

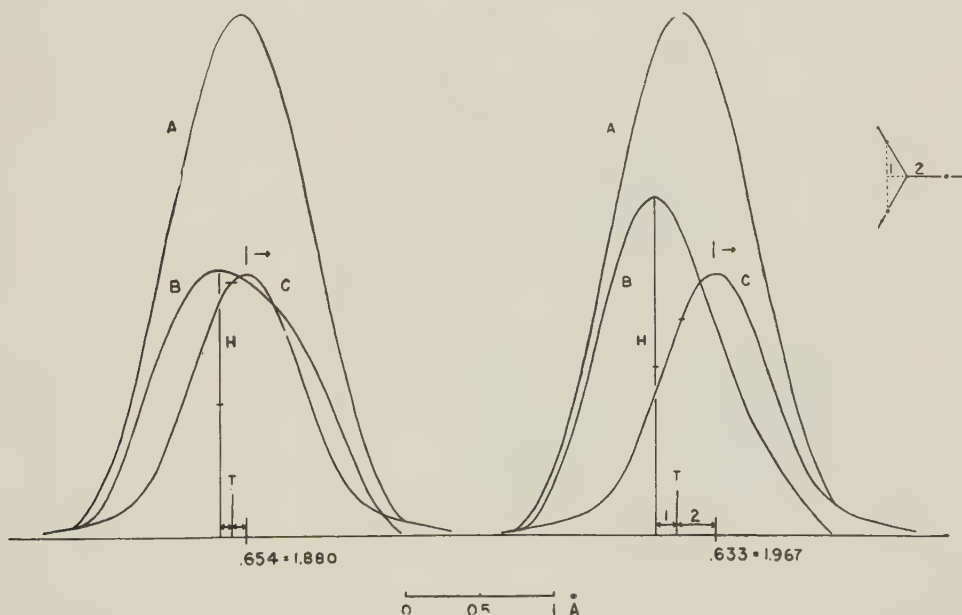


Fig. 2. — Decomposizione del massimo A (3C) sottraendo la curva calcolata (C) nelle posizioni  $x_C = 0,654$  e  $x_C = 0,633$  corrispondenti alle distanze silicio-metile di 1,88 e 1,967 Å.

(C) corrispondente a un contenuto elettronico di  $1/3$   $\text{CH}_3$ . Esso fu calcolato usando lo stesso fattore di forma, lo stesso reticolo, gli stessi riflessi, e gli stessi fattori di temperatura adoperati nel calcolare i fattori di struttura  $F_c$ . La curva calcolata (C) fu poi sottratta (fig. 2), in diverse posizioni, dal massimo (A). La curva (B) ottenuta per differenza, corrisponde alla sovrapposizione dei due atomi di carbonio che non appartengono alla sezione ma che sono simmetrici rispetto ad essa. Anche la curva (B) deve essere simmetrica rispetto al proprio centro. Essa deve avere un'altezza (H) doppia dell'altezza misurata, sulla curva calcolata (C) a partire dal suo centro, a una distanza uguale a metà della distanza tra i due atomi simmetrici alla sezione. Il centro della curva (B) dovrebbe anche essere a una



distanza (1) dall'asse ternario (T) pari a metà della distanza (2) dell'atomo contenuto nella sezione dallo stesso asse. Queste condizioni non sono soddisfatte per la posizione del carbonio  $x_C = 0,654$  corrispondente a una distanza  $\text{Si} - \text{C} = 1,88 \text{ \AA}$ , ma cominciano ad esserlo per la posizione  $x_C = 0,633$  corrispondente a una distanza  $\text{Si} - \text{C} = 1,97 \text{ \AA}$ . La decomposizione del massimo A mostra che la posizione del carbonio deve essere allontanata dall'asse ternario, diminuendo il valore di  $x_C$  ed aumentando la distanza  $\text{Si} - \text{C}$ . Anche il massimo (3C) ( $F_c$ ) nella sezione (X)  $\rho_c(x\bar{x} 5/60)$  ha la stessa forma del massimo (3C) ( $F_o$ ) ma è di questo più distante, dall'asse ternario, di  $0,015 \text{ \AA}$ .

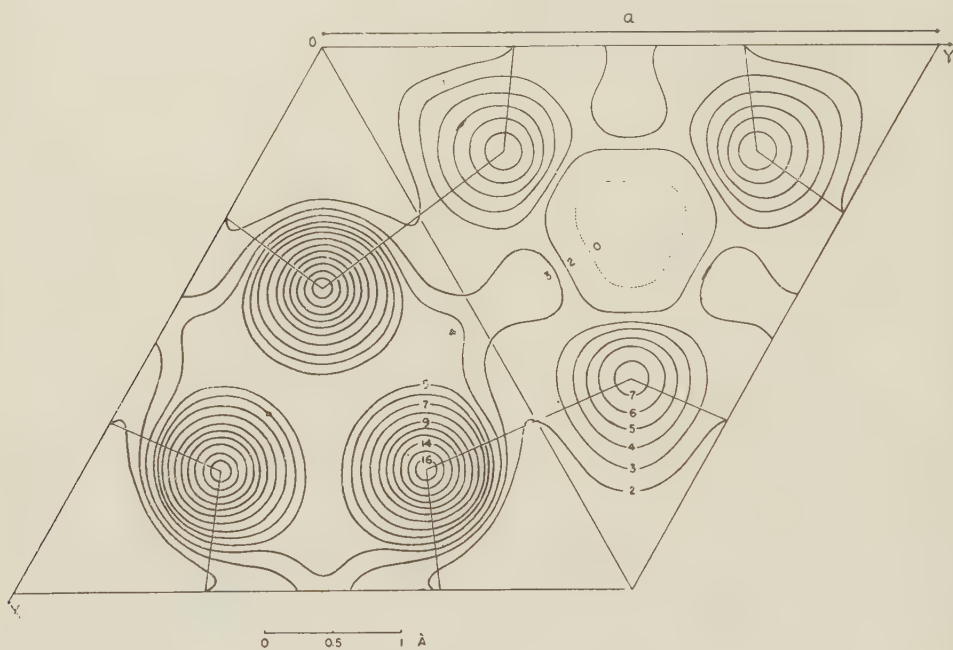


Fig. 3. - Sezione  $\rho(xy0)$ . Le linee di contorno sono a intervalli di  $0,29 \text{ e } \text{\AA}^{-3}$ . La linea  $\rho = 0$  è punteggiata.

Una valutazione dell'errore medio delle posizioni atomiche, a questo stadio dell'affinamento Fourier, fu ottenuta, seguendo il metodo di Cochran<sup>(2)</sup>, dalle sintesi di differenza (VIII)  $\rho_d(x\bar{x}0)$  e (XI)  $\rho_d(x00)$ , (XII)  $\rho_d(1/2 y0)$ , (XIII)  $\rho_d(x\bar{x} 5/60)$ . Anche la pendenza della curva  $\rho_d$  in corrispondenza della posizione del massimo (3C) nella sintesi (XIII) (fig. 1) mostrò che il massimo (3C) e conseguentemente la posizione del carbonio devono essere leggermente allontanati dall'asse ternario. Tenendo perciò conto: 1° dello spostamento del massimo (3C) ( $F_o$ ) della sezione (IX) rispetto al massimo (3C) ( $F_c$ ) della sezione (X); 2° del valore e del senso della pendenza della curva  $\rho_d$  nella sintesi (XIII) in corrispondenza del massimo; 3° dei

(2) W. COCHRAN, « Acta Cryst. », 4, 81 (1951).

risultati della decomposizione del massimo (3C) ( $F_o$ ) (fig. 2); 4° dell'errore medio della posizione del massimo approssimativamente valutato dalle sintesi di differenza, si calcolò per il parametro  $x_C$  del carbonio una correzione da 0,633 a 0,628.

Le due correzioni, per l'ossigeno e il carbonio, furono fatte separatamente, in modo da stabilire la loro rispettiva influenza sul fattore di disaccordo. Col nuovo valore di  $x_O$  più sopra determinato si ricalcolarono i fattori

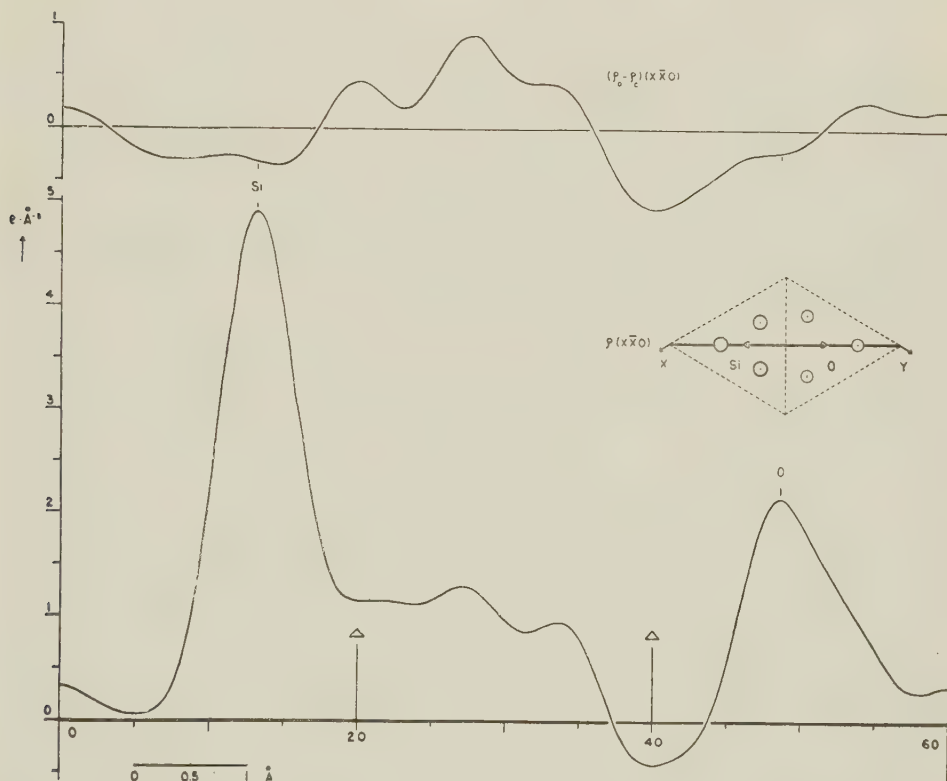


Fig. 4. - Densità elettronica (curva inferiore) e sintesi  $F_o - F_c$  (curva superiore) lungo la sezione  $(x\bar{x}0)$ .

di struttura per  $x_{Si} = 0,780$ ,  $x_O = 0,187$ ,  $x_C = 0,633$ ,  $z_C = 0,083$ . Il fattore di disaccordo tra i nuovi fattori di struttura calcolati e quelli osservati aumentò leggermente, da 19,00 a 19,18, ma il massimo dell'ossigeno risultò, in una nuova sezione (XIV)  $\rho_o(x\bar{x}0)$ , in posizione stazionaria. In una nuova sintesi di differenza (XV)  $\rho_d(x\bar{x}0)$  anche la nuova curva risultò di conseguenza orizzontale in corrispondenza della posizione dell'ossigeno (fig. 4).

Si corresse allora la posizione del carbonio ricalcolando i fattori di struttura col nuovo valore  $x_C = 0,628$ . Il fattore di disaccordo migliorò, per effetto di questa correzione, da 19,18 a 18,58 %. Valori di  $x_C$  maggiori di 0,633 diedero invece molto rapidamente un peggioramento del fattore di disaccordo.

**Chimica fisica.** — *Sulla cinetica della reazione tra nitrocloro-derivati aromatici ed alcolati in soluzione alcolica* (\*). Nota di MASSIMO SIMONETTA e GIORGIO FAVINI, presentata (\*\*) dal Socio L. CAMBI.

Nelle precedenti Note di questa serie <sup>(1)</sup> abbiamo studiato il meccanismo e la cinetica delle reazioni tra 1-cloro, 2-nitronaftalina, 1-cloro-4-nitronaftalina e 1-nitro, 2-cloronaftalina con idrato potassico in soluzione idroalcolica e in miscele acqua-diossano. In entrambi i casi, in tutte le nostre condizioni sperimentali, il meccanismo della reazione è risultato, come era facilmente prevedibile, di tipo  $S_N2$  e l'ordine di reattività, stabilito in base ai valori delle costanti di velocità, è stato: 1-cloro, 2-nitronaftalina > 1-cloro, 4-nitronaftalina > 1-nitro, 2-cloronaftalina.

Questo stesso ordine di reattività è stato recentemente stabilito anche per via teorica <sup>(2)</sup>, applicando il metodo degli orbitali molecolari nella sua approssimazione standard di combinazione lineare di orbitali atomici, sia mediante il modello della molecola isolata, che alla luce della teoria della localizzazione <sup>(3)</sup>. Nello svolgimento di tale trattazione teorica si assume che la reattività sia determinata essenzialmente dalla differenza dell'energia degli elettroni  $\pi$  presenti nella molecola aromatica allo stato iniziale e nello stato di transizione, e sia pertanto indipendente dalla temperatura, dal solvente e dalla natura chimica del gruppo che sostituisce il cloro.

Allo scopo di una più sicura verifica della legittimità delle sopraelencate ipotesi abbiamo ritenuto consigliabile effettuare una nuova serie di esperienze con un diverso solvente (metanolo) e un diverso reattivo (lo ione metossile); tali esperienze, eseguite a varie temperature, e completate anche con esperienze in etanolo anidro in presenza di etilato sodico hanno portato ai risultati attesi: l'ordine di reattività, identico a quello stabilito nelle prove precedenti e dal calcolo teorico, risulta effettivamente indipendente da tutti i fattori dai quali si è postulato lo fosse.

I valori medi delle costanti  $k_2$  ricavati dai dati sperimentali per via grafica sono riportati in tabella I (valori delle costanti in ore<sup>-1</sup>) (moli/litro)<sup>-1</sup>.

Con questi valori sono state calcolate, mediante il grafico di fig. 1, le corrispondenti energie di attivazione (Tabella II).

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università e presso l'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) M. SIMONETTA e G. FAVINI, questi « Rend. », XIV, fasc. 4, pp. 505 (1953); XIV, fasc. 6, pp. 804 (1953).

(2) M. SIMONETTA e G. FAVINI, « Journal de Chimie Physique » (in corso di stampa).

(3) R. D. BROWN, « Quart. Rev. », 6, 63 (1952).

TABELLA I.

$t$ (°C.)	50	55	60	65	70	
1-cloro, 2-nitronaftalina . .	0,555	0,874	1,54	—	—	} reazione con metilato sodico
1-cloro, 4-nitronaftalina . .	0,500	0,805	1,36	—	—	
1-nitro, 2-cloronaftalina . .	—	—	0,0735	0,109	0,177	
1-cloro, 2-nitronaftalina . .	—	—	1,910	—	—	} reazione con etilato sodico.
1-cloro, 4-nitronaftalina . .	—	—	1,380	—	—	
1-nitro, 2-cloronaftalina . .	—	—	0,0925	—	—	

Per ragioni discusse in altra sede (2) l'ordine di reattività da confrontarsi con quello previsto dalla teoria è stato determinato mediante i valori delle costanti di velocità  $k_2$  anziché con le energie di attivazione  $E_a$ .

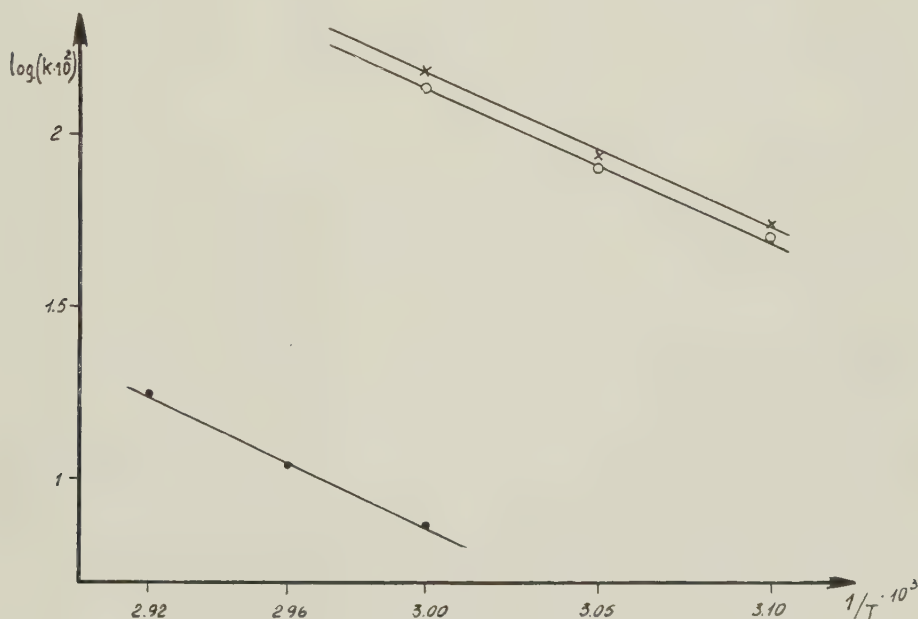


Fig. 1. — Grafico per il calcolo dell'energia di attivazione.

x 1-cloro, 2-nitronaftalina    o 1-cloro, 4-nitronaftalina    ● 1-nitro, 2-cloronaftalina.

## PARTE SPERIMENTALE.

a) Preparazione dei composti: per i metodi di preparazione e purificazione e per le proprietà delle tre cloronitronaftaline esaminate rimandiamo alla Nota precedente <sup>(1)</sup>;



TABELLA II.

	$E_a$ (cal/mole)
1-cloro, 2-nitronaftalina . . . .	20450
1-cloro, 4-nitronaftalina . . . .	19850
1-nitro, 2-cloronaftalina . . . .	21800

b) preparazione delle soluzioni: i solventi usati sono stati: alcol etilico assoluto al 99,9 %, alcool metilico anidro ottenuto dal prodotto commerciale secondo il metodo di J. Miller <sup>(4)</sup>, per trattamento con acido solforico conc., distillazione, essiccamento e distillazione su ossido di calcio e distillazione finale su trucioli di magnesio.

Le soluzioni titolate dei cloronitrocomposti erano preparate pesando il soluto e portando a volume con alcol metilico od etilico. Le soluzioni di metilato ed etilato sodico erano ottenute pesando la quantità stabilita di sodio metallico e sciogliendola in alcol metilico od etilico in modo da avere una soluzione 0,5 N (verificata, dopo diluizione con acqua, per titolazione con un acido in presenza di fenolftaleina);

c) modalità e risultati delle prove cinetiche: le reazioni sono state eseguite in un ultratermostato nel quale la temperatura era controllata a  $\pm 0,05^\circ$ . Le determinazioni sono state eseguite in tubicini muniti di tappo per le temperature fino a  $60^\circ$ , chiusi alla fiamma per le temperature di  $65^\circ$  e  $70^\circ$  in alcol metilico. In ciascun tubicino erano introdotti 20 cc. della soluzione 0,125 N del cloroderivato e, dopo raggiunto l'equilibrio termico, 5 cc. di reattivo (etilato o metilato sodico 0,5 N). Al tempo voluto la reazione si arrestava versando in 100 cc. di acido nitrico diluito e la quantità di cloroioni presenti veniva determinata nel solito modo <sup>(1)</sup>. Operando in tubi chiusi alla fiamma non è stato tenuto conto del tempo necessario per il riscaldamento della soluzione all'inizio della cinetica, né di quello di raffreddamento prima della titolazione; si può pensare però che i due errori tendano a compensarsi e che comunque abbiano conseguenze trascurabili dato che le cinetiche in questione sono state eseguite per tempi da 8 a 30 ore.

I risultati per le tre sostanze sono raccolti nella tabella III dove sono riportati i %  $\text{Cl}^-$  formati e le costanti  $k_2$  calcolate con la formula

$$k_2 = \frac{C_0 - C_t}{t \cdot C_0 \cdot C_t}$$

per le reazioni del secondo ordine a uguali concentrazioni di sostanze reagenti (in ore<sup>-1</sup> moli/litro<sup>-1</sup>);

(4) J. MILLER, « J. Chem. Soc. », 3550 (1952).

TABELLA III.

*I-cloro, 2-nitronaftalina con metilato sodico in metanolo (0,1 N)*

<i>t</i> (ore)	50 °C.		55 °C.		60 °C.	
	% Cl <sup>-</sup>	<i>k</i> <sub>2</sub>	% Cl <sup>-</sup>	<i>k</i> <sub>2</sub>	% Cl <sup>-</sup>	<i>k</i> <sub>2</sub>
1	5,424	0,573	8,520	0,931	13,780	1,598
2	10,264	0,572	15,104	0,889	24,232	1,600
3	—	—	—	—	32,420	1,599
4	18,400	0,564	26,144	0,885	36,576	1,440
5	—	—	—	—	42,416	1,470
6	24,788	0,549	34,084	0,862	—	—
8	30,212	0,542	40,680	0,857	—	—

*I-cloro, 4-nitronaftalina con metilato sodico in metanolo (0,1 N)*

<i>t</i> (ore)	50 °C.		55 °C.		60 °C.	
	% Cl <sup>-</sup>	<i>k</i> <sub>2</sub>	% Cl <sup>-</sup>	<i>k</i> <sub>2</sub>	% Cl <sup>-</sup>	<i>k</i> <sub>2</sub>
1	5,232	0,552	8,132	0,905	—	—
2	9,296	0,512	13,944	0,810	23,400	1,528
4	16,656	0,500	24,404	0,813	35,420	1,400
6	23,472	0,511	32,652	0,808	44,080	1,310
7	—	—	—	—	49,516	1,400
8	28,080	0,488	38,152	0,771	51,794	1,341

*I-nitro, 2-cloronaftalina con metilato sodico in metanolo (0,1 N)*

<i>t</i> (ore)	60 °C.		65 °C.		70 °C.	
	% Cl <sup>-</sup>	<i>k</i> <sub>2</sub>	% Cl <sup>-</sup>	<i>k</i> <sub>2</sub>	% Cl <sup>-</sup>	<i>k</i> <sub>2</sub>
8	5,868	0,0779	7,952	0,108	12,560	0,179
16	10,248	0,0714	15,048	0,111	21,520	0,172
20	13,044	0,0750	16,844	0,101	26,108	0,177
24	14,840	0,0726	21,132	0,112	30,284	0,181
30	—	—	—	—	35,520	0,184
30,5	17,760	0,0708	24,892	0,109	—	—

*Reazione con etilato sodico in etanolo 0,1 N a 60 °C.*

<i>t</i> (ore)	1—Cl, 2—NO <sub>2</sub>		1—Cl, 4—NO <sub>2</sub>		1—NO <sub>2</sub> , 2—Cl	
	% Cl <sup>-</sup>	<i>k</i> <sub>2</sub>	% Cl <sup>-</sup>	<i>k</i> <sub>2</sub>	% Cl <sup>-</sup>	<i>k</i> <sub>2</sub>
1	17,44	1,956	13,168	1,517	—	—
2	28,36	1,948	—	—	—	—
3	36,76	1,887	29,824	1,416	—	—
4	42,76	1,831	35,244	1,360	3,780	0,0982
5	—	—	40,680	1,372	—	—
6	—	—	44,540	1,340	—	—
8	—	—	—	—	6,912	0,0928
16	—	—	—	—	12,756	0,0914
20	—	—	—	—	15,720	0,0933
26	—	—	—	—	18,800	0,0891

d) isolamento e riconoscimento dei prodotti di reazione: 5,1 gr. di 1-cloro, 4-nitronaftalina sciolti in 200 cc. di alcool sono stati trattati con 50 cc. di etilato sodico 0,5 N per 22 ore a 60°. Dopo evaporazione dell'alcool il residuo è stato lavato con acqua per eliminare i sali inorganici. Nella soluzione acquosa è stata controllata l'assenza di nitriti. Il residuo era di 4,05 gr. a p.f. 114. Dopo cristallizzazione da alcool il punto di fusione sale a 115,5 corrispondente a quello della 4-nitro, 1'-etossinaftalina.

**Chimica inorganica.** — *I composti complessi dell'argento bivalente con l' $\alpha$ - $\alpha$ -dipiridile come ossidanti* (\*). Nota di GIUSEPPE ANTONIO BARBIERI e TILDE LABIANCA, presentata (\*\*) dal Socio G. B. BONINO.

Nei composti complessi dell'argento bivalente con l' $\alpha$ - $\alpha$ -dipiridile ciò che colpisce di più è la straordinaria intensità della colorazione rosso-bruna delle loro soluzioni. Si tratta di una colorazione che è ancora notevole in soluzioni millesimo normali e che, a parità di ossigeno attivo, eguaglia, se non supera, quella delle soluzioni di permanganato.

Per aggiunta di un riducente incolore, per esempio acqua ossigenata, le soluzioni argentiche rosso brune diventano rapidamente incolore perché il catione bivalente intensamente colorato argenti-dipiridilico  $[\text{Ag}''(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_2]^{2+}$  si trasforma nel corrispondente catione complesso dell'argento monovalente  $[\text{Ag}'(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2)_2]^+$  che ha la stessa struttura del catione argentario ma è monovalente ed incolore.

Se si volesse quindi impiegare come ossidante nell'analisi volumetrica un composto complesso argentario, esso non avrebbe bisogno di un indicatore che segnalasse la fine della reazione perché, a somiglianza del permanganato, farebbe da indicatore a sè stesso.

Certo a nessuno può passare per la mente l'idea di sostituire, nell'analisi volumetrica, il permanganato con i composti complessi dell'argento bivalente, perché, anche facendo astrazione dal prezzo molto elevato dell' $\alpha$ - $\alpha$ -dipiridile, e dal fatto che il potere ossidante di detti composti complessi è inferiore a quello del permanganato, bisogna tenere presente che essi sono molto instabili ed il loro titolo, in ossigeno attivo, diminuisce abbastanza rapidamente col tempo, in modo che, volendo impiegarli come ossidanti quantitativi, bisognerebbe controllarne sempre il titolo poco prima dell'impiego.

Noi abbiamo, tuttavia, ritenuto interessante, dal punto di vista della conoscenza dei composti complessi dell'argento bivalente, di prendere in esame il loro comportamento, come ossidanti, in confronto con quello del permanganato, giacché, da alcuni saggi preliminari qualitativi, ci era risul-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico « Giacomo Ciamician » dell'Università di Bologna diretto dal prof. G. B. Bonino.

(\*\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

tato che, in alcuni casi, i complessi dell'argento bivalente manifestavano a freddo una reattività maggiore di quella del permanganato.

PREPARAZIONE E IMPIEGO DELLE SOLUZIONI ARGENTICHE. — Per preparare soluzioni contenenti complessi dell'argento bivalente col dipiridile si può sciogliere in acqua acidificata con acido nitrico o solforico quantità pesate di composti complessi dell'argento bivalente cristallizzati, per esempio il nitrato  $[Ag''(C_{10}H_8N_2)_2](NO_3)_2$  oppure si può ossidare mediante l'ossido argenteo  $AgO$  la soluzione di un sale complesso dell'argento monovalente con il dipiridile: per esempio la soluzione del solfato acido  $[Ag'(C_{10}H_8N_2)_2]SO_4H$  che è incolore e che per l'azione dell' $AgO$  si colora intensamente in rosso-bruno perché si forma il composto  $(Ag''(C_{10}H_8N_2)_2)(SO_4H)_2$ .

Il titolo ossidante, che si può esprimere in argento bivalente oppure in ossigeno attivo, di queste soluzioni — in qualunque modo preparate — varia sensibilmente col tempo. Perfino i composti complessi cristallizzati, che alla analisi avevano dato risultati perfettamente concordanti con i calcolati in base alle loro formule, forniscono in acqua soluzioni nelle quali il titolo ossidante è diminuito, per il fatto fisico della soluzione, di almeno il 5 % (fatto = 100 l'ossigeno attivo presente nella sostanza solida). Soprattutto le soluzioni molto concentrate (e si possono considerare molto concentrate le soluzioni cinquantesimo normali), saggiate a distanza di poche ore con una soluzione titolata di acqua ossigenata, richiedono per volumi uguali, prelevati dalla stessa soluzione argentea, volumi sempre minori della soluzione di acqua ossigenata per venire scolorite. Col diminuire della concentrazione dell'ossigeno attivo, la curva, che segna la diminuzione del titolo in funzione del tempo, si avvicina di più all'orizzontale e le variazioni non si notano più a distanza di ore, ma di giorni.

Affinché la facile alterabilità delle soluzioni argentiche non incidesse sulla esattezza delle determinazioni quantitative che ci eravamo proposto di fare, si ricorse al seguente artificio. Si prelevavano due volumi uguali della soluzione argentea: in uno si determinava quanta soluzione titolata di acqua ossigenata era necessaria per scolorire completamente il liquido, e, subito dopo, nell'altro volume si aggiungeva in soluzione la sostanza che si voleva ossidare a spese della soluzione argentea, ma non in quantità tale da portare a scolorimento il liquido, poi si completava la riduzione con la soluzione titolata di acqua ossigenata, fino a scolorimento. Il minor consumo di acqua ossigenata nella seconda reazione ci permetteva di calcolare l'azione ossidante compiuta dall'argento bivalente sulla sostanza sperimentata.

OSSIDAZIONE A FREDDO DELL'ACIDO OSSALICO. — Mentre le soluzioni di  $KMnO_4$ , anche in presenza di acido solforico, non vengono ridotte a freddo dall'acido ossalico, le soluzioni argentiche trattate a freddo con acido ossalico, vengono rapidamente decolorate. L'analisi descritta qui sotto venne eseguita per assicurarci che la reazione fra i composti complessi dell'argento bivalente e l'acido ossalico fosse quantitativa.



Anzitutto venne preparata, per pesata, una soluzione N/25 di acido ossalico sciogliendo in 1000 cc di acqua gr 2,5214 di acido ossalico idrato.

Della soluzione argantica contenente nitrato di argenti-dipirile che si impiegò come ossidante, si determinò il titolo mediante una soluzione di acqua ossigenata di cui 50 cc avevano richiesto cc 9,2 di sol. N/10 di  $\text{KMnO}_4$ . 25 cc della soluzione argantica vennero completamente decolorati da cc 40 della soluzione dell'acqua ossigenata. In altri 25 cc della soluzione argantica si introdussero prima 10 cc della soluzione di acido ossalico, poi si completò la riduzione aggiungendo cc 18,2 della soluzione di  $\text{H}_2\text{O}_2$ .

Da questi dati si calcola che nei 10 cc della soluzione di acido ossalico, erano contenuti gr 0,02528 di acido ossalico idrato. Questo risultato concorda con la pesata di gr 2,5214 di acido ossalico idrato per litro.

OSSIDAZIONE DELL'ACIDO NITROSO. — Una soluzione circa N/50 di  $\text{NaNO}_2$  venne analizzata secondo il metodo Lunge impiegando il permanganato in soluzione solforica a caldo ( $40^\circ$ ); 50 cc della soluzione di nitrito consumarono cc 10,1 di sol. N/10 di  $\text{KMnO}_4$ . Da ciò si calcola per la soluzione di nitrito un contenuto di gr 0,6969‰ di  $\text{NaNO}_2$ . Si verificò anzitutto che una soluzione di acido nitroso decolora a freddo le soluzioni argentiche. In una bevuta vennero introdotti 20 cc della soluzione argantica (solfato) intensamente colorata e mediante una soluzione diluita di acqua ossigenata (di cui 50 cc corrispondevano a cc 9,1 di sol. N/10 di  $\text{KMnO}_4$ ) si ridusse l'argento bivalente fino a decolorazione della soluzione. Si impiegarono a tale scopo cc 41,4 della soluzione di acqua ossigenata. In un'altra bevuta si introdussero altri 20 cc della soluzione argantica e poi 20 cc della soluzione di nitrito, infine si aggiunse tanta soluzione di acqua ossigenata finché il liquido diventò incolore. A tale scopo si impiegarono cc 19,1 di  $\text{H}_2\text{O}_2$ . Da questi dati si calcola per la soluzione di nitrito un contenuto di gr 0,7000 di  $\text{NaNO}_2$ ‰ che concorda col risultato ottenuto col  $\text{KMnO}_4$ , gr 0,6969‰.

OSSIDAZIONE DEL VANADIO TETRAVALENTE. — Il solfato di vanadile  $\text{VOSO}_4$  che si ottiene facilmente in soluzione sotto forma di un liquido bleu riducendo a caldo con un eccesso di anidride solforosa una soluzione solforica di  $\text{V}_2\text{O}_5$  o di  $\text{NH}_4\text{VO}_3$ , può essere titolato, dopo eliminazione della anidride solforosa, con una soluzione di permanganato potassico. I trattati di Chimica Analitica <sup>(1)</sup> dicono che la titolazione deve essere eseguita a caldo.

Si partì da una soluzione di solfato di vanadile circa N/50: 50 cc di detta soluzione consumarono cc 9,85 di una soluzione N/10 di  $\text{KMnO}_4$ . Da ciò si calcola che la soluzione di vanadile conteneva, per litro, gr 1,0036 di vanadio tetraivalente. Si riconobbe, qualitativamente, che le soluzioni di solfato di vanadile decolorano, a freddo, le soluzioni argentiche, mentre scompare anche il loro colore bleu.

(1) F. P. TREADWELL, *Manuel de Chimie Analytique*, T. II 586 (1934).

50 cc di una soluzione argentica (solfato) richiesero cc 39,5 di una soluzione di acqua ossigenata che, per 50 cc, aveva consumato cc 9,1 di soluzione N/10 di permanganato.

In altri 50 cc della soluzione argentica si aggiunsero, dapprima, 15 cc della soluzione di vanadile, poi si completò la riduzione del sale argentico con cc 23,05 di soluzione di acqua ossigenata. Da questi dati si calcola, nei 15 cc della soluzione di vanadile, gr 0,01525 di vanadio tetravalente, e quindi per 1000 cc gr 1,0170 che concorda abbastanza col risultato gr 1,0036 ‰ trovato col permanganato.

OSSIDAZIONE INCOMPLETA DELL'IDRAZINA. — È noto dalle ricerche di Petersen <sup>(2)</sup>, che l'ossidazione dell'idrazina col permanganato in soluzione solforica, non è quantitativa, perchè conduce, parzialmente, alla formazione di azoto e di ammoniaca. Secondo Petersen, 17 molecole di idrazina consumano 26 equivalenti di ossigeno. Secondo Kolthoff <sup>(3)</sup> 5 molecole di idrazina consumano, all'ebollizione, circa 16 equivalenti di ossigeno.

Noi abbiamo potuto constatare che, anche con i complessi dell'argento bivalente, l'ossidazione non avviene secondo l'equazione



Per ogni molecola di idrazina, non vengono impegnati 4 equivalenti di ossigeno, ma poco più di 1/3 di tale quantità.

Per il dosamento quantitativo si impiegò una soluzione di solfato di idrazina, che conteneva gr 3,25 di  $\text{N}_2\text{H}_4 \cdot \text{H}_2\text{SO}_4$  per litro, e quindi gr 0,8018 di idrazina ‰.

La soluzione argentica (nitrato) consumava, per 15 cc, cc 31,8 di una soluzione di acqua ossigenata che richiedeva per 50 cc, cc 9,1 di soluzione N/10 di permanganato.

Ad altri 15 di cc della soluzione argentica, si aggiunsero, dapprima, 10 cc della soluzione di idrazina, poi, per completare la decolorazione, cc 12,5 della soluzione di acqua ossigenata.

Da questi dati risulta che la quantità di idrazina contenuta in 10 cc cioè gr 0,008018 ha consumato gr 0,00281 di ossigeno attivo della soluzione argentica e riferendo questo rapporto ad una molecola grammo di idrazina, si calcola che il suo consumo di ossigeno sarebbe stato di gr 11,22 che è circa 1/3 dell'ossigeno calcolato (gr 32) in base all'equazione su riportata.

Evidentemente l'azoto dell'idrazina durante l'ossidazione non si svolge tutto allo stato gassoso, ma, in parte, si trasforma in ammoniaca, e, forse, anche in acido azotidrico <sup>(4)</sup> e, di qui, il minor consumo di ossigeno.

Ringraziamo il prof. G. B. Bonino, Direttore di questo Istituto, per l'ospitalità concessaci e per l'interesse dimostrato a queste ricerche.

(2) PETERSEN, « Z. F. anorg. Ch. », 51 (1893).

(3) « Journ. Amer. Chem. Soc. », 46, 2014 (1924).

(4) R. E. KIRK e A. W. BROWNE, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 50 337 (1928).

**Geologia.** — *Osservazioni geologiche sulla zona di Monticchio nella bassa valle dell'Agri (Basilicata)* (\*). Nota di FELICE IPPOLITO, PAOLO LUCINI e AMALIA SPADA, presentata (\*\*) dal Socio G. D'ERASMO.

1. Nel corso di una serie di indagini geognostiche e di rilevamenti geologici eseguiti, anche a scopo applicativo (\*), nella cosiddetta « stretta » di Monticchio sull'Agri, poco a monte della confluenza in questo fiume del torrente Sauro (a circa  $40^{\circ}18'$  latitudine N e  $3^{\circ}53'$  longitudine E di M. Mario) abbiamo fra l'altro riscontrata la presenza di una formazione di una argilla verdastra, a scaglie lucenti, con microfauna senoniana. La presenza di una formazione di tale tipo e di tale età, finora mai segnalata in questa parte dell'Italia meridionale (2), ed il fatto che la costituzione geologica della zona si è rilevata — al nostro studio — ben diversa da quanto era lecito attendersi dalle ipotesi oggi da taluno forse troppo affrettatamente emesse e da molti accettate per il Terziario dell'Italia Meridionale, ci hanno indotti a dare alle stampe la presente Nota, che vuole essere soltanto un primo contributo degli studi da quest'anno iniziati, sotto la direzione di uno di noi, sui terreni terziari dell'Appennino Meridionale mediante il contributo del C.N.R.

2. La desolata valle dell'Agri corre, dall'altezza dell'abitato di Spinoso e fino all'altezza di quello di S. Arcangelo, con andamento da ovest ad est, ricevendo sulla destra e sulla sinistra numerosi affluenti che vi sfociano con direzione pressoché normale all'asta fluviale. La valle, che all'altezza di Spinoso presenta varie strettature, dopo aver ricevuto in destra il torrente Nocito, si slarga notevolmente e, dai pressi dell'abitato di Missanello fin oltre quello di S. Arcangelo, si presenta con un fondo piatto ghiaioso, qua e là terrazzato e largo oltre un chilometro, incassato sui due lati nelle formazioni argillo-sabbiose del Pliocene, che si elevano di qualche centinaio di metri sull'alveo con le loro balze degradate e sovente incise da profondi solchi calanchivi. Dopo aver lambito i rilievi collinosi, su cui sono aggrappati Sant'Arcangelo in destra ed Alianello in sinistra, l'Agri volge alquanto il suo corso

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia Applicata della Università di Napoli, nel quadro delle ricerche sul Terziario meridionale finanziate dal C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) Vedi in proposito F. IPPOLITO, *Sulle condizioni geologiche di imposta di talune dighe di sbarramento nell'Italia Meridionale*. « Mem. e Note dell'Ist. di Geol. Applicata dell'Univ. di Napoli », vol. V, 1953.

(2) È bensì segnalato Cretacico in *facies* di « scaglia » (vedi S. ZUBER, « Boll. Soc. Geol. It. », 58, pp. 42-96, 1939; E. MARCHESINI, « Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. », 50, Pisa, 1941), ma non in *facies* francamente argillosa. La presenza di argilla *maestrichtiana* nell'Italia Meridionale è stata finora segnalata soltanto nell'Isola di Capri per la presenza della *Globotruncana magaroensis* Bolli, riconosciutavi da T. LIPPARINI. (Cfr. A. DUCCI, « Boll. Serv. Geol. d'It. », volume LXXIII, p. 349, 1951).

verso settentrione, è, prima di ricevere sulla destra il Sauro e proseguire di poi verso oriente, restringe fortemente il suo alveo tra i colli di Difesa Forno e Monticchio, nella « stretta » che prende appunto nome da questa seconda collina, a valle della quale il fiume di nuovo spaglia selvaggiamente nella sua corsa al mare.

Secondo il foglio 211 della Carta Geologica Ufficiale, rilevato, sotto la direzione di L. Baldacci, da C. Viola e da E. Cortese nel 1889-1890, e riveduto, nel 1904-1905, dallo stesso Viola e da C. Crema, la stretta viene a trovarsi in prossimità di una zona di comunicazione tra due bacini pliocenici: uno minore e pressoché chiuso ad occidente ed uno maggiore orientale, circondati da terreni anteriori, prevalentemente terziari.

Il primo di tali bacini comprende, grossolanamente, la zona tra S. Arcangelo, Stigliano, Guardia Perticara, Armento, S. Chirico Raparo, Episcopia ed Oriolo, mentre il secondo, che va considerato come estrema propaggine sud-orientale della cosiddetta fossa premurgiana, è limitato ad est da una linea che passa, all'incirca, per Rocca Imperiale, Rotondella, Montalbano, S. Mauro Forte e Tricarico. Tra Stigliano e S. Mauro Forte, i due bacini comunicano per uno stretto braccio, ma lungo tutto il tratto da Rotondella a S. Mauro Forte, l'istmo che li divide ha, in parecchi punti, larghezza molto modesta.

Sempre secondo la Carta geologica ufficiale, il primo bacino è circondato da terreni di varia natura, ma genericamente attribuiti all'Eocene medio superiore, con rari lembi di Miocene medio nelle parti NE e SE; inoltre, lungo il margine sud-occidentale del bacino, compaiono, nei terreni eocenici, lembi di particolari rocce magmatiche, le cosiddette « rocce verdi », relativamente estesi e frequenti qui come in nessun altro distretto dell'Appennino Meridionale.

Nella zona della stretta, la citata Carta geologica indica la presenza di « calcari marnosi grigio azzurrognoli » dell'Eocene medio superiore, a contatto, verso SE, con scisti argillosi e argille variegiate, con calcari marnosi nummulitici della stessa età, e verso N, E, W, e SW, con « argille azzurre » e « sabbie gialle », rispettivamente del Pliocene medio e del Pliocene superiore.

In realtà, ben scarso affidamento si può fare, come è noto, su tali indicazioni per uno studio, anche soltanto di massima, di problemi interessanti terreni terziari anteriori al Pliocene.

Tali terreni, infatti, in Italia meridionale indicati anche col termine di « terreni del flysch » ancor oggi poco noti e ancor meno conosciuti, dal punto di vista stratigrafico, all'epoca del citato rilevamento, sono caratterizzati da un'estrema complicazione della tettonica di dettaglio assolutamente non rappresentabile alla scala di 1 : 100.000. Si aggiunga che la natura prevalentemente argillosa di tali terreni, è favorevole alla formazione di una spessa coltre detritica superficiale, soggetta a lenti movimenti di frana nascenti sia nel substrato <sup>(3)</sup> sia nella coltre stessa <sup>(4)</sup> in modo che l'esame dei frammenti

(3) Sono queste le *frane per cedimento*, della nota classifica di R. ALMAGIÀ (1910), tipiche di questi terreni.

(4) Si tratta, in tal caso, di *frane di scorrimento* o *lame*, della citata classifica.



rocciosi presenti alla superficie, che così, spesso, vengono a trovarsi a notevole distanza dall'affioramento di origine, può facilmente disorientare a prima vista il geologo o condurlo a deduzioni del tutto arbitrarie.

Inoltre per la zona in questione, non è da escludere *a priori* anche la presenza di fenomeni di alloctonia, almeno per una parte delle rocce affioranti; tanto più che appena a qualche decina di chilometri in linea d'aria, si rinviene – nella alta valle del Sinni – la ben nota formazione di « argille scagliose ofiolitifere », la cui alloctonia in grande stile (« telealloctonia » di Fabiani <sup>(5)</sup>) può ritenersi dimostrata.

Infatti, anche ove siano assenti le « argille scagliose ofiolitifere » propriamente dette, sono possibili fenomeni analoghi, ma su scala molto più limitata, quando esista un substrato argilloso di spessore notevole, originariamente al disotto di formazioni di rocce più o meno compatte. Può accadere allora che in seguito ai movimenti tettonici, la massa argillosa del substrato venga « spremuta » attraverso le fratture che il corrugamento provoca nelle formazioni sovrastanti, ricoprendole e, talora, scompaginandole ed imballandone i frammenti. In conseguenza dei movimenti di questa massa argillosa si può avere un trasporto, ma sempre entro distanze relativamente modeste, dei lembi scollati, e via via frantumati in maggiore o minore misura, dei terreni più rigidi originariamente soprastanti – e quindi meno antichi – alla formazione argillosa.

Anche i fenomeni di questo tipo sono stati troppo spesso male interpretati e confusi con quelli ai quali dàn luogo le « argille scagliose ofiolitifere », senza prima accertare la reale presenza delle rocce magmatiche caratteristiche di quella formazione, e gli uni e gli altri sono stati talora, e a torto, applicati a coltri detritiche normali in lento moto superficiale di frana. Né, sovente, si è dato il dovuto valore alla costanza delle condizioni di giacitura dei lembi rocciosi affioranti, considerandoli senz'altro non radicati, e neppure si sono sempre eseguite le necessarie, accurate indagini paleontologiche, per accertare le età relative delle varie formazioni e per ricostruirne la successione normale di origine e gli attuali anormali rapporti <sup>(6)</sup>.

Un altro problema presentano, infine, queste tormentate formazioni terziarie più antiche, quello, cioè, dei loro rapporti con le argille e le sabbie del Terziario recente che su di esse poggiano in banchi, in generale, orizzontali o non molto inclinati, per lo più in evidente discordanza stratigrafica. Sembra che quest'ultime formazioni si siano formate nel corso di una trasgressione marina, sui terreni terziari precedentemente emersi ed erosi, ed è quasi accertato che il movimento successivo, forse avvenuto con relativa

(5) « Rend. Acc. Naz. Lincei » (Cl. Sc. fis., mat. e nat.), vol. LIV, fasc. 3, Roma, 1953.

(6) Di recente anche in Sicilia sono state opportunamente distinte da L. OGNIBEN la formazione delle « argille scagliose » (nel senso di « complesso tettonico » del termine), affette da alloctonia in grande stile con evidenti effetti di dinamometamorfismo, da altre formazioni a base argillosa, affette oggi ed anche nel passato da movimenti di frana, che hanno rimescolato e talora caoticizzato l'assieme. Cfr. L. OGNIBEN, « *Argille scagliose* » ed « *argille brecciate* » in *Sicilia*. « Boll. Uff. Geol. d'It. », vol. LXXV, Roma, 1953.

rapidità, che ha portato il Pliocene a quote a volte notevoli sul livello del mare, sia avvenuto per sollevamento di zolle separate da fratture, che hanno interessato, con le formazioni recenti indisturbate, tutte quelle più antiche di già fortemente sconvolte.

3. Nella zona è stato eseguito un rilievo geologico di dettaglio – originariamente in scala 1 : 2000 – mediante il quale sono state riconosciute le formazioni, che di seguito elencheremo. È però opportuno richiamare l'attenzione sulle difficoltà offerte al rilievo dal fatto che gli affioramenti sono quasi del tutto ricoperti da terreno vegetale, detrito superficiale franato, bosco ceduo e pascolo. Senza le numerose trivellazioni, le trincee ed i cunicoli, eseguiti per fini pratici, il rilievo non avrebbe probabilmente condotto al risultato, che abbiamo sintetizzato nell'allegato schizzo geologico (tav. II). È probabile infatti che da una indagine geologica a scala diversa, senza l'ausilio di opere di scavo e di trivellazioni, saremmo stati indotti a ritenere la zona costituita da un assieme argilloso imballante vari frammenti di arenarie, calcari marnosi, marne, ecc.

Il rilievo ha permesso di riconoscere la presenza delle seguenti formazioni:

1° *Formazione pliocenica (pl)*. – Sabbie gialle più o meno cementate, appaiono in riva sinistra del fiume, ove formano due piccoli affioramenti e tutta la parte superiore della Collina di Monticchio. Queste sabbie sembrano poggiare tramite un livello argilloso, ricco di macrofossili, e qualche strato sottile di conglomerato, sulla formazione 2; il contatto è occultato in parte da frane, in parte da numerose faglie.

2° *Formazione delle marne grigie e delle arenarie molassiche (ma)*, *Oligocene*. – Questa formazione è costituita da marne grigie e arenarie molassiche brune micacee, spesso fogliettate, più o meno argillose e talora con impronte vegetali; è stata rilevata in riva sinistra nei canali fortemente erosi e nei pressi dei cunicoli C1, C2, C15 e delle trincee C8 e C18; in riva destra presso le trincee C11 e C12 (vedi schizzo geologico di tav. II e fot. 1 di tav. I).

Generalmente queste rocce sono in strati sottili e molto contorti, tranne nelle parti più alte in sponda sinistra. Lo studio della microfauna rinvenuta negli strati di marna più argillosa induce ad assegnare a questa formazione una età oligocenica (7).

3° *Formazione di calcari marnosi rosati e di calcari arenacei grigi (sr)*, *Eocene medio*. – Si tratta di calcari marnosi rosati e marnosisti di color rosso fegato, intercalati tra loro e con « craie » rosa, e di calcari arenacei grigi,

(7) Nella scarsa microfauna presente, uno di noi (A. SPADA) ha finora potuto isolare le seguenti specie:

*Cyclammina cancellata* Brady; *Trochamminoides irregularis* White; *Trochamminoides velascoensis* Cushman; *Haplophragmoides eggeri* Cushman; *Lituotuba lituiformis* H. B. Brady; *Eponides umbonatus* Reuss; *Globorotalia* cfr. *subconica* Morrow; *Nodosarella* cfr. *subnodosa* Guppy; *Rhabdammina* cfr. *annulata* Andreae; *Saccammina sphaerica* M. Sars; *Haplophragmoides carinatum* Cush. and Renz.

a grana diversa, con intercalazioni marnose e calcareo-marnose grigie e con rari banchi di « craie » biancastra; il calcare marnoso rosato presenta spesso zone verdastre in vicinanza dei piani di stratificazione.

Individuata in riva destra negli affioramenti rocciosi, e nelle trincee C7, C5, C6 e C13, nonché alla sommità di due colli non compresi nel rilievo riportato nello schizzo di tav. II, questa formazione compare inoltre, in riva sinistra, negli affioramenti presso il fiume, a monte e a valle, in vicinanza del limite della zona rilevata (vedi fot. 1 di tav. I).

Si presenta in banchi in genere regolari, ma talora laminati e strappati, sempre con immersione circa a SW e inclinazione in genere superiore ai 40° e comunque variabile entro un campo molto ristretto.

L'esame della microfauna, contenuta nelle « craie » di questa formazione, ha permesso una sicura attribuzione all'Eocene medio o medio-superiore<sup>(8)</sup>.

4° *Formazione di argille più o meno rimaneggiate (as), p.p. Oligocene e Cretacico Superiore.* - Questa formazione sembra occupare almeno in superficie la maggior parte dell'area rilevata, comparendo in tutti i sondaggi, nei cunicoli C1, C2, C3, C16 e nelle trincee C4, C11, C12, C18. L'aspetto morfologico esterno della zona, ove essa è, almeno in superficie, predominante e dove è stata individuata con gli scavi; la presenza di frammenti rocciosi, di molto varie dimensioni, in prevalenza calcari marnosi verdastri a grana finissima, calcari arenacei e brecciole calcaree, da essa inglobati e che spesso si rinvenivano addensati in superficie per dilavamento dell'involucro argilloso; infine l'intima struttura dell'argilla, a scaglie poliedriche, più o meno regolari e minute, talvolta lucenti e con tracce talcosi - stanno a testimoniare i movimenti disarmonici superficiali e profondi subiti dalla formazione stessa.

Pertanto alla stretta di Monticchio nulla parla a favore di una alloctonia in grande stile di questa formazione, mentre vi sono irrefutabili elementi paleontologici per ritenere l'intero complesso costituito da almeno due termini cronologicamente individuabili e distanti, dal comportamento meccanico molto simile e probabilmente in gran parte frammisti, così da rendere per ora impossibile una loro distinzione cartografica.

Infatti nei cunicoli C1, C2, C3 in sponda sinistra dell'Agri, sono stati prelevati alcuni campioni di una argilla verdastra a scaglie grossolane che, all'esame micropaleontologico è risultata del Cretacico Superiore e precisamente del Senoniano.

Sono stati infatti riconosciuti da A. Spada:

*Ammodiscus glabratus* Cush. and Jarvis

*Ammodiscus pennyi* Cush. and Jarvis

(8) La ricca microfauna contiene, fra l'altro: *Globorotalia kochi* Pijpers; *Globorotalia wilcoxensis* Cushman and Ponton; *Globorotalia wilcoxensis* Cushman and Ponton var. *acuta* Toulmin; *Globorotalia subbotinae* Morozova; *Globorotalia lehneri* Cushman and Jarvis; *Globorotalia crassata* (Cushman) var. *aequa* Cush. and Renz; *Globorotalia spinulosa* Cushman; *Globorotalia rex* Martin; *Globorotalia marksi* Martin; *Globorotalia pseudoscutula* Geaessner; *Ellipsonodosaria atlantisae* Cushman; *Ellipsonodosaria verneuili* (d'Orbigny); *Nonion* cfr. *bonairensis* Pijpers; *Anomalina dorri* Cole var. *aragonensis* Nuttall.





Fot. 1. – Veduta della Collina di Monticchio (in sinistra dell'Agri). Nella foto sono indicati i vari affioramenti riconosciuti.



Fot. 2. – Veduta della sponda destra dell'Agri, in corrispondenza della « stretta » di Monticchio.





- Bolivina incrassata* Reuss  
*Bulimna aspera* Cushman and Parker  
*Cibicides* cfr. *constrictus* (Hagenow) Cushman  
*Ellipsonodosaria jarvisi* Cush.  
*Globotruncana arca* Cushman  
*Globotruncana caliciformis* (De Lapparent)  
*Globotruncana cretacea* Cushman  
*Globotruncana fornicata* Plummer  
*Globotruncana lapparenti* Brotzen (Linnei auct.)  
*Globotruncana lapparenti tricarinata* Quereau  
*Globotruncana ventricosa* White  
*Glomospira gordialis* (Jones and Parker) var. *diffundens* Cushman  
 and Renz  
*Haplophragmoides coronata* (H. B. Brady) Cushman  
*Haplophragmoides eggeri* Cushman  
*Haplophragmoides rugosa* Cush. and Waters  
*Hormosina globulifera* H. B. Brady  
*Hormosina globulifera* H. B. Brady var. *trinitatensis* Cush. and Renz  
*Lituotuba lituiformis* (H. B. Brady) Rhumbler  
*Loxostoma limonense* (Cushman) Cushman  
*Nudellum velasconense* (Cush.) Cush. and Jarvis  
*Pelosina complanata* Franke  
*Rhabdammina discreta* H. B. Brady  
*Siphonina* cfr. *prima* Plummer  
*Trochamminoides velascoenses* Cushman

Un campione di argilla a scaglie minute, color rosso-vinaccia, prelevato nella trincea C13 in sponda destra a muro dei banchi della formazione 3<sup>a</sup> è invece risultato di età oligocenica e molto prossima a quella della formazione 2<sup>a</sup> delle marne grigie e delle arenarie molassiche (*ma*) benché sia presente una forma esclusivamente cretacea <sup>(9)</sup>.

- Haplophragmoides carinatum* Cush. and Renz  
*Haplophragmoides periferioexcavata* Subbotina  
*Haplophragmoides* cfr. *eggeri* Cushman  
*Trochamminoides irregularis* White  
*Verneulina* cfr. *polystropha* (Reuss)  
*Rhabdammina discreta* H. B. Brady  
*Hormosina globulifera* H. B. Brady  
*Glomospira charoides* (Jones and Parker)  
*Glomospira charoides* (Jones and Parker) var. *corona* Cush. and Jarvis  
*Ammodiscus dominicensis* Bermudez var. *deformis* Bermudez (?)

(9) Si tratta della *Glomospira charoides* (Jones and Parker) var. *corona* Cush. and Jarvis, la cui presenza deve essere attribuita alla complessa tettonica ed al conseguente rimaneggiamento locale delle formazioni, di cui parleremo più oltre.

Questo secondo orizzonte della formazione argillosa, già rinvenuto e riconosciuto da T. Lipparini nella zona <sup>(10)</sup>, sembra particolarmente sviluppato nell'area, ancora in corso di rilevamento, più a valle della stretta.

Non è stato finora possibile rinvenire faune riconoscibili nei frammenti inglobati nella formazione argillosa, e in particolare nei calcari marnosi verdastri, che sembrano più strettamente collegati con la formazione stessa e precisamente con l'orizzonte oligocenico e che in taluni punti formano affioramenti notevoli in banchi non ancora del tutto scompaginati. Particolarmente interessanti sono due enormi blocchi, indubbiamente non radicati, di arenaria quarzosa di probabile origine eolica, uno in sponda destra e uno in sponda sinistra a valle della zona rilevata <sup>(11)</sup>.

Si può tuttavia dire che nessuno dei materiali, che costituiscono questi « esotici » della formazione argillosa descritta, può ritenersi estraneo all'ambiente di sedimentazione delle altre rocce che compaiono nella stretta: anzi con grande probabilità essi sono da interpretarsi o come residui di banchi in origine regolarmente intercalati nella formazione argillosa, o come lembi strappati alle altre formazioni con le quali questa è venuta in contatto per fenomeni tettonici, e poi ulteriormente frammentati, o infine come normali detriti provenienti dalla erosione di altre formazioni circostanti. In particolare sono assolutamente assenti nella zona rilevata, e nelle sue immediate vicinanze, le rocce verdi caratteristiche delle tipiche « argille scagliose ofiolitiche » telealloctone.

Infine le *alluvioni attuali* dell'Agri occupano il fondo dell'alveo e formano esigue terrazze lungo le sponde, in parte ricoperti dalle frane della formazione 4<sup>a</sup>. Il loro spessore è stato rilevato dai sondaggi B1, B2, B3, B4 e si aggira nell'alveo in media sugli 8 metri; sono costituite da sabbie e ghiaie i cui elementi, delle dimensioni massime di qualche decimetro, sono in prevalenza di natura calcarea o arenacea, pur essendo non rari i ciottoli di natura cristallina, provenienti dai conglomerati, affioranti nell'alto bacino dell'Agri.

4. In conclusione gli studi finora eseguiti inducono a tenere per fermo l'esistenza di argille rimaneggiate di età senoniana al disopra dei calcari marnosi rosati e dei calcari arenacei (*sr*). Questi formano una serie di affioramenti, che presentano uno spostamento relativo reciproco da monte a valle, procedendo da SE a NW, normale alla direzione degli strati, la quale, a sua volta, è pressoché identica in tutti gli affioramenti e coincide con quella NW-SE di molte strutture appenniniche.

Le argille senoniane si trovano inoltre a contatto, o più probabilmente frammiste, ad altre litologicamente molto simili e di età oligocenica ed in

(10) Cfr. « Boll. Ser. Geol. d'It. » vol. LXXII, p. 49 (1950).

(11) Queste arenarie quarzose affiorano largamente nella valle del Sinni, nella stretta a valle dell'abitato di Valsinni; zona che sarà oggetto di prossimo studio, nel quadro delle ricerche sul Terziario meridionale finanziate dal C.N.R.

particolare assai prossima a quella delle marne grigie e delle arenarie molassiche (*ma*) o almeno a quella dei loro livelli più bassi. Le argille dell'uno e dell'altro orizzonte inglobano lembi di quest'ultima formazione, ma non si trovano al disopra degli affioramenti maggiori e più alti in sponda sinistra (ved. fot. 1 tav. I).

Su questi ultimi poggia invece, tramite un livello conglomeratico, la serie pliocenica, interessata, con tutte le sottostanti formazioni, da numerosissime faglie.

Emergono da queste osservazioni alcuni fatti salienti e cioè:

a) la presenza di faglie posteriori al Pliocene, che hanno certamente complicato ancor più la già complessa tettonica precedente;

b) la mancanza di termini del Miocene <sup>(12)</sup> o comunque la presenza di un conglomerato alla base della serie trasgressiva pliocenica, che testimonia una emersione della zona prima di quella età;

c) il cambiamento nel tipo della sedimentazione oligocenica, da argillosa ad arenacea;

d) l'anormale posizione stratigrafica delle argille verdastre, al disopra dei calcari marnosi rosati e dei calcari arenacei, fortemente raddrizzati e smembrati, ma che presentano nei vari affioramenti, sia pure non collegati e irregolarmente distribuiti, giaciture costanti e che coincidono con il generale andamento delle strutture appenniniche.

Per tutte le ragioni avanti accennate non è accettabile, per le argille senoniane, l'ipotesi di una alloctonia in grande stile, né vi sono osservazioni che inducano a considerare « esotici » – provenienti cioè da grandi distanze – tutti i terreni dal Cretacico fino al Pliocene, con esse qui associati.

Infatti anche i lembi inglobati e tettonizzati di marne grigie e arenarie molassiche, che si rinvencono nelle zone più basse, possono considerarsi come originariamente sovrastanti alle argille senoniane ed oligoceniche, franati su queste, scalzate al piede dal fiume, e in seguito ancora ricoperti da successive frane. In effetti nelle parti più alte le suddette marne e arenarie presentano una estensione e una regolarità ben maggiori.

L'ipotesi di una alloctonia in grande stile delle argille sembra ancor meno probabile considerando quanto già detto sull'orientamento costante degli affioramenti dei calcari marnosi rosati e dei calcari arenacei; orientamento che non avrebbe potuto mantenersi ovviamente costante durante un trasporto da distanze notevoli.

La posizione stratigraficamente anormale delle argille verdastre può, a nostro avviso, spiegarsi senza ricorrere all'ipotesi della alloctonia in grande stile o col ritenerle provenienti per fenomeni di « frana orogenica », ma da non grande distanza, da affioramenti prodottisi durante il corrugamento e per la successiva intensa erosione, ovvero col ritenerle originariamente sottostanti alla formazione dei calcari marnosi rosati e dei calcari arenacei, e

(12) Le determinazioni micropaleontologiche relative ai livelli più alti della formazione delle marne grigie e delle arenarie molassiche sono però ancora in corso.



quindi «spremute» durante il corrugamento attraverso le faglie, contemporaneamente prodottesi in tale formazione più rigida.

In questa seconda ipotesi, che tra le due qui avanzate ci sembra più verosimile, il corrugamento avrebbe prodotto deformazioni, probabilmente pieghe rovesciate a NE e fagliate in corrispondenza del fianco inferiore, nella formazione dei calcari marnosi rosati e arenacei, con conseguente suddivisione di questa in «scaglie», sempre più raddrizzate e ravvicinate dal procedere del fenomeno. Per effetto del ravvicinamento si sarebbe avuta la «spremitura» verso l'alto, e lungo il lato inferiore di ogni scaglia, delle argille senoniane, e la loro mescolanza con le argille oligoceniche sovrapposte al lato superiore della scaglia successiva.

Con gli altri fenomeni, verrebbe in tale ipotesi anche spiegata la frammentarietà, che le dislocazioni postplioceniche non bastano da sole a spiegare, della formazione dei calcari marnosi rosati e dei calcari arenacei, smembrata, oltre che dalle sollecitazioni iniziali, anche dal successivo «diapirismo tettonico»<sup>(13)</sup> delle argille senoniane e oligoceniche, forse con scollamenti di interi pacchi di strati e con sovrascorrimenti di singole parti di una stessa scaglia. Le dislocazioni postplioceniche hanno invece probabilmente ulteriormente suddiviso le singole scaglie, anche secondo piani normali alla loro direzione, provocando in tal modo il sopra accennato spostamento reciproco dei vari affioramenti dei calcari marnosi rosati.

Allo stato delle nostre conoscenze, decidere della validità della o delle ipotesi sopra accennate trascende i compiti che ci siamo prefissi nello stendere questa Nota e comunque è questione che va affrontata sulla base di studi e di rilevamenti di dettaglio estesi su aree ben più vaste. I vari problemi tuttora insoluti, cui abbiamo dianzi fatto cenno, saranno oggetto, assieme a molti altri, degli studi che l'Istituto di Geologia Applicata dell'Università di Napoli ha intrapreso col generoso aiuto del C.N.R. e che ci auguriamo vivamente possano svolgersi in collaborazione e col franco scambio di informazioni – doveroso tra uomini di scienza – con tutti quegli altri geologi, cui stanno a cuore gli ancora insoluti problemi della geologia dell'Appennino meridionale.

Nel chiudere questa Nota compiamo il grato dovere di ringraziare il prof. T. Lipparini, che ha voluto cortesemente revisionare, confermandole, le determinazioni micropaleontologiche eseguite da A. Spada.

(13) Cfr. L. OGNIBEN, op. cit.

**Mineralogia.** — *I limiti di sostituzione silicio: alluminio nei minerali magmatici*<sup>(\*)</sup>. Nota II di MOSÈ BALCONI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio U. PANICHI.

Abbiamo già ricordato <sup>(1)</sup>, come oggi si ammetta normalmente che nei fillosilicati la sostituzione  $Al^{IV} : Si_{tot}$  possa raggiungere il valore 1 : 1, pari a quello che si osserva nei tettosilicati.

Si è stati portati ad ammettere questo valore della sostituzione di  $Al^{IV}$ —Si soprattutto in considerazione dei casi presentati da alcuni « fillosilicati » di calcio quali la serie della margarite, xantofillite ecc., la serie della melilite (gehlenite-åkermanite), dal gruppo dell'ottrelite, ecc. In realtà in alcuni di questi casi il rapporto  $Al^{IV} : Si$  supera notevolmente anche il limite 1 : 1 oggi accettato.

Così per la xantofillite Sanero (1940) <sup>(2)</sup> dà, come media delle 4 analisi da lui riportate, la formula:



con un rapporto di sostituzione media  $Al^{IV} : Si_{tot} = 5,5 : 2,5 = 2,20 : 1$ , entro i limiti rispettivamente di:

$$Al^{IV} : Si_{tot} = 5,76 : 2,24 = 2,57 : 1 \quad \text{e} \quad Al^{IV} : Si_{tot} = 5,46 : 2,54 = 2,14 : 1.$$

Nel più recente lavoro di Forman (1951) <sup>(3)</sup> si attribuisce alla xantofillite, in base alla media di 4 analisi, di cui 2 nuove rispetto a quelle considerate da Sanero, la formula:



con un rapporto  $Al^{IV} : Si$  ancora maggiore  $= 2,80 : 1,20 = 2,33 : 1$ .

Il problema di spiegarci questa maggiore sostituzione dell'alluminio al silicio non si pone quindi soltanto rispetto al Si « legante », ma anche rispetto ai valori di sostituzione  $Al^{IV} : Si$  ammessi sinora.

Carattere comune alle due serie della margarite-xantofillite e della gehlenite-åkermanite è quello relativo alla loro giacitura e paragenesi.

Infatti tutti questi minerali non sembrano essere minerali ortomagmatici, ma piuttosto minerali di contatto (ed assimilazione) con rocce calcaree e argillose <sup>(4)</sup>.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Pavia.

(\*\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) Vedi Nota I, questi « Rendiconti », vol. XV, fasc. 6, pp. 427-432 (1953).

(2) « Per. Min. », vol. 11, 53.

(3) « Am. Min. », vol. 36, 450.

(4) *Gruppo delle miche fragili*: comprende accanto al gruppo delle miche di calcio (margarite, xantofillite e clintonite) l'efesite o margarite potassica ed anche il gruppo

Il loro basso tenore in silice e l'elevato tenore in Ca e Al si può quindi interpretare come un processo di desilicizzazione per opera di calcari e di argille.

Questi minerali devono cioè essere considerati come minerali basici per assunzione da parte del magma (e del minerale) di ossido di calcio o di alluminio o magari di entrambi. Si ha cioè un comportamento simile a quello degli alluminosilicati (cianite, ecc.) e, come nel caso di questi, i minerali surricordati devono probabilmente contenere dell'O non direttamente legato al silicio.

L'aggruppamento Si—O tipico di questi minerali è in realtà dato da gruppi  $(\text{SiO}_4)$  indipendenti <sup>(5)</sup>.

cloritoide-ottrelite, che si differenzia dai minerali precedenti per un maggior contenuto di gruppi OH<sup>-</sup>.

La margarite si trova oltre che in parascisti (cloritescisti del Tirolo e micascisti degli Urali (Otkowaja)), associata con il corindone nei giacimenti di smeriglio di Nasso e di altre località dell'Arcipelago Greco e dell'Asia Minore.

L'efesite è stata trovata (1851) a Grumuch-Dagh associata anch'essa a smeriglio, mentre quella descritta da F. C. Phillips («Min. Mag.», 1931) ed esaminata roentgenograficamente da Bernal, ha come paragenesi i minerali manganiferi descritti da Hall («Min. Abstr.», 3, 397) per i quali sembra trattarsi di «sostituzione di materiale argilloso con soluzioni circolanti contenenti manganese».

Quanto alla xantofillite: per quella studiata da Sanero si tratta di cristalli raccolti nel calcare metamorfico per contatto del lago della Vacca (Adamello) e la stessa giacitura ha la xantofillite raccolta al M. Costone nella stessa zona. La xantofillite studiata da Forman appartiene ai classici giacimenti russi entro ai parascisti (talco- e cloritescisti).

Anche la clintonite si trova entro calcari metamorfici (per esempio Amity, N. York, ed al M. Monzoni).

Per il cloritoide è comune l'associazione con smeriglio (Asia Minore) e quella con corindone in calcari metamorfici (Siberia), mentre l'ottrelite è abbastanza comune nei marmi apuani (nelle madrimacchie).

*Gruppo della melilite.* È un gruppo di silicati tetragonali poveri di silice importanti come componenti di scorie e di cementi. Quanto alla paragenesi naturale la gehlenite è un tipico minerale di contatto nei calcari (M. Monzoni); la melilite è sempre associata alla perowskite  $\text{CaTiO}_3$  e si trova oltre che nei basalti melilitici, nella lava di Capo di Bove e nei proietti vulcanici del Somma e anche, secondo Artini (*Le Rocce*, p. 456), nella euctolite o venanzite e nella coppaelite.

L'åkermanite fu trovata, secondo Artini, nei proietti vulcanici del M. Somma, mentre secondo Klockmann essa fu riconosciuta solo nelle scorie.

L'hardystonite (minerale corrispondente di Zn) si trova quale minerale accessorio dei giacimenti zinciferi di Franklin Furnace, N. Jersey.

(5) A proposito appunto della margarite il Bragg già nel 1930 (loc. cit., p. 273) notava che «In margarite independent  $\text{SiO}_4$  groups may be traced», quanto al cloritoide G. W. Brindley e F. W. Harrison scrivono (1952) («Acta Cryst.», 5, 698): «It is seen that the structure is made up of two closepacked octahedral layers,  $L_1$  and  $L_2$ , joined by Si atoms in tetrahedral coordination and by hydrogen bonds. Layer  $L_1$  is essentially a hydroxide layer, whilst layer  $L_2$  resembles that found in corundum, for which the repeat dimensions within an Al—O sheet (9.50 and 9.48 Å, Bragg, 1937, p. 94) agree closely with the corresponding dimensions for chloritoid. The Si atoms do not form continuous silicate sheets as in the micas, but occur within distinct  $(\text{SiO}_4)$  groups and the structural formula may now be written  $[(\text{Fe}''\text{,Mg})_2\text{Al}] (\text{OH})_4\text{Al}_3[\text{O}_2(\text{SiO}_4)_2]$ ».

Solo quando il tenore di Si è sufficiente (come nell'åkermanite  $\text{Ca}_2(\text{MgSi}_2\text{O}_7)$ ) il Si tende a captare ed a raggruppare intorno a sé tutto l'ossigeno<sup>(6)</sup> per costituire gruppi più complessi  $\text{Si}_2\text{O}_7$ , entro l'aggruppamento a rete piana di « fillosilicato » definito dall'associazione  $\text{Me}^{\text{IV}}-\text{O}$ <sup>(7)</sup>.

In questi minerali mi pare che si manifesti in modo evidente il carattere di unità strutturale d'ordine superiore dell'aggruppamento complessivo  $\text{Me}^{\text{IV}}-\text{O}$ , rispetto agli aggruppamenti  $\text{Si}-\text{O}$ , che alla loro volta appaiono come unità di 2° ordine rispetto ai gruppi  $(\text{SiO}_4)$ , il cui carattere di unità costitutiva fondamentale dei silicati mi sembra qui particolarmente chiaro.

In questi minerali molto ricchi di  $\text{Al}^{\text{IV}}$  e poveri di Si appare in modo netto anche il carattere di « Abbildungsgruppe » degli aggruppamenti  $(\text{Al}^{\text{IV}}, \text{Si}-\text{O})$  (ed in generale dei gruppi  $\text{Me}^{\text{IV}}-\text{O}$ ) rispetto agli aggruppamenti  $\text{Si}-\text{O}$  puri. Probabilmente si deve vedere in questo fatto il manifestarsi della tendenza, caratteristica dei silicati, ad assumere una struttura in cui la posizione complessiva degli atomi di ossigeno sia il più possibile uniforme (monoparametrica secondo Niggli), per cui i gruppi  $(\text{SiO}_4)$  iniziali tendono a disporsi nel modo più regolare possibile intorno ai cationi « leganti »<sup>(8)</sup>.

LA SOSTITUZIONE  $\text{Si}-\text{Al}^{\text{IV}}$  NEI TETTOSILICATI E NEI CICLOSILICATI. — È nei *tettosilicati*, ad aggruppamento tridimensionale  $\text{Me}^{\text{IV}}-\text{O}$ , che il Si raggiunge il suo valore massimo uguagliando il  $\text{Si}_{\text{an}}$  ( $\text{Si}_{\text{max}} : \text{Si}_{\text{an}} = 1 : 1$ ), nel quarzo, e in generale in tutte le modificazioni della silice  $\text{Si}_6\text{Si}_6\text{O}_{24}$ , dove l'aggruppamento  $\text{Me}^{\text{IV}}-\text{O}$  è un puro raggruppamento  $\text{Si}-\text{O}$ .

Nel caso di sostituzione totale  $\text{Al}^{\text{IV}} : \text{Si}_{\text{max}}$  si hanno i feldspatoidi:



In questo gruppo rientra, dal punto di vista della sostituzione totale  $\text{Al}^{\text{IV}} : \text{Si}$ ,



che ai feldspati si avvicina anche per la facile attaccabilità da parte degli acidi, attaccabilità legata appunto al rapporto di sostituzione  $\text{Al}^{\text{IV}} : \text{Si}$ .

(6) In questo caso naturalmente non si può più parlare di sali basici.

(7) Nell'åkermanite il Mg ha coordinazione 4!

(8) Da questo punto di vista mi pare possibile spiegarci come recentemente YONDER e KEITH (1951) (« Am. Min. », 36, 519-33), abbiano potuto preparare dei granati privi o quasi di silicio e GOLDSMITH (« Journ. Geol. », 58, 518-36) (1950) dei feldspati in cui tutto l'Al è sostituito dal Ga e tutto il Si dal Ge.

In realtà si tratta qui di « Modellstrukturen » dei silicati nel senso di V. M. Goldschmidt, però con « conservazione » sia delle singole valenze che delle « somme di valenza », a differenza dei modelli proposti originariamente dal Goldschmidt (V. G. VIII (1927), 127-39).



Quando invece il rapporto di sostituzione  $\text{Al}^{\text{IV}} : \underline{\text{Si}}_{\text{max}}$  è 1 : 2 ( $\text{Al}^{\text{IV}} : \text{Me}^{\text{IV}}_{\text{tot}} = 1 : 4$ ), si hanno i feldspati alcalini:



La miscibilità di questi minerali tra di loro è, almeno a bassa temperatura, piuttosto limitata e sembra legata a fenomeni di diffusione (entro alla struttura aperta dei tettosilicati (open-structures di Bragg)) dei cationi alcalini, diffusione che può essere accompagnata o meno da un riordinamento degli atomi Al e Si nelle posizioni reticolari del minerale <sup>(9)</sup>.

Anche nei plagioclasti, già considerati come esempio classico di miscibilità completa tra Ab e An, i più recenti studi (ved. «Acta Cryst.», 1953) portano ad ammettere fenomeni di isomorfismo albite-anortite limitati al 15 % circa dell'un componente nell'altro, ai due estremi della serie.

I termini intermedi si considerano oggi piuttosto come costituiti dalla sovrapposizione regolare («sovrastuttura») di celle albitiche e di celle anortitiche.

Una variazione, secondo rapporti stechiometrici, del rapporto Al : Si sembra piuttosto legata alle dimensioni dei cationi A (secondo la notazione di Niggli). Così mentre il feldspatoide di sodio nefelina  $\text{Na}_6\text{Al}_6^{\text{IV}}\text{Si}_6\text{O}_{24}$  è frequente come componente di rocce, il corrispondente feldspatoide di potassio kaliofilite  $\text{K}_6\text{Al}_6^{\text{IV}}\text{Si}_6\text{O}_{24}$  è raro come minerale.

Il feldspatoide comune di K è invece la leucite  $\text{K}_4\text{Al}_4^{\text{IV}}\underline{\text{Si}}_2\text{Si}_6\text{O}_{24}$ , con rapporto  $\text{Al}^{\text{IV}} : \underline{\text{Si}} = 2 : 1$ , cioè un tettosilicato intermedio tra i feldspatoidi a sostituzione completa  $\text{Al}^{\text{IV}} : \underline{\text{Si}}$  ed i feldspati a rapporto  $\text{Al}^{\text{IV}} : \underline{\text{Si}} = 1 : 1$ .

Quanto maggiori sono le dimensioni dei cationi A, tanto minori appaiono le loro quantità ammissibili nel reticolato tridimensionale  $\text{Me}^{\text{IV}}-\text{O}$ , perché esso si mantenga stabile.

Nel caso di cationi alcalini piccoli ( $\text{Na}^+$ ) la struttura di tettosilicato a sostituzione  $\text{Al} : \underline{\text{Si}}$  intermedia sembra essere resa possibile dalla contemporanea presenza nel reticolato di molecole d' $\text{H}_2\text{O}$ :



Interessante mi sembra, a questo proposito, il caso della pollucite  $\text{Cs}_4\text{Al}_4^{\text{IV}}\underline{\text{Si}}_2(\text{Si}_6\text{O}_{24})$ , in cui, secondo gli studi più recenti (Nel, 1944), il tenore d'acqua del reticolo è proporzionale alla parziale sostituzione (2-5 %) di Na al Cs. Pure confermato sembra in questo minerale il fatto che con l'aumentare delle dimensioni del catione A diminuisce la sostituibilità dell' $\text{Al}^{\text{IV}}$  al  $\underline{\text{Si}}$ . Così il Winchell <sup>(10)</sup> ricorda che: «Pollucite also contains Si apparently replacing Al and Cs leading to  $\text{Cs}_{14}\text{Al}_{14}^{\text{IV}}\text{Si}_{34}\text{O}_{96}(\text{Cs}_{3,5}\text{Al}_{3,5}^{\text{IV}}\underline{\text{Si}}_{2,5}\text{Si}_6\text{O}_{24}$  secondo la formulazione qui usata)».

(9) Trasformazioni ordine-disordine Al-Si dei feldspati: vedi i lavori pubblicati al proposito dalla scuola di Cambridge e di Chicago nelle più recenti annate degli «Acta Crystallographica» e del «Journal of Geology».

(10) «Optical Mineralogy», vol. II (1951), 253.

## TABELLA

 Sostituzione  $Al^{IV}$  : Si nei silicati magmatici

Tipo strutturale (Aggrup- pamento (Si, Al <sup>IV</sup> )-O)	Formula generale (ad O <sub>24</sub> )	n° Si p. for- mula (Si:Si <sub>tot</sub> )	Sostituzione Al <sup>IV</sup> : (Si, Al <sup>IV</sup> ) <sub>tot</sub>		Bibl.
			Media	Massima	
<i>Componenti femici: ((Si, Al<sup>IV</sup>)-O)<sup>0-2</sup> ∞</i>					
AD ESTENS. INDEFINITA:					
<i>Nesosilicati</i> (∞). . . .	(Me <sup>4</sup> ) <sub>6</sub> Si <sub>6</sub> O <sub>24</sub>	0 (0)	0	0	M.T.
<i>Inosilicati</i> (∞ <sup>I</sup> ):					
a) a catene semplici (Piroseni) . . . .	(Me <sup>4</sup> ) <sub>4</sub> Si <sub>2</sub> Si <sub>6</sub> O <sub>24</sub>	2(4/16) (0.25)	bassa	2 (0.25)	H., M. T.
a) catene doppie (An- fiboli) . . . . .	(Me <sup>4</sup> ) <sub>3,5</sub> (OH) <sub>2</sub> Si <sub>2,5</sub> Si <sub>5,5</sub> O <sub>22</sub>	2.5(5/16) (0.312)		2.44 (0.305)	Hr., Hl.
<i>Fillosilicati</i> (∞ <sup>2</sup> ): (Miche)	(Me <sup>4</sup> ) <sub>3</sub> (OH) <sub>4</sub> Si <sub>3</sub> Si <sub>5</sub> O <sub>20</sub>	3(6/16) (0.375)	2.50 (0.312)	3.04 (0.380)	Hr., No.
AD ESTENS. FINITA (∞ <sup>0</sup> )					
<i>Diortosilicati</i> :					
(Si <sub>2</sub> O <sub>7</sub> ) <sup>-6</sup>	(Me) <sup>+6</sup> Si <sub>2</sub> O <sub>7</sub>	1/4(2/16) (0.125)	—	—	M.T.
<i>Sorosilicati</i> :					
a) (Si <sub>3</sub> O <sub>9</sub> ) <sup>-6</sup> . . . .	(Me) <sup>+6</sup> Si <sub>3</sub> O <sub>9</sub>	3/4(4/16) (0.25)	—	—	
b) (Si <sub>4</sub> O <sub>12</sub> ) <sup>-8</sup> . . . .	(Me) <sup>+8</sup> Si <sub>2</sub> Si <sub>3</sub> O <sub>12</sub>	1(4/16) (0.25)	—	—	
c) (Si <sub>6</sub> O <sub>18</sub> ) <sup>-12</sup> . . . .	(Me) <sup>+12</sup> Si <sub>1,5</sub> Si <sub>4,5</sub> O <sub>18</sub>	1 1/2(4/16) (0.25)	1(1/6) (0.166)	—	

 M. T. = H. STRUNZ, *Mineralogische Tabellen*, II Ed., (1949).

H. = H. H. HESS, «Am. Min.», 34, 621-667, (1949).

Hr. = W. T. HARRY, «Min. Mag.», 29, 142-149, (1950).

Hl. = A. F. HALLIMOND, «Am. Min.», 28, 65-89, (1943).

No. = S. R. NOCKOLDS, «Am. Journ. Sc.», 245, 401-20, (1947).

Segue: TABELLA

Tipo strutturale (Aggrup- pamento (Si, Al <sup>IV</sup> )-O)	Formula generale (ad O <sub>24</sub> )	n° Si p. formu- la ( <u>Si</u> :Si <sub>max</sub> )	Sostituzione Al <sup>IV</sup> : (Si, Al <sup>IV</sup> ) <sub>tot</sub>	Bibl.
<i>Componenti sialici: ((Si, Al<sup>IV</sup>)-O) <math>\infty^3</math></i>				
<i>Tettosilicati (<math>\infty^3</math>):</i>		6(8/16) (0.50)	O(min) ; 1/2(max) — (0.50)	M.T.
A) <i>Feldspatoidi:</i>				
a) Nefelina . . . .	Na <sub>6</sub> Al <sup>IV</sup> <sub>6</sub> Si <sub>6</sub> O <sub>24</sub>	0 (0) —	6(1/2) (0.50)	
b) Leucite . . . .	K <sub>4</sub> Al <sup>IV</sup> <sub>4</sub> Si <sub>2</sub> Si <sub>6</sub> O <sub>24</sub>	2(1/6) (0.166)	4(1/3) (0.333)	
B) <i>Feldspati:</i>				
Albite . . . . .	Na <sub>3</sub> Al <sup>IV</sup> <sub>3</sub> <u>Si</u> <sub>3</sub> Si <sub>6</sub> O <sub>24</sub>	3(1/4) (0.25)	3(1/4) (0.25)	
C) <i>Modificazioni della silice . . . . .</i>	<u>Si</u> <sub>6</sub> Si <sub>6</sub> O <sub>24</sub>	6(1/2) (0.50)	0 (0) —	

M. T. = H. STRUNZ, *Mineralogische Tabellen*, II Ed., 1949.

Questa minore sostituzione dell'Al<sup>IV</sup> al Si si deve, secondo me, probabilmente collegare con il maggiore raggio ionico del Cs<sup>+</sup> rispetto al K<sup>+</sup>.

Degno di nota mi sembra il fatto che gli aggruppamenti Me<sup>IV</sup>—O dei minerali sialici a struttura di tettosilicati mentre hanno un comportamento del tutto analogo a quello dei vari aggruppamenti Me<sup>IV</sup>—O dei componenti femici nei casi estremi di sostituibilità nulla e totale del Si con Al<sup>IV</sup>, sembrano avere un comportamento caratteristico per i componenti intermedi. Infatti mentre entro a ciascun aggruppamento Me<sup>IV</sup>—O dei silicati femici la sostituzione Al<sup>IV</sup>:Si pare avvenire in modo praticamente continuo tra i 2 valori estremi zero e massimo, nei tettosilicati la sostituzione sembra aversi piuttosto secondo valori discreti, al variare dei quali corrispondono gruppi particolari di minerali e non serie di cristalli misti, come appare dalla miscibilità solo parziale che si ha, a temperatura ordinaria, tra nefelina e quarzo, tra feldspato sodico e potassico ed anche, secondo gli studi più recenti, tra l'albite e l'anortite.

Quanto alla sostituzione Si:Al<sup>IV</sup> nei *sorosilicati*, essa sembra limitata a quei casi in cui il Si raggiunga nel gruppo chiuso almeno il valore di una unità.

Così finora l'unico caso sicuro di sostituzione  $\text{Al}^{\text{IV}}$  al Si nei ciclosilicati appare quello della cordierite  $\text{Mg}_3\text{Al}_3^{\text{VI}}\text{Al}^{\text{IV}}\text{Si}_5\text{O}_{18}$  (in cui appunto 1 Si viene sostituito da  $\text{Al}^{\text{IV}}$ ), in quanto negli esaciclosilicati l'Si raggiunge il valore di 1,5.

I dati relativi alla sostituzione dell'Al al Si nei vari gruppi di silicati sono, complessivamente, raggruppati nella tabella.

### Conclusioni:

Da questa tabella mi pare risultare chiara la regola di sostituzione  $\text{Al}^{\text{IV}}$  : Si comune a tutti i diversi raggruppamenti reticolari Si—O dei silicati magmatici:

*« I limiti quantitativi di sostituzione  $\text{Al}^{\text{IV}}$  : Si sono in tutti i gruppi di silicati magmatici sempre e soltanto corrispondenti alla sostituzione completa dell' $\text{Al}^{\text{IV}}$  al Si (« silicio legante »), con le limitazioni testé accennate nei casi dei tetto- e dei ciclo-silicati.*

*Allorché nei minerali magmatici la sostituzione  $\text{Al}^{\text{IV}}$  : Si sembra superare i limiti di sostituzione completa del Si, si tratta in realtà di una sostituzione apparente, spiegabile con la paragenesi dei minerali in questione, paragenesi che porta a considerare i minerali stessi piuttosto come minerali metamorfici (soprattutto per contatto e assimilazione) ».*

**Fisiologia vegetale.** — *Attività piridinnucleotidasica in « Solanum tuberosum »* (\*). Nota di LETIZIA RIGGIO BEVILACQUA presentata (\*\*) dal Corrisp. E. REMOTTI.

La demolizione enzimatica dei piridinnucleotidi (PN) a livello dei tessuti animali è da anni ormai nota; avviene in due modi ed è, quindi, opera di enzimi diversi.

Prima nel tempo è stata dimostrata, nel difosfopiridinnucleotide (DPN), la rottura del legame tra nicotinamide e ribosio, ad opera di un enzima, impropriamente chiamato piridinnucleotidasi, o anche DPNasi, presente nel cervello <sup>(1,2)</sup>, nel fegato <sup>(3,4)</sup>, nei globuli rossi del sangue <sup>(5)</sup>, e recentemente isolato anche dalla milza <sup>(6)</sup>. In un secondo tempo, Kornberg e Lindberg <sup>(7)</sup> hanno ottenuto dal tessuto renale, sottoponendolo a una serie di trattamenti

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico « Hanbury » dell'Università di Genova.

(\*\*) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) P. J. MANN e J. H. QUASTEL, « J. Biochem. », 35, 502 (1941).

(2) P. HANLER e J. R. KLEIN, « J. Biol. Chem. », 143, 49 (1942).

(3) H. MCHILWAIN e R. RODNIGHT, « J. Biochem. », 44, 470 e 45, 337 (1949).

(4) C. RICCI, A. POLLERI e A. CANESTRO, « Giornale di Biochimica », 1, 368 (1952).

(5) P. KOHN e J. R. KLEIN, « J. Biol. Chem. », 135, 685 (1940).

(6) J. ZATMAN, N. O. KAPLAN e S. P. COLOWICK, « J. Biol. Chem. », 200, 197 (1953).

(7) A. KORNBERG e O. LINDBERG, « J. Biol. Chem. », 176, 665 (1948).



a base di precipitazioni frazionate, una pirofosfatasi che spezza la molecola del DPN e del TPN (trifosfopiridinnucleotide) a livello del legame pirofosforico.

Nella fig. 1, *a* indica, nella molecola del DPN, il punto di attacco della piridinnucleotidasi, *b* quello della pirofosfatasi.

Per quanto nei vegetali le ricerche su questo argomento siano meno progredite, è nota la presenza di una DPNasi in ceppi zinco-deficienti di *Neurospora crassa* <sup>(8)</sup> e di una pirofosfatasi, attiva sul DPN e sul TPN, nei tuberi di patata <sup>(9)</sup> e nelle foglie di spinacio e di acacia <sup>(10)</sup>.

Nel corso di una ricerca, condotta con altri scopi e tuttora in via di sviluppo, ci siamo accorti che nell'omogenato di tubero di patata lasciato a sè, e non immediatamente estratto con acido tricloroacetico, va rapidamente

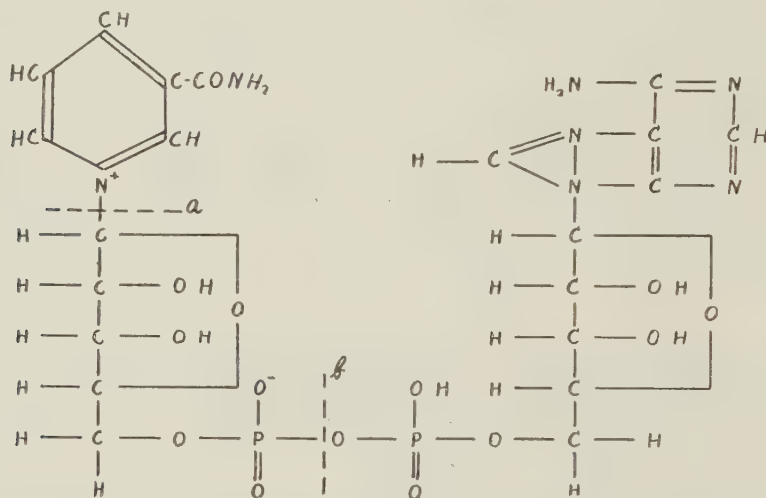


Fig. 1.

diminuendo il contenuto di PN. Tale scomparsa, col metodo di determinazione usato, non può essere attribuita alla attività pirofosfatasi soprasegnalata, in quanto il mononucleotide che ne deriverebbe reagisce come i dinucleotidi, e verrebbe perciò dosato insieme con essi. Si prospettava quindi la possibilità che, anche in questo tessuto, dove sinora era nota soltanto una attività pirofosfatasi, potesse sussistere, come nei tessuti animali e in *Neurospora*, una piridinnucleotidasi finora sconosciuta.

Abbiamo quindi avviato una prima serie di ricerche a questo scopo, trattando soluzioni note di DPN e di TPN con tessuti disintegrati di tubero di patata, e determinando i PN residui dopo un adeguato periodo di incubazione.

(8) N. O. KAPLAN, S. P. COLOWICK e C. C. BARNES, « J. Biol. Chem. », 191, 461 (1951).

(9) KORNBERG e W. E. JR. PRICER, « J. Biol. Chem. », 182, 763 (1950).

(10) W. HASSE e A. SPEET, « Biochem. Z. », 322, 502 (1952).

Per chiarire la natura della eventuale demolizione dei PN, potendosi escludere – come già sopra segnalato – l'intervento della pirofosfatasi, in parallelo con le determinazioni dei PN, abbiamo eseguito anche determinazioni della nicotinamide libera all'inizio e alla fine dell'esperienza.

**MATERIALE E METODI.** – Dai tuberi di *Solanum tuberosum* si ricavano dei cilindretti, dei quali si adopera, per l'esperienza, solo la parte più interna scartando così le gemme. Pesati, si pestano in mortaio fino a completa disintegrazione cellulare; vi si aggiungono quantità note delle soluzioni di DPN o di TPN (prodotti della Sigma Chemical Company, puri, rispettivamente al 65 e all'85 %) e, agitando, si porta a volume. Nella prima serie di esperienze si adopera, a questo scopo, acqua di fonte, al fine di limitare le perturbazioni da modificata concentrazione salina; nella seconda serie, una soluzione di nicotinamide, tale che la concentrazione finale di questa abbia il valore del 2%.

Da ciascun saggio si prelevano due aliquote eguali, una delle quali, dopo aggiunta di qualche mg di solfato cerico, viene precipitata con acido tricloroacetico (conc. finale 10%), mentre l'altra subirà questo stesso trattamento solo dopo permanenza in termostato. La temperatura e la durata di questo periodo di incubazione, variate da saggio a saggio, sono riportate nelle tabelle.

Si centrifuga quindi il materiale precipitato con acido tricloroacetico e sul soprannatante si dosano i PN col metodo di Robinson e coll. <sup>(11)</sup>.

A scopo di controllo, esperienze analoghe vengono allestite anche con tuberi preventivamente sottoposti a ebollizione per 20'.

In alcune prove si eseguisce poi anche il dosaggio della nicotinamide libera all'inizio e alla fine del periodo di incubazione in mezzo acquoso. La nicotinamide viene titolata, senza idrolisi, sull'estratto tricloroacetico neutralizzato alla fenoltaleina, seguendo le indicazioni di Melnick e Field <sup>(12)</sup>.

**RISULTATI SPERIMENTALI.** – Demolizione dei PN da parte di omogenato di tubero di patata dopo incubazione in termostato, in confronto dei controlli con tuberi preventivamente inattivati al calore.

Come risulta dalle tabelle, sul materiale sottoposto a incubazione in acqua, si verifica sempre una scomparsa dei PN presenti all'inizio dell'esperienza. Tale diminuzione, comprendente tanto il DPN e il TPN aggiunti, quanto i PN propri del tessuto, è molto rapida, e raggiunge già il valore del 70% dopo due ore di incubazione, per divenire totale quando questa sia sufficientemente prolungata (18–24 ore). La lieve diminuzione, osservata in qualche caso nei controlli inattivati, rientra nel limite delle cause di errore, anche se probabilmente è l'espressione della relativa spontanea instabilità di questi composti.

(11) J. ROBINSON, N. LEVITAS, F. ROSEN e W. A. PERLZWEIG, « J. Biol. Chem. », 170, 653 (1947).

(12) D. MELNICK e H. FR. FIELD, « J. Biol. Chem. », 134, 1 (1940).

TABELLA I.  
*Attività DPNasica.*

N. esper.	PN. (*) all'inizio micromoli	Mezzo	durata dell'incubazione	temp.	PN alla fine micromoli	Variazione %
Tuberi di saggio						
1	0,12	H <sub>2</sub> O	18 h	25° C	tracce	— 100 %
2	0,18	H <sub>2</sub> O	7 h	25° C	0,03	— 83 %
3	0,12	H <sub>2</sub> O	7 h	35° C	0,02	— 84 %
Tuberi inattivati controllo						
4	0,12	H <sub>2</sub> O	18 h	25° C	0,115	— 5 %
5	0,18	H <sub>2</sub> O	18 h	25° C	0,17	— 5 %
6	0,12	H <sub>2</sub> O	7 h	25° C	0,12	0

(\*) Comprendenti il DPN aggiunto e le piccole quantità di PN (calcolate come DPN) del tessuto.

TABELLA II.  
*Attività TPNasica.*

N. esper.	PN. (*) all'inizio micromoli	Mezzo	durata dell'incubazione	temp.	PN alla fine micromoli	Variazione %
Tuberi di saggio						
1	0,20	H <sub>2</sub> O	2 h	25° C	0,06	70
2	0,43	H <sub>2</sub> O	2 h	27° C	0,13	— 69
3	0,10	H <sub>2</sub> O	2 h	27° C	0,03	— 70
4	0,12	H <sub>2</sub> O	90'	20° C	0,08	— 34
5	0,18	H <sub>2</sub> O	24 h	20° C	0,00	— 100
6	0,31	H <sub>2</sub> O	24 h	25° C	0,00	— 100
Tuberi inattivati controllo						
7	0,20	H <sub>2</sub> O	2 h	25° C	0,195	— 2,5
8	0,10	H <sub>2</sub> O	2 h	27° C	0,10	0

(\*) Comprendenti il TPN aggiunto e le piccole quantità di PN (calcolate come TPN) del tessuto.

TABELLA III.

*Incubazione di DPN e di TPN con omogenato di tubero di patata  
in presenza di nicotinamide al 2 %.*

N. esper.	PN aggiunto	PN all'inizio micromoli	Durata dell'incubazione	temp.	PN alla fine micromoli	Variaz. %
1	DPN	0,12	18 h	25° C	0,115	— 5
2	DPN	0,18	18 h	25° C	0,17	— 5
3	DPN	0,12	7 h	25° C	0,14	+ 16
4	TPN	0,20	2 h	25° C	0,21	+ 5
5	TPN	0,43	2 h	27° C	0,48	+ 11
6	TPN	0,18	24 h	20° C	0,18	0
7	TPN	0,31	24 h	25° C	0,305	— 1,6

TABELLA IV.

*Nicotinamide liberata durante la demolizione enzimatica del TPN  
e del DPN con omogenati di tubero di patata.*

Durata dell'incubazione	TPN demolito micromoli	DPN demolito micromoli	Nicotinamide liberata micromoli
2 h	0,30	—	0,28
2 h	0,20	—	0,20
7 h	—	0,15	0,14
18 h	—	0,12	0,13

Quando l'incubazione avviene in nicotinamide al 2 %, le variazioni del contenuto in PN si mantengono invece in limiti molto ristretti. Per incubazioni di durata prolungata si hanno perdite molto lievi, praticamente entro il campo di errore del metodo; per quelle della durata di poche ore si verifica un aumento, sia pur limitato.

Contemporaneamente alla demolizione dei PN si ha liberazione di nicotinamide, in quantità sensibilmente equimolecolari a quelle dei PN scomparsi.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. — I risultati sopra riferiti ci confermano i nostri dati iniziali di osservazione, circa una demolizione dei PN da parte dell'omogenato di tubero di patata. Risulta quindi dimostrata l'esistenza,



in questo materiale, di una attività degradatrice dei PN, distinta da quella pirofosfatasica già nota. Il fatto che tale attività venga meno nei tessuti inattivati al calore ci indica che si tratta di un enzima; mentre la formazione di nicotinamide libera, contemporanea alla degradazione enzimatica del DPN e del TPN, mettendoci in evidenza che la rottura di entrambe le molecole avviene a livello del legame nicotinamide-ribosio, ci dimostra che deve trattarsi di una piridinnucleotidasi.

Può sorgere il dubbio che, anziché uno, due siano gli enzimi interessati, rispettivamente per il DPN e per il TPN; ma molto verosimilmente, come avviene in numerosi altri casi, la specificità dell'enzima essendo connessa col tipo di substrato e di reazione, deve essere un solo enzima quello cui spetta questa unica reazione comune ai due casi.

L'enzima, o gli enzimi, considerati si dimostrano sensibili alla nicotinamide, poiché in presenza di opportune concentrazioni di questa non avviene la scomparsa del DPN o del TPN; in alcuni casi anzi se ne verifica un aumento. Tale effetto della nicotinamide sulla piridinnucleotidasi dei tessuti animali viene di solito attribuita a inibizione. Analoga interpretazione può essere adottata anche per la piridinnucleotidasi del tubero di patata, a meno che non si voglia considerare semplicemente apparente l'effetto inibitorio, riferendo la permanenza dei PN a un giuoco contemporaneo di sintesi, che la nicotinamide aggiunta dovrebbe provocare, o almeno favorire, per il consueto meccanismo degli equilibri di massa. In questa prospettiva, potremmo allora spiegare l'aumento dei PN che in alcuni dei nostri saggi si accompagna all'aggiunta di nicotinamide. Che il fermento agisca anche come fattore di sintesi è del resto ormai dimostrato con la piridinnucleotidasi estratta dalla milza <sup>(6)</sup>.

Secondo il punto di vista sin qui prospettato, dovremmo attribuire a un gioco di equilibrio di massa l'aver sinora colpito solo la fase distruttiva dei PN, per i quali pure la cellula deve possedere capacità sintetiche. Non possiamo tuttavia escludere che queste ultime siano condizionate da particolari configurazioni esistenti soltanto nelle cellule integre, e che a esili lembi di tessuto sfuggiti alla disintegrazione si debbano attribuire i dati positivi delle nostre esperienze; mentre, come in altri casi avviene, la demolizione di tali strutture nel corso della omogenizzazione, eliminando le condizioni per la sintesi, renderebbe manifesto e determinabile soltanto l'aspetto distruttivo dell'attività enzimatica.

Resta comunque interessante il dato che pirofosfatasi e piridinnucleotidasi, con eguali caratteristiche, quest'ultima, di sensibilità alla nicotinamide libera <sup>(13)</sup> riappaiano egualmente nelle cellule degli animali e delle piante, documento della sostanziale somiglianza, tra i due regni, nel metabolismo di questi fattori fondamentali delle elementari funzioni delle cellule.

(13) Sembra faccia eccezione al riguardo *La Neurospora crassa*, in cui la piridinnucleotidasi risulterebbe insensibile alla nicotinamide, almeno nelle condizioni di concentrazione finora usate.

**Biologia.** — *Aspetti morfologici della sostanza PAS positiva nei neuroni di Vertebrati in condizioni normali e sperimentali* (\*). Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Nell'ambito degli studi che si vanno svolgendo nel nostro laboratorio sul differenziamento del neurone, ho iniziato una serie di ricerche istochimiche. In questa Nota riferisco alcuni risultati emersi da uno studio orientativo sulle reazioni dei polisaccaridi in varî neuroni normali ed in condizioni sperimentali.

Di recente sono stati osservati granuli PAS positivi (Periodic Acid Schiff) in alcuni elementi nervosi di mammiferi adulti (Leblond 1950, Hess 1953<sup>(1)</sup>) e nella sostanza grigia (Bairati e Coll. 1952<sup>(2)</sup>), Hess 1953). Ho voluto con questa ricerca anzitutto descrivere le strutture PAS positive in peculiari neuroni di uno stesso animale, quindi verificare come la PAS reazione si produce in neuroni di animali appartenenti a gruppi zoologici diversi ed infine osservare gli aspetti della sostanza PAS positiva nell'attività reattiva del neurone.

Per la prima indagine ho fissato in Carnoy ed in Helly pezzi di midollo spinale, di midollo allungato, di cervelletto e di corteccia cerebrale (zona prerolandica) di giovane mammifero (*Felis domestica* di 1 mese dalla nascita); per la seconda ho fissato in Bouin ed in Helly midollo spinale di Rettili (*Lacerta viridis*), cervelli di Anfibi (larve di *Triturus vulgaris*) e midollo spinale ed allungato di Pesci (*Solea impar*); per la terza indagine mi sono servito dello stesso materiale (*Tarentola mauritanica*) utilizzato in mie precedenti ricerche per lo studio delle modificazioni relative ai processi rigenerativi o degenerativi del neurone (Baffoni 1950-51)<sup>(3)</sup>.

Varie serie di vetrini sono state allestite ognuna da uno stesso nastro (sezioni di 5  $\mu$  di spessore); prima dell'ossidazione i vetrini sparaffinati sono stati rivestiti di collodio e trattati seguendo gli accorgimenti suggeriti da Lison (1953)<sup>(4)</sup>. Il reattivo di Schiff è stato preparato seguendo la tecnica di Stowell (1945)<sup>(5)</sup>. Per successive indagini sul midollo spinale di *Felis*, oltre alla PAS reazione ho impiegato altri metodi di ossidazione (met. di Bauer all'acido cromico 1 % a 25°C per 24 h; met. di Casella<sup>(6)</sup> modificato:

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) A. HESS, « Journ. Comp. Neurol. », vol. 98, p. 69 (1953).

(2) A. BAIRATI e Coll., « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », vol. 28, p. 1447 (1952).

(3) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. 8, p. 389 (1950); « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. 10, p. 319 (1951).

(4) L. LISON, *Histochimie et cytochimie animales*, Paris (1953).

(5) R. E. STOWELL, « Stain Technol. », vol. 20, p. 45 (1945).

(6) C. CASELLA, « Anat. Anz. », vol. 93, p. 289 (1942).

0,5 % di permanganato + 10 % HCl *n*). Per la localizzazione delle proteine mi sono servito del metodo istochimico del BPB (bleu di bromofenolo alcoolico, sec. Mazia, Brewer e Alfert 1953 <sup>(7)</sup>). Per i quadri della sostanza basofila ho usato i metodi di Nissl (al bleu di toluidina) e di Unna-Papenheim, impiegando nei vetrini di controllo l'acido perclorico (al 10 % a 25°C per 3 h, sec. Di Stefano 1951 <sup>(8)</sup>). Per l'acido ialuronico ho utilizzato il reattivo di Hale (sec. Gomori 1953 <sup>(9)</sup>) trattando i vetrini di controllo con acetone.

In tutti i pirenofori dei neuroni differenziati di *Felis*, sia se fissati in Carnoy che in Helly, ho osservato granuli PAS positivi nel citoplasma, particolarmente evidenti nei neuroni motori del midollo. Nelle cellule ependimali del midollo spinale e delle tele corioidee ho osservato PAS positività diffusa nel citoplasma. Nella sostanza bianca la reazione è risultata negativa, tranne nella tunica dei vasi sanguigni.

Nei vari tipi di neuroni esaminati risulta che i granuli PAS positivi sono particolarmente evidenti nei neuroni motori (centri motori del midollo allungato e corna anteriori del midollo spinale) ove si presentano come zolle minute, marcate e diffuse quasi uniformemente nel citoplasma, un po' più grosse alla periferia del pirenoforo e nella porzione prossimale dei dendriti (fig. 2 B); più scarsi e meno precisi sono apparsi i granuli dei pirenofori nei centri sensitivi del midollo spinale (corni posteriori); nelle cellule di Purkinje del cervelletto i granuli PAS positivi si presentano come grosse zolle poco marcate, rade e generalmente distanti dal nucleo; nella zona associativa della corteccia i granuli PAS positivi si presentano con una qualche evidenza solo nei grossi elementi piramidali: essi sono di forma allungata, sbiaditi e dai contorni sfumati. In tutti i neuroni esaminati, inoltre, con particolare evidenza negli elementi più differenziati, il nucleolo presenta una uniforme e debole PAS positività. PAS negative sono risultate invece le strutture nucleari Feulgen positive (DNA), quali le masse cromatiniche, la cromatina nucleolo-associata e la cromatina sessuale femminile (Barr e Coll. 1950 <sup>(10)</sup>), ed inoltre la zona citoplasmatica presso l'origine dell'assone e le fibre nervose.

Già da questi sommari cenni descrittivi i quadri PAS positivi osservati nelle cellule nervose del sistema nervoso centrale presentano una straordinaria rassomiglianza con quelli ottenuti dalle colorazioni per la localizzazione della sostanza basofila ribonucleica; in proposito però va notato che mentre in questi il nucleolo si colora molto più intensamente della sostanza basofila citoplasmatica, esso assume solo una debole colorazione con la PAS reazione (fig. 2 B, A).

Dall'esame comparativo di neuroni dei vari Vertebrati presi in considerazione, è risultata la presenza di materiale PAS positivo nel nucleolo e nel citoplasma degli elementi differenziati; anche in questi casi ho osservato

(7) D. MAZIA, P. A. BREWER e M. ALFERT, « Biol. Bull. », vol. 104, p. 57 (1953).

(8) H. DI STEFANO, « Stain Technol. », vol. 27, p. 171 (1951).

(9) G. GOMORI, *Microscopic Histochemistry*, Chicago (1952).

(10) Ved.: K. L. MOORE e M. L. BARR, « Journ. Comp. Neurol. », vol. 98, p. 213 (1953).

maggiore vivezza di colorazione e zolle più marcate nei neuroni motori ed aspetti che ricordano la tipica localizzazione della sostanza basofila; particolarmente evidenti in proposito sono risultati i quadri offerti da peculiari neuroni, quali ad esempio i neuroni di Mauthner di Anfibi in cui le zolle PAS positive, per quanto tenui, occupano la sede e presentano il tipico aspetto filiforme delle zolle basofile.

In seguito a tali considerazioni sono stato indotto ad indagare se il quadro PAS positivo subisse modificazioni nell'attività reattiva del neurone. È noto da mie precedenti osservazioni <sup>(3)</sup> che in seguito all'amputazione dell'assone, il pirenoforo reagisce con una comune ipertrofia accompagnata da due tipici aspetti cromatolisi a seconda che il neurone rigeneri la sua fibra (cromatolisi perinucleare) o non la rigeneri e quindi rapidamente degeneri (cromatolisi diffusa). Trattati perciò alcuni vetrini di midollo spi-

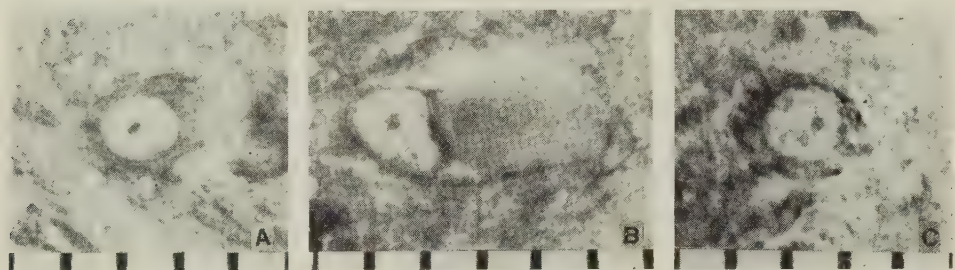


Fig. 1. — PAS reazione nelle cellule motorie del midollo spinale di *Tarentola mauritanica*.

A). controllo; B). neurone in degenerazione (scomparsa di zolle PAS positive nel citoplasma, fascia PAS positiva attorno al nucleo, nucleolo invariato); C). neurone dopo un mese di attività rigenerativa (ipertrofia delle zolle PAS positive) (Helly).

(Ogni intervallo nelle scale in calce = 10  $\mu$ ).

nale caudale di *Tarentola* con la PAS reazione, ho osservato che durante la rigenerazione delle fibre le zolle PAS positive si disgregano e scompaiono dal pirenoforo di pari passo e quasi con le stesse modalità riscontrate per le zolle basofile: scomparsa delle zolle dall'area perinucleare verso la periferia e, dopo un mese dall'operazione, zolle più marcate e grosse che nei controlli (aumento dell'attività funzionale dovuta all'aumentato territorio d'innervazione — fig. 1 C); nel caso di mancata rigenerazione della fibra, quando la cellula nervosa degenera, ho osservato la scomparsa delle zolle PAS positive con le stesse modalità osservate per la sostanza basofila (fig. 1 B). A differenza con quanto avviene per la sostanza basofila, nei neuroni in reattività la PAS positività del nucleolo non subisce apparenti modificazioni; inoltre nel pirenoforo dei neuroni reattivi è risultata sempre molto evidente una sottile fascia PAS positiva attorno al nucleo (fig. 1 B).

Secondo Lison <sup>(4)</sup> la PAS reazione di McManus-Hotchkiss non è strettamente specifica per i polisaccaridi poiché può essere prodotta da certi corpi grassi e da alcune proteine; d'altra parte essa è negativa per glucidi i cui gruppi glicolici sono esterificati (ac. condroitinsolforico, eparina). Per



ciò, nonostante che il problema esuli dai nostri abituali metodi d'indagine, sono stato indotto ad eseguire alcune esperienze ulteriori servendomi di serie di sezioni di midollo spinale di *Felis*. La reazione di Schiff è risultata positiva con tutti i metodi di ossidazione impiegati sia in vetrini con rivestimento di collodio che senza; anche in preparati di controllo di cellule mucipare duodenali, la reazione è risultata più evidente e marcata dopo ossidazione con permanganato ed acido perjodico, meno accentuata dopo ossidazione con acido cromico. Omettendo il processo di ossidazione la reazione di Schiff non si verifica. Le strutture PAS positive della cellula nervosa sono risultate invariate dopo lavaggi delle sezioni sparaffinate in acqua di fonte od in alcool (a 95° per 24 h) o dopo trattamento con acido

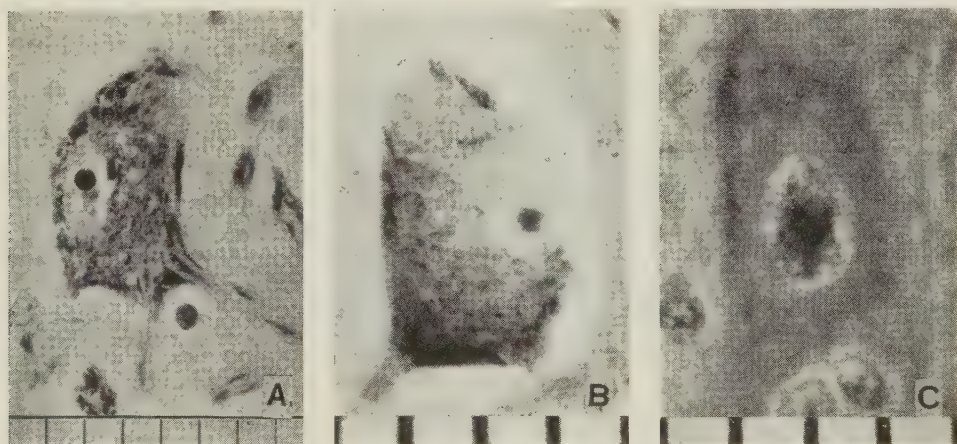


Fig. 2. - Cellule delle corna anteriori di *Felis*:

A). Sostanza basofila (Met. di Nissl al bleu di toluidina); B). Sostanza PAS positiva; C). Reazione istochimica delle proteine (Met. del BPB) (Carnoy).

(Ogni intervallo nelle scale in calce = 10  $\mu$ ).

solforoso (bisolfito al 2 % a 37°C per 24 h); perciò esse non sono dovute ad aldeidi libere o a pseudoreazione, tanto più che non risultano nei preparati in cui è stata eseguita la reazione di Feulgen.

Non sembra probabile che la reazione delle strutture descritte sia dovuta a plasmalogeno o ad altri corpi grassi perché, dopo trattamento delle sezioni in alcool-etero (1:1 a 60°C per 14 h) risulta egualmente positiva. È poco plausibile che le strutture PAS positive delle cellule nervose siano da attribuirsi a proteine poiché la reazione del BPB dà quadri affatto diversi: le proteine infatti non presentano un aspetto granulare, ma uniforme e, specie nei preparati di pezzi fissati in Carnoy, una struttura piuttosto fibrillare, specialmente accentuata nell'assone (PAS negativo) ed una colorazione particolarmente intensa nel nucleolo e nelle altre strutture nucleari PAS negative (ved. fig. 2 C).

Colpito dalla similitudine tra distribuzione della sostanza basofila e della sostanza PAS positiva (fig. 2 A, B), ho voluto indagare se le due strut-

ture avessero la stessa localizzazione; ho rivolto la mia attenzione a cellule in cui le strutture ribonucleoproteiche avessero una precisa localizzazione; in ovociti in accrescimento di mammifero (*Felis* neonato) ho osservato che le « couches vitellogènes », caratterizzate dalla presenza di ribonucleotidi (Urbani 1949<sup>(11)</sup>), sono PAS positive e che in ovociti a diversi stadi di accrescimento la PAS positività segue il comportamento della sostanza basofila. Ciò non significa che la PAS reazione sia data dall'acido ribonucleico, oltre che per le differenze messe in evidenza nel corso della descrizione morfologica, specialmente perché, secondo Gomori<sup>(9)</sup>, le aldeidi non possono essere prodotte da acidi nucleici in seguito a procedimenti ossidativi<sup>(12)</sup> (op. cit., p. 53); infatti dopo idrolisi acida di 3 ore ho osservato che mentre le strutture basofile della cellula nervosa perdono le loro affinità tintoriali, quelle PAS positive restano immodificate ed è necessaria una prolungata idrolisi (18-24 h) perché esse si affievoliscano.

Per tutte le considerazioni precedentemente esposte, appare molto probabile che la PAS positività delle cellule nervose sia dovuta a carboidrati: non però a glicogeno poiché dopo digestione con ptialina (incubazione con saliva più volte rinnovata a 37°C per 1 h) la reazione non differisce da quella dei vetrini di controllo (non trattati), né ad acido ialuronico poiché il rettivo di Hale ha offerto quadri dissimili (zolle rade, sottili ed allungate in prossimità della membrana cellulare, nucleolo nettamente negativo) e poiché dopo allontanamento dell'acido ialuronico (trattamento in acetone) la PAS reazione è positiva.

La presenza di carboidrati nella cellula nervosa, ma specialmente la loro localizzazione al livello delle strutture basofile ribonucleiche, fa prospettare l'ipotesi che la sostanza PAS positiva del nucleolo e del citoplasma rappresenti il materiale energetico necessario al neurone rispettivamente per le sintesi delle ribonucleoproteine e per le ancor più imponenti sintesi proteiche della cellula nervosa. Tale supposizione è in perfetto accordo non solo con le osservazioni morfologiche, ma anche con dati biochimici e ricerche fisiologiche; è dimostrato infatti che i neuroni motori (più ricchi di sostanza PAS positiva) hanno un metabolismo più elevato di quelli sensitivi (Richter)<sup>(13)</sup>; è stato dimostrato inoltre che il Q. R. del tessuto nervoso si aggira attorno all'unità (è perciò di natura essenzialmente carboidrata), ma che il combustibile utilizzato non è il glicogeno (che non varia nel corso dell'attività funzionale) ma bensì glucosio (ved. Coxon<sup>(13)</sup>) del quale è stata dimostrata l'indispensabilità per le sintesi dell'acetilcolina e delle proteine (Richter<sup>(13)</sup>).

(11) E. URBANI, « Riv. di Biologia », vol. 41, p. 331 (1949).

(12) In proposito ho osservato che dopo ossidazione con permanganato (5' a 25°C e successivo trattamento giusta il metodo di Casella) le strutture desossiribonucleiche risultano PAS positive; costantemente negative invece appaiono dopo ossidazione con acido cromatico (met. di Bauer).

(13) Ved. in « Biochem. Soc. Symp. », n. 8, *Metabolism and Function in nervous tissue*, Cambridge (1952).

Non è ancora noto sotto quale forma il glucosio si deposita nella cellula nervosa; la sostanza PAS positiva probabilmente è un mucoide.

CONCLUSIONI. Nel pirenoforo e nel nucleolo di neuroni motori, sensitivi ed associativi del sistema nervoso centrale di mammiferi sono state descritte strutture PAS positive; è risultato che la PAS reazione, in questo caso, è dovuta verosimilmente a carboidrati.

Strutture PAS positive sono state osservate e descritte nei neuroni di diversi Vertebrati. La localizzazione delle strutture PAS positive ha un esatto riscontro con quella delle proteine ribonucleiche; è stata perciò prospettata l'ipotesi che la sostanza PAS positiva del neurone rappresenti il materiale energetico di riserva per l'attività funzionale del neurone; in favore di ciò depongono i risultati sul comportamento della sostanza PAS positiva durante l'attività reattiva di certi neuroni motori ed i dati di ricerche biochimiche e fisiologiche eseguite sul sistema nervoso.

**Biologia.** — *Correlazioni tra sistema nervoso ed arti.* - II. *Comportamento degli arti soprannumerari da induzione abnorme* (\*). Nota di TEODORO PERRI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

In una Nota precedente (1) ho esposto i risultati che ho ottenuto in ricerche sulle correlazioni tra sistema nervoso ed arti, cominciando con l'indagare, in esperienze di trapianto di abbozzi di arto in embrioni di *Bufo vulgaris*, l'innervazione degli arti così trapiantati, i cambiamenti dei gangli spinali ed il comportamento dei corrispondenti segmenti del midollo spinale. I trapianti furono eseguiti dallo stadio di bottone codale piccolissimo sino allo stadio di contrazioni appena iniziate. Gli arti trapiantati (posteriori) presentano spesso la parte scheletrica assai ben conformata: a volte si ebbe dal trapiantato lo sviluppo di due arti. Osservai che quando si ha uno sviluppo almeno discreto della muscolatura, si ha pure evidente innervazione ed iperplasia dei gangli spinali; l'innervazione può provenire sia dai plessi degli arti normali sia dai nervi intermedi. Quando invece la muscolatura è assente o quasi, allora non si ha più innervazione. Non ebbi mai chiare modificazioni numeriche o volumetriche della parte motoria dei corrispondenti segmenti del midollo spinale.

In una seconda serie di esperienze, eseguii il trapianto (in *Bufo vulgaris* a bottone codale piccolissimo) dei due presunti abbozzi degli arti posteriori insieme con una parte, di estensione varia, di organi assili del tronco comprendenti un tratto (anch'esso più o meno lungo) di midollo spinale. Quando il

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata «G. B. Grassi» dell'Università di Roma, con contributi del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) In questi « Rendiconti », 1953.



midollo spinale così trapiantato comprendeva almeno in parte il futuro tratto lombo-sacrale, allora si aveva che presentava ben differenziati i corni motori con grosse cellule motorie, e da questo tratto di midollo spinale erano innervati, in modo del tutto regolare, i due arti dei quali avevo trapiantato gli abbozzi. In queste esperienze gli arti trapiantati si presentavano ben sviluppati e, ciò che più importa, erano mobili sia dopo stimolazione che in maniera apparentemente spontanea. I loro movimenti erano indipendenti da quelli del portatore; l'esame microscopico pose in evidenza che non vi erano connessioni nervose tra il trapiantato ed il sistema nervoso del portatore. Invece se l'operazione venne condotta in modo che il tratto di midollo spinale trapiantato non comprendeva il segmento lombo-sacrale, bensì il midollo sito caudalmente rispetto a questo tratto, allora gli arti si svilupparono con uno scheletro ben conformato ma senza muscolatura e senza evidente innervazione. Non è stato ancora ricercato se, nel caso il tratto di midollo trapiantato sia troppo piccolo, si possa avere innervazione oltre che dal midollo trapiantato anche dal midollo del portatore.

Nella detta Nota <sup>(1)</sup> esponendo tali risultati, dissi esplicitamente che queste ricerche hanno interesse sia per sé stesse, sia per una utile comparazione con il comportamento degli arti soprannumerari da stimoli abnormi. Ed in realtà questi differenti tipi di esperienze servono a chiarirsi tra loro, e tutti insieme concorrono ad una migliore conoscenza dei problemi generali del sistema nervoso: connessioni tra sistema nervoso ed organi periferici; influenze reciproche tra struttura del sistema nervoso e struttura degli organi periferici, ecc.

Nella stessa Nota ho riportato vari dati sulla morfologia comparata, ecologica e causale del sistema nervoso. Nel lavoro in esteso (che comparirà nella « Rivista di biologia ») avrò occasione di parlarne più ampiamente; qui è sufficiente richiamare qualche dato. Il Balinsky <sup>(2)</sup> occupandosi dell'innervazione degli arti soprannumerari indotti negli Urodeli mediante stimoli abnormi (trapianto di un'otocisti) osservò che essi erano innervati dai nervi spinali 7°-11° ed ebbe pure iperplasia dei gangli corrispondenti; nei suoi casi la muscolatura era sempre presente; gli arti furono sempre rigidi. Sulla scorta delle ricerche del Detwiler, egli interpretò che l'immobilità degli arti fosse dovuta nei suoi casi al fatto che essi non ricevevano innervazione dal segmento brachiale del midollo spinale. Per gli arti soprannumerari trovati in natura, ho già ricordato che furono descritti alcuni casi di mobilità in Rana sia dal Canella che dal Bueker; questi arti erano innervati dal plesso brachiale o dal plesso lombo-sacrale.

INNERVAZIONE DEGLI ARTI SOPRANNUMERARI DA INDUZIONE ABNORME (Ved. figura). — Gli arti soprannumerari da induzione abnorme, dei quali qui mi occupo, li ottenni in *Bufo vulgaris* usando come sorgente di stimolo il trapianto, sul tronco di embrione normale, della parte apicale della testa,

(2) « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 110, p. 71 (1927).



oppure della regione branchiale, asportate da embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali. I casi che ho esaminato dal punto di vista del sistema nervoso li ebbi in gran parte nel 1951-1953, qualcuno negli anni precedenti. Ho per ora tenuto conto di casi giunti alla metamorfosi nei quali gli arti indotti sono con scheletro ben conformato. In vari casi ho usato la tecnica specifica all'argento colloidale del Bodian.

Gli arti soprannumerari indotti furono quasi sempre rigidi, solo pochissimi presentavano mobilità.

Nei casi di arti indotti mobili, si tratta di arti vicinissimi ai normali arti anteriori o ai posteriori. L'esame microscopico ha messo in evidenza che

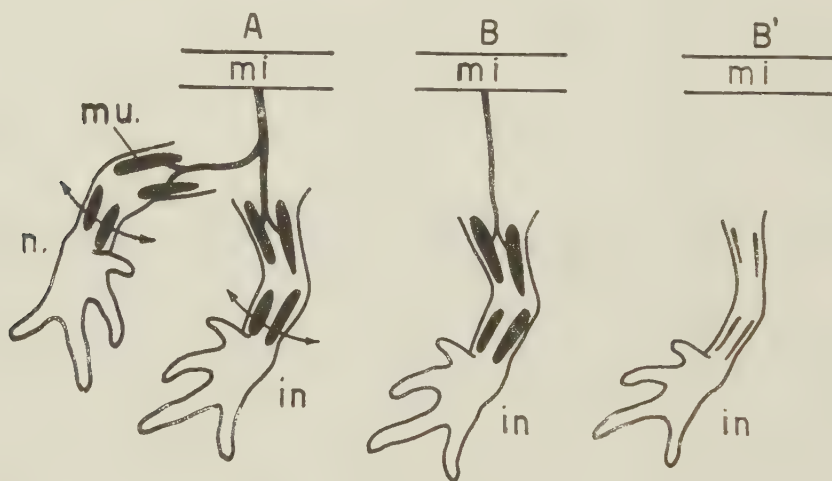


Fig. 1. - Schema dei risultati raggiunti. È limitato alla parte di midollo corrispondente alla metà anteriore del tronco, ove la somatopleura ha la « competenza » a dare arti soprannumerari anteriori.

In A è schematizzato il plesso brachiale che innerva sia l'arto normale (*n*) sia, ed in quantità sufficiente, l'arto indotto (*in*): i due arti sono mobili (il che è indicato dalle frecce), tra loro in simmetria speculare e i loro movimenti sono specularmente simmetrici. In B è rappresentato un arto indotto che presenta abbondante muscolatura (*mu*) e innervazione da parte di un tratto di midollo spinale sito caudalmente rispetto al tratto brachiale. In B' è un arto indotto con muscolatura assente o quasi, e manca l'innervazione.

la loro innervazione proviene essenzialmente dal plesso brachiale, rispettivamente dal lombo-sacrale. In due casi l'arto indotto e il vicino arto normale, ambedue anteriori e tra loro in simmetria speculare, si muovevano in modo specularmente simmetrico ossia avvicinandosi o allontanandosi tra loro. Ciò è d'accordo con l'esperienza del Weiss <sup>(3)</sup> che trapiantando, in larve avanzate di Urodelo, un arto anteriore destro vicino al normale arto anteriore sinistro, osservò che i due arti si muovevano in modo specularmente simmetrico. Nei miei casi trattasi non di trapianto bensì d'induzione abnorme. In un altro caso di arto indotto ottenuto in questo stesso Istituto dalla Dei <sup>(4)</sup>, l'arto soprannumerario (posteriore omolaterale) si muoveva parallelamente

(3) *Principles of development*. Holt. New York, 1939.

(4) « Rivista di biologia » (in corso di stampa).

al vicino arto normale posteriore; in questo caso, che esaminai dal punto di vista dell'innervazione, osservai che questa era data dal plesso lombo-sacrale. Com'è noto il Detwiler <sup>(5)</sup>, in casi di trapianto autoplastico omolaterale di abbozzi di arto in Urodeli, ottenne che i due arti (il trapiantato e quello rigenerato), innervati dallo stesso plesso brachiale, si muovevano parallelamente. I muscoli omologhi, ossia dello stesso nome, si contraggono in queste condizioni sperimentali contemporaneamente, onde la specularità di movimento oppure il parallelismo a seconda che i due arti siano della stessa oppure di opposta lateralità. Ne concludo che queste leggi si verificano anche negli arti da induzione abnorme negli Anuri.

Nei miei casi di arti indotti sopra ricordati, la mobilità si manifestava sia in seguito a stimolazione sia in maniera apparentemente spontanea; e spesso stimolando o l'arto normale o il vicino soprannumerario si muovevano ambedue. In altri casi la mobilità degli arti indotti era meno accentuata, ed anche qui l'innervazione era data, almeno in gran parte, dai normali plessi degli arti. In tutti questi casi di mobilità la muscolatura è abbondante. Nell'intumescenza interessata, pur avendosi mobilità dell'arto e quindi sicura presenza d'innervazione motoria, non ho notato chiare modificazioni della sua parte motoria.

I casi di arti indotti rigidi, come ho già accennato, sono di gran lunga più numerosi. Nei casi in cui essi presentano abbondante muscolatura si ha che l'innervazione è bene evidente ed è fornita anche (o solamente) dai nervi che normalmente non innervano gli arti. Vi è parallelismo tra quantità d'innervazione e quantità di muscolatura. I gangli spinali corrispondenti presentano una notevole iperplasia. Anche in questi casi non ho potuto porre in evidenza modificazioni chiare nella regione motoria della corrispondente parte del midollo spinale, in accordo con quanto ho detto poco sopra per i casi di arti mobili.

In quegli arti indotti, invece, nei quali pur avendosi una buona conformazione dello scheletro la muscolatura è scarsissima o praticamente assente, non si ha una evidente innervazione.

Debbo precisare che negli arti indotti nei quali è sviluppata la muscolatura si ha che l'iperplasia dei gangli spinali è dovuta sia alla muscolatura (propriocettori) sia alla cute dell'arto. Invece per gli arti indotti privi o quasi di muscolatura, l'iperplasia dei gangli spinali è dovuta alla cute: in queste condizioni i gangli spinali si presentano aumentati di volume però in misura molto minore e talora pochissimo: solo in qualche caso ho potuto osservare qualche fascetto nervoso in rapporto con la cute. Rammento che in queste ricerche sui rapporti tra arti e sistema nervoso, ho inteso occuparmi essenzialmente dei rapporti tra muscolatura ed innervazione.

Per fare un parallelo tra i reperti ottenuti in questi casi di arti indotti e quelli in trapianto di arti, è anzitutto da ricordare la mobilità che si ha, almeno in alcuni casi, negli arti indotti, mentre non si è avuta negli arti tra-

(5) « J. comp. neur. », vol. 38 (1925).

piantati che ho finora esaminati. Mi limito qui ad osservare che i fasci nervosi che penetrarono negli arti mobili furono di dimensioni molto maggiori di quelli che riscontrai nei miei casi di arti trapiantati; ed è ben noto che la quantità di fibre nervose ha pur essa importanza. Non posso invece dar peso al fatto che nei casi d'induzione gli arti vicini ai normali sono della stessa natura (ossia anteriori, rispettivamente posteriori), non solo perché vi è concordanza di vedute nell'ammettere l'aspecificità dell'innervazione, ma soprattutto perché gli arti posteriori trapiantati e innervati dal plesso lombo-sacrale si mostrarono, nei miei casi, parimenti immobili.

Per quanto riguarda il comportamento dei gangli spinali si è avuto che essi nei casi di arti sia trapiantati che indotti, sono iperplastici in misura notevole quando vi sia muscolatura abbondante e ben evidente innervazione. Sia nei casi di arti trapiantati che indotti, non sono riuscito a porre in evidenza un chiaro aumento numerico o di grandezza delle cellule motorie del tratto interessato di midollo spinale neppure, come dissi sopra, nei casi di mobilità. Posso qui aggiungere un caso di trapianto nel quale si sviluppò un arto atipico, e inoltre si ebbe che l'arto normale posteriore si duplicò, onde due arti ben sviluppati, tra loro in simmetria speculare e che si muovevano in modo specularmente simmetrico: orbene anche in questo caso non ebbi, sul lato interessato, evidenti modificazioni della parte motoria del midollo spinale. Tale comportamento delle cellule motorie sfugge tuttora, per vari aspetti, ad una interpretazione soddisfacente, e sarà oggetto di ulteriori valutazioni.

Vediamo ora quegli arti, trapiantati o indotti, che pur avendo uno scheletro ben conformato, non presentano muscolatura in quantità almeno discreta né innervazione evidente; e dico « evidente » perché anche con tecniche specifiche com'è quella del Bodian, un fascetto nervoso per essere rilevabile occorre che non sia al di sotto di certe dimensioni sia pure molto piccole. Osservai nella mia Nota precedente che esiste un chiaro rapporto tra quantità di muscolatura e quantità d'innervazione: interessantissima questione la quale rientra nel vasto problema delle mutue influenze tra sistema nervoso ed organi periferici e che non ha ancora ricevuta una soddisfacente spiegazione. Anche negli arti indotti, se non hanno una certa quantità di muscolatura, non vi è evidente innervazione. Lo scheletro dell'arto, che essendo ancora cartilagineo non ha innervazione, non pare eserciti alcuna azione attrattiva sui nervi; se viceversa il sistema nervoso eserciti una qualche influenza sullo scheletro e in particolare sulle articolazioni, è una questione che non può ancora considerarsi del tutto chiarita. Ricordo a questo proposito che, sia negli arti da induzione abnorme che in quelli trapiantati, si possono avere articolazioni ben conformate pur in assenza di funzione. Per quanto riguarda la cute, ne ho parlato poco sopra.

È certamente di grande importanza l'esaminare il perché gli arti non innervati in modo sufficiente dal normale plesso brachiale o da quello lombo-sacrale non siano risultati mobili. Un esame della presenza o meno di espansioni nervose motorie nei muscoli, condotto anche dal punto di vista quan-

titativo, potrà forse chiarire la questione: ho già sopra accennato, infatti, all'importanza che può avere la quantità d'innervazione.

Poiché la particolare struttura delle intumescenze anteriore e posteriore, ossia il differenziamento che si ha in esse dei corni motori e delle grosse cellule motorie, è condizionata dalla presenza degli arti (se infatti manca un arto normale scompaiono sul lato interessato dell'intumescenza le dette peculiarità), e poiché gli arti indotti o trapiantati pur essendo innervati non determinano detti differenziamenti nel midollo intermedio alle intumescenze, risulta chiaro che anche i risultati esposti a proposito degli arti indotti convalidano l'esistenza di un diverso comportamento (competenza) tra le intumescenze e le altre parti del midollo spinale, ossia si pongono in evidenza differenze regionali nel midollo spinale di Anuri (*Bufo vulgaris*).

Da quanto ho esposto in questa Nota risulta, è ormai sufficiente il solo ricordarlo, piena concordanza di risultati pur in condizioni sperimentali differenti.

#### CONCLUSIONI.

1. Gli arti soprannumerari indotti in *Bufo vulgaris*, se la loro muscolatura si è sviluppata in quantità almeno discreta, presentano evidente innervazione; se invece la muscolatura è assente, allora l'innervazione manca. Non si sono mai osservate chiare modificazioni nella parte motoria del midollo spinale interessato.

2. Gli arti indotti che presentano mobilità sono ampiamente innervati dal plesso brachiale o dal plesso lombo-sacrale.

**Biologia.** — Osservazioni citologiche sulle ghiandole salivari di «*Eobania vermiculata*» Müll. (\*). Nota di LEA URBANI MISTRUZZI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

La presente ricerca fa parte di un piano di studio al quale sto lavorando già da alcuni anni sulla citofisiologia della secrezione. Ho già pubblicato su questo argomento le osservazioni sulle variazioni del DNA e RNA durante il ciclo di lavoro del pancreas in seguito a stimolo pilocarpinico <sup>(1)</sup> e sulle ghiandole dell'albumine di un mollusco Gasteropode durante il ciclo annuale <sup>(2)</sup>. In base a questi lavori, oltre alle osservazioni puramente citologiche che hanno messo in evidenza alcune cose nuove, si sono ottenute ulteriori conferme della ipotesi della partecipazione del RNA alla formazione del secreto e delle variazioni quantitative del DNA in rapporto alla fase di lavoro della cellula.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma. Ringrazio la sig.na M. Contursi che ha eseguito una parte dei preparati.

(\*\*) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) L. MISTRUZZI-URBANI e V. PACINI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. X, 427 (1951).

(2) L. MISTRUZZI-URBANI e R. GALASSO, «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. XIV, 323 (1953).



Nelle ghiandole dell'albume ibernanti ho osservato una enorme quantità di parasomi, corpi di natura ergastoplasmatica, che scompaiono nella ghiandola in attività funzionale; essi a mio modo di vedere rappresentano dei depositi di RNA accumulato e utilizzato al momento della secrezione.

Si vedano a questo proposito le analogie con gli studi sui rapporti tra acidi nucleici e vitellogenesi (Cotronei, 1910-1911 <sup>(3)</sup> Urbani 1949-1953 <sup>(4)</sup>).

Continuando in queste ricerche sul ciclo stagionale e funzionale delle ghiandole ho esteso le mie osservazioni al comportamento delle ghiandole salivari dell'*Eobania vermiculata* Müll. a vari tempi dell'alimentazione e durante il ciclo annuale, ossia in rapporto all'estivazione cui vanno soggetti periodicamente questi animali. Premetto che intendo come ciclo funzionale quello che si stabilisce in seguito all'applicazione di uno stimolo a una ghiandola indipendentemente dal fatto che lo stimolo sia artificiale (rappresentato per esempio dall'iniezione di pilocarpina) o naturale se è invece dato, come nel caso da me preso in esame, dall'alimentazione dopo un periodo di digiuno.

Ho scelto le ghiandole salivari perché molto interessanti e complesse dal punto di vista citologico e perché su esse i dati della letteratura sono quanto mai contrastanti. Inoltre quando ho iniziato il presente lavoro (1951) nulla era stato fatto dal punto di vista istochimico su questo materiale per cui ho pensato che l'applicazione dei metodi per la messa in evidenza dell'RNA avrebbe potuto fornire delle delucidazioni sulla citologia della ghiandola salivare. Nel frattempo è uscito un lavoro di Leuchtenberger e Schrader (1952) <sup>(5)</sup> che riporta le misure microspettrofotometriche delle quantità di DNA dei nuclei delle cellule delle ghiandole salivari nelle varie fasi di lavoro. Questi Autori hanno osservato uno sfalsamento delle quantità di DNA rispetto alle quantità del secreto, calcolata in base al metodo di Hotchkiss per i polisaccaridi; ossia hanno visto che quanto più i nuclei sono ricchi di DNA tanto meno secreto è presente e viceversa. Essi concludono che i pentosi del DNA potrebbero essersi trasformati in pentosopolisaccaridi citoplasmatici. Queste conclusioni meritano di essere prese in esame; e di ciò mi occuperò in un lavoro in esteso.

Gli altri lavori sulle ghiandole salivari riguardano la loro struttura citologica e la presenza o meno in esse di enzimi o di altre sostanze.

Per quanto riguarda la morfologia esterna esse sono rappresentate da due formazioni biancastre fogliiformi, avvolte da una membrana connettivale che manda dei sepimenti nel corpo della ghiandola stessa. Esse sono collegate mediante legamenti allo stomaco e all'esofago. Sono in numero di due, poste ai lati dell'esofago (seguo la terminologia di Haffner <sup>(6)</sup>) e sono

(3) G. COTRONEI, « Boll. Soc. Nat. Napoli », 24, 155 (1910) e « Arch. Zool. », 5, 41 (1911).

(4) E. URBANI, « Rivista di Biologia », 41, 331 (1949); « Rend. Acc. Naz. Lincei », XIV, 558 (1953).

(5) C. LEUCHTENBERGER e F. SCHRADER, « Proceed. Nat. Acad. of Sciences », vol. 38, 99 (1952).

(6) HAFFNER, « Ztsch. wiss. Zool. », vol. 121, 126 (1923).

fornite ciascuna di un dotto escretore (derivante dalla confluenza dei dotti escretori intraghiandolari) che versa il secreto nella prima parte dell'intestino anteriore.

Come ho già detto, citologicamente l'aspetto della ghiandola è molto complesso e questo spiega le diverse nomenclature e classificazioni dei precedenti Autori.

Questi si possono dividere in due categorie: la prima di coloro (Monti 1899 <sup>(7)</sup>, Pacaut e Vigier 1906) <sup>(8)</sup>, (Frankenberger 1923 <sup>(9)</sup> Voinov 1934) <sup>(10)</sup> che ritengono presenti due o tre genealogie o serie cellulari che hanno un ciclo proprio e un secreto particolare e l'altra rappresentata da quelli (Barfurth 1885 <sup>(11)</sup>, Lange 1902 <sup>(12)</sup>, Krijgsmann 1925) <sup>(13)</sup> che considerano i diversi tipi di cellule come rappresentanti le diverse fasi funzionali che ogni cellula attraversa per compiere il suo lavoro.

Nell'intento di stabilire le caratteristiche dei vari elementi alcuni Autori hanno preso in considerazione la colorabilità del citoplasma con i vari coloranti (Monti, Pacaut e Vigier, ecc.) altri il comportamento dei granuli di secreto (Frankenberger e Voinov) e altri ancora il comportamento del nucleo e la maturazione dei granuli (Krijgsmann) prescindendo dal dettagliato processo citologico che precede la loro formazione.

Tutti questi lavori fanno correre al lettore il rischio di perdersi in un labirinto di descrizioni e si osserva talvolta come gli stessi elementi considerati da un Autore come capostipiti di una serie (mucigena ad esempio) siano considerati da altri come la fase terminale di un'altra serie (zimogena ad esempio).

Tra tutti i lavori che ho trovato in letteratura quello più corrispondente alle mie osservazioni è risultato quello di Krijgsmann e nella discussione dei risultati mi riferirò essenzialmente a questo Autore.

Per osservarne il ciclo annuale, le ghiandole salivari dell'*Eobania vermiculata* Müll. (50 esemplari) sono state fissate durante il letargo invernale (novembre e dicembre) al risveglio in primavera (fine marzo) durante la piena attività (maggio e luglio) e verso la fine dell'estivazione (settembre-ottobre).

Ho fissato inoltre a luglio, settembre, ottobre e novembre le ghiandole salivari prelevate a tempi diversi dall'alimentazione ( $\frac{1}{2}$  h 1, 2, 4, 6 h) preceduta da un giorno di digiuno.

Come fissativi ho adoperato il Carnoy, il Flemming, l'Helly ed il Bouin e le sezioni di 5 $\mu$  sono state colorate con l'ematossilina-eosina, con l'ematossilina ferrica, con il metodo triplo con emallume-safranina e orange adope-

(7) R. MONTI, «Mem. del R. Ist. Lomb. di Sc. e Let.», XVIII, 1899.

(8) M. PACAUT e P. VIGIER, «Arch. Anat. Microsc.», VIII, 1906.

(9) Z. FRANKENBERGER, «Arch. Anat. Microsc.», XIX, 211, 238 (1923).

(10) D. VOINOV, «Arch. de Zool. Expér. et génér.», 76, 399 (1934).

(11) D. BARFURTH, «Arch. f. mikr. Anat.», XXV, 1885.

(12) A. LANGE, «Anat. Hefte», 41 (1902).

(13) B. J. KRIJGSMANN, «Ztsch. f. vergl. Physiol.», II, p. 264 (1925).

rato dalla Monti, con la Feulgen per il DNA, con il verde di metile pironina per l'RNA (controllato con l'acido perclorico), con il metodo di Bauer per i polisaccaridi, con il metodo al bleu di bromofenolo di Mazia, Brewer e Alfert per le sostanze proteiche e infine con il bleu di toluidina.

Le sezioni di ghiandole fissate a tempi diversi dall'alimentazione sono state disposte in file successive (ogni fila corrispondente a un tempo) sullo stesso portaoggetti in modo da essere colorate contemporaneamente onde fornire misure confrontabili dell'intensità di colorazione delle cellule.

Dall'osservazione dei preparati così allestiti ho potuto dedurre che la ghiandola salivare dell'*Eobania* è costituita da singoli elementi secernenti i quali lavorano indipendentemente gli uni dagli altri. La ghiandola è mero-crina e i vari aspetti cellulari non rappresentano diverse serie di cellule ma solamente le fasi di lavoro che ogni elemento traversa per compiere la propria funzione.

In questa Nota tratterò solamente degli argomenti relativi alla attività indipendente degli elementi ghiandolari, le altre questioni saranno trattate in un prossimo lavoro in esteso.

Che gli elementi ghiandolari lavorino indipendentemente gli uni dagli altri scaturisce dall'esame dei preparati eseguiti a tempi diversi dall'alimentazione.

Se la ghiandola lavorasse come una unità funzionale si dovrebbe poter osservare dopo l'alimentazione (preceduta da digiuno di 24 ore) un quadro citologico piuttosto omogeneo, come per esempio si vede dopo l'iniezione di pilocarpina nel pancreas dei ratti, che presenta acini le cui cellule si trovano tutte nello stesso stadio funzionale. Invece nella ghiandola salivare di *Eobania* non si osserva nulla di simile; essa ha un'aspetto quanto mai vario e sono sempre presenti le diverse forme cellulari.

Con ciò non si vuole però concludere che lo stimolo alimentare non eserciti una qualche funzione sulla ghiandola ma soltanto che ogni cellula risponde ad esso seguendo un suo ritmo particolare e indipendente. Il tempo che ogni cellula impiega per passare da una fase all'altra e per compiere l'intero ciclo è diverso. Pur tuttavia dopo un certo tempo (2 h) dall'alimentazione si vedono predominare nel campo microscopico le cellule a scarso contenuto citoplasmatico e prive di granuli o di secreto; sono queste le cellule che hanno versato il secreto e che, secondo il Krijgsmann, rappresentano l'ultima fase del ciclo di lavoro di un elemento ghiandolare. In seguito (4-6 h) nella ghiandola si osservano di nuovo tutti i diversi stadi in percentuali relative diverse a seconda della zona della ghiandola che si prende in esame.

Ho cercato di classificare i diversi stadi presenti in vari campi microscopici e di calcolarne il per cento relativo ma non ho potuto, a differenza di Krijgsmann, che ha lavorato sul ciclo secretorio in rapporto alla durata dell'alimentazione, costruire una curva di periodicità rispetto al tempo di alimentazione. La conclusione che può trarsi da questo studio del ciclo secretorio è che l'alimentazione stimoli una graduale maturazione del secreto

in modo che la sua eliminazione sia quasi totale dopo circa due ore. In seguito ogni cellula riprende a lavorare indipendentemente.

Lo studio analitico delle differenze della ghiandola nei vari mesi dell'anno non ha messo in evidenza differenze molto nette per quanto concerne la presenza dei vari stadi. Un'ulteriore conferma del lavoro indipendente degli elementi che costituiscono la ghiandola è dato dall'aspetto variato di essa anche nel letargo invernale durante il quale sono presenti tutti gli stadi di secrezione nonostante che da tempo manchi qualsiasi stimolo alimentare. Questo fatto dimostra inoltre che la ghiandola, sebbene in misura molto

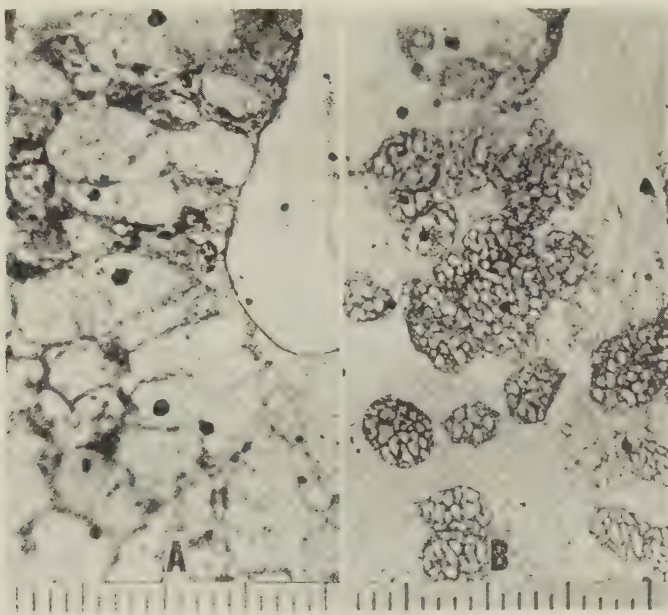


Fig. 1. — Ghiandole salivari di *Eobania vermiculata* Müll. fissate in Carnoy.

Sez. 5  $\mu$  col. bleu di toluidina. A) Esemplare fissato a maggio. B) Esemplare fissato a dicembre.

Ogni divisione della scala posta sotto le fotografie corrisponde a 10  $\mu$ .

limitata, continua a secernere anche durante tale periodo. Si osserva anche che la ghiandola dell'animale in letargo ha una maggiore compattezza strutturale di quella in attività; ciò è dovuto, oltre che ad una apparente disidratazione cellulare, anche alla riduzione percentuale degli elementi con scarso citoplasma e vuoti perché hanno eliminato il secreto.

La, seppure limitata, quantità di questi dimostra però che la ghiandola ha continuato a lavorare ed a eliminare il secreto nei dotti escretori.

Le differenze tra una ghiandola in attività ed una di animale in letargo si vedono bene nelle fotografie riportate.

Appena l'animale riprende ad assumere gli alimenti, si osserva un aumento percentuale degli elementi che hanno eliminato il secreto e di nuovo imbibizione e rigonfiamento delle cellule.



In conclusione se è difficile stabilire una periodicità nella funzione della ghiandola salivare pur tuttavia non si può negare che lo stimolo alimentare provochi una modificazione nel ciclo secretorio di ogni elemento determinando uno svuotamento quasi completo della ghiandola dopo un certo tempo dall'applicazione di questo stimolo. Il letargo invernale inoltre rallenta e non blocca l'attività secretoria modificando l'aspetto generale della ghiandola nella quale si altera visibilmente il rapporto numerico tra i vari stadi a causa della enorme riduzione delle cellule che si trovano alla fine del loro lavoro secretorio per avere eliminato il secreto.

**Biologia.** — *Ricerche sopra le potenze del cercine neurale cefalico* (\*). Nota di LEO RAUNICH, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

In questa Nota espongo brevemente i risultati di alcune serie di esperimenti di trapianto di materiale del cercine neurale cefalico in sede eterotopica negli Anfibi Anuri. Come è noto, da tale materiale si origina una quantità di cellule che posseggono in prima linea la proprietà di migrare in diverse regioni del corpo dove partecipano alla formazione di una quantità di strutture, e sembrano inoltre possedere peculiari proprietà inducenti <sup>(1)</sup>. Dalla ricca letteratura in proposito, volendo riassumere i punti essenziali, possiamo ricavare che il materiale della cresta neurale ha in sé la capacità di migrare, almeno entro certi limiti di tempo e che acquista tale capacità verso la fine della gastrulazione <sup>(2)</sup> (all'epoca cioè in cui la pianta midollare viene determinata). Sembra che tale migrazione si compia in virtù di particolari fenomeni di tropismo <sup>(3)</sup>, e che infine il differenziamento delle varie strutture cui partecipa il materiale della cresta neurale si realizzi in rapporto alla sede in cui va a situarsi. Data la brevità della presente Nota, rimando la discussione dei dati esistenti in letteratura sull'argomento al prossimo lavoro in extenso.

Gli attuali esperimenti sono stati eseguiti allo scopo di precisare meglio il differenziamento del medesimo materiale di cresta neurale in sedi diverse; ho trapiantato perciò sempre lo stesso tratto di cercine neurale cefalico (prelevandolo quanto più esattamente possibile, senza materiale di zone

(\*) Ricerche eseguite presso l'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) Cfr. il lavoro di G. WAGNER, *Die Bedeutung der Neuralleiste für die Kopfgestaltung der Amphibienlarven*. « Rev. suisse Zool. », 56, 519 (1949).

(2) Chr. P. RAVEN, *Zur Entwicklung der Ganglienleiste. - II. Ueber das Differenzierungsvermögen des Kopfganglienleistenmaterials von Urodelen*. « Roux'Arch. », 129, 179 (1933).

(3) S. HÖRSTDIUS, S. SELLMAN, *Experimentelle Untersuchungen über die Determination des knorpeligen Kopfskelettes bei Urodelen*. « Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis », ser. IV, 13, 1 (1945).

adiacenti di piastra midollare o di epidermide) tanto nella regione del fianco quanto in quella cefalica di altre neurule, sostituendo contemporaneamente il tratto di cercine asportato con epidermide del fianco. Le operazioni sono state eseguite su neurule aperte di *Bufo vulgaris*, *Bufo viridis* e *Rana esculenta*. La zona di cercine prelevata corrisponde alla porzione più craniale del tratto longitudinale (ved. figura).

Divideremo gli esperimenti in 3 gruppi, di cui il 1° comprende le operazioni di sostituzione del tratto di cercine asportato con epidermide del fianco, il 2° quello di trapianto di cercine sul fianco, il 3° quello di trapianto di cercine nella regione cefalica.

1° *Sostituzione di un tratto di cercine con epidermide del fianco.* — Dispongo di 22 casi allevati fino a differenziamento completo e studiati in sezioni. In tutti il trapianto è attecchito bene e i cercini si sono chiusi normalmente. In 16 casi non ho riscontrato alcuna anomalia apprezzabile; nei restanti 6, invece, ho riscontrato in 1 caso una grande otocisti con capsula e ganglio differenziata nel tetto del rombencefalo, in 1 caso una piccola otocisti isolata però compresa nella capsula della otocisti normale destra, in 1 caso infine una serie di malformazioni del tetto rombencefalico (tela corioidea dilatata, una vescicola epiteliale, connettivo e ispessimenti epidermici); degli altri 3 casi, in uno ho riscontrato una interruzione della corda e del nevrasso, e in 2 casi, infine, una riduzione di volume e anomalie strutturali dell'otocisti destra.

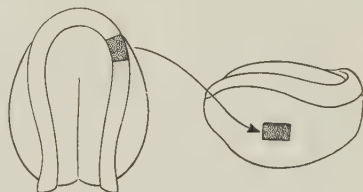


Fig. 1.

2° *Trapianto di cercine neurale cefalica sul fianco.* — Di 22 embrioni operati e studiati in sezioni a differenziamento completo, 12 non presentavano alcuna anomalia; in 10 ho riscontrato strutture varie nella sede di trapianto, e precisamente: in 2 casi piccoli tubi di natura epiteliale, in 4 masserelle cellulari, di struttura neuroide, in 1 una otocisti, in 2 casi due lenti libere con lentoidi, e in un caso infine una masserella di cellule gangliari.

3° *Trapianto di cercine nella regione cefalica.* — In 7 casi ho trapiantato il cercine nella regione anteriore del capo, ventralmente al cercine trasverso; in tutti e 7 i casi il pezzo è stato espulso. Ho proceduto quindi in maniera da ovviare a tale inconveniente, scalzando mediante ago smusso un tratto di epidermide, e introducendo il trapianto nella piccola cavità così formata mediante ago a punta piatta; di 12 operazioni del genere, in un solo caso ho avuto reperti positivi che consistono in notevoli anomalie del neurocranio, in cui il palato quadrato sinistro si presentava molto più grande di quello destro; cefalicamente tale porzione era formata da cellule cartilaginee, più caudalmente invece la maggior parte della massa (che sporge nel faringe) era data da cellule di tipo pre-cartilagineo. Più caudalmente ancora la massa di cellule precartilaginee prendeva diretto contatto col basi-branchiale.

Nelle tabelle seguenti sono riportati i risultati ottenuti.

TABELLA I.

*Sostituzione di cercine cefalico con ectoderma del fianco.*

operati	morti	soprav- vissuti	negativi	otocisti	malform. d. tetto rom- benc.	Interruz. corda	Riduzione otocisti.
32	10	22	16	2	1	1	2

TABELLA II.

*Trapianto di cercine neurale sul fianco.*

operati	morti	soprav- vissuti	negativi	autodifferenziamenti			induzioni	
				tubi epiteliali	cell. gang.	masserelle cell.	otocisti	lenti
32	10	22	12	2	1	4	1	

Se consideriamo il 1° gruppo di esperimenti, il grande numero di casi normali dimostra anzitutto l'alta capacità regolativa del materiale del cercine neurale ed evidentemente anche una notevole azione induttrice di tale regione. Mentre la interruzione di corda e nevrasse si spiega per fatti di ordine più che altro meccanico, la presenza di otocisti soprannumerarie si deve ricondurre ad una azione inducente del substrato sull'ectoderma trapiantato, mentre le anomalie di forma delle otocisti normali (2 casi) sono riferibili ad alterazioni dei fattori implicati nello sviluppo normale della vescicola otica.

Nel 2° gruppo di esperimenti, più della metà dei casi non presentava alcuna anomalia. Dato che dai protocolli risulta chiaramente che il trapianto è attecchito e non è stato espulso, bisogna concludere che il materiale cellulare si è così intimamente assimilato alla nuova sede da non essere più riconoscibile con i mezzi usuali. In 10 casi ho osservato la presenza di strutture che si devono mettere in relazione col trapianto, e che in parte si devono considerare autodifferenziate, in parte invece indotte dal materiale trapiantato. Così l'otocisti e i due cristallini sono indubbiamente originati da induzione, mentre i tubi epiteliali, le masserelle di cellule (di natura non ben precisabile, ma che corrisponderebbero alle cosiddette strutture neuroidi) e fors'anche le cellule gangliari provengono invece dall'autodifferenziamento del trapianto.

Dal 3° gruppo di esperimenti risulta infine che in 1 caso si è avuta la formazione di masse cartilaginee soprannumerarie sicuramente accertate, e che pertanto devono essere provenute dal trapianto.

Dai risultati ottenuti si può pertanto concludere che il materiale del cercine neurale si evolve diversamente a seconda della località in cui si sviluppa. Mentre nella regione del capo dà cartilagine (e probabilmente anche connettivo), nella regione del tronco deve differenziarsi in massima parte in connettivo lasso, e in qualche altra struttura di scarso rilievo (piccoli tubi epiteliali, masserelle cellulari non ben definite). Il materiale del cercine dimostra comunque una certa attività inducente (cristallini, otocisti) e i risultati attuali portano inoltre un'ulteriore conferma all'ipotesi che l'otocisti venga indotta per opera della cresta neurale (4).

**Biologia.** — *Sull'importanza delle condizioni di esperimento nello studio della catalasi (ossiforo di Spirito)* (\*). Nota di CARLO BONDI e MARCELLO CENTAMORI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Nel corso delle numerose ricerche sull'ossiforo di Spirito condotte nello Istituto di Biologia Generale dell'Università di Perugia, si sono notate a volta a volta — a prescindere dalle variazioni quantitative della sua quantità in relazione a particolari fattori sperimentali — altre variazioni imputabili alle particolari condizioni inerenti alla tecnica usata per il dosaggio.

E ci piace ricordare qui che uno di noi (Bondi (1,2,3)) aveva già messo in evidenza l'importanza del pH del substrato impiegato per la determinazione dell'attività catalasica non soltanto per i diversi valori assoluti di essa in relazione al variare del pH stesso, ma anche per il completo capovolgimento dei risultati ottenibili nello studio del valore di un determinato fattore sperimentale. Le ricerche svolte permisero di valutare, in tal caso, il significato dei diversi reperti ed il valore causale delle variazioni del pH, ma naturalmente tutto ciò fece comprendere la necessità di considerare anche altri fattori inerenti alla tecnica di analisi sì che per prima cosa ci è sembrato opportuno rivolgerci allo studio dell'influenza della temperatura sull'attività catalasica (sempre nello stesso materiale ed ai vari pH) fermo restando il fattore sperimentale in forma del mantenimento o meno delle strutture morfologiche.

Le condizioni ottimali per la misurazione dell'attività catalasica, di cui pur trattano molti ricercatori, restano ancora notevolmente controverse e

(4) Cfr. H. A. L. TRAMPUSCH, *On ear induction*, « Acta Neerl. Morph. », 4, 195 (1941-1942).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia Generale dell'Università di Perugia.

(\*\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) C. BONDI, « Riv. Biol. », 43, 331 (1951).

(2) C. BONDI, « Bollettino della S.I.B.S. », 28, 137 (1952).

(3) C. BONDI, « Riv. Biol. », 44, 317 (1952).



ciò essenzialmente per il fatto che esse sono strettamente connesse a molti fattori estrinseci (concentrazione idrogenionica, variazione di temperatura, luce, ecc.); la conoscenza quindi di questi fattori e del diverso grado d'intensità della loro azione in rapporto alle variazioni del loro valore è cosa fondamentale ogni qualvolta si voglia determinare l'attività catalasica e si vogliano avere dati ripetibili nel tempo.

Limitandoci, per ora, all'esame di quei fattori che più facilmente entrano in gioco nel corso della determinazione catalasica, noi vediamo come essi siano essenzialmente due e precisamente la concentrazione idrogenionica e la temperatura. Mentre per quanto riguarda il primo di essi, cioè la concentrazione idrogenionica, le ricerche predette hanno portato piena luce, non altrettanto può dirsi per la temperatura per la quale abbiamo in letteratura i dati più controversi. La mancanza di dati univoci, in tal caso, è anche dovuta al fatto che non tutti usano, come noi facciamo, il metodo basato sul dosaggio della quantità totale di ossigeno svolto dalla reazione, ma usano spesso quello basato sulla velocità della reazione stessa sì che si tratta di dati assolutamente non comparabili.

Riteniamo pertanto necessario un rapido esame della più significativa letteratura sull'argomento, sia sul valore del pH, che sul valore della temperatura a documento della diversità dei risultati, diversità non spiegabile solamente con il fatto che spesso trattasi di catalasi prelevata da specie od organi diversi.

Sörensen <sup>(4)</sup> studiando l'azione delle varie concentrazioni idrogenioniche pone l'ottimo d'azione della catalasi del fegato a pH 6,8.

Walling e Stoland <sup>(5)</sup> ritengono che per la catalasi del sangue di cane, gatto e coniglio, l'ottimo del pH sia intorno ai valori di 8,7-9 (essi si limitano però a determinare l'attività catalasica nei primi 10' della reazione, cioè si basano sul metodo della velocità) e loro stessi rilevano che tale valore è maggiore di quello riferito da altri Autori. Anche Regenbogen <sup>(6)</sup> pone l'ottimo del pH relativamente lontano dalla neutralità. Barelli <sup>(7)</sup> invece ritiene ottimale il pH di 7 e così Nosaka <sup>(8)</sup> e R. Stern <sup>(9)</sup>.

Anche per quanto riguarda l'inattivazione della catalasi ad opera della concentrazione idrogenionica i dati sono ben lungi dall'essere concordanti. Per Sumner <sup>(10)</sup> la catalasi è distrutta ad un pH di circa 3. Il Chance <sup>(11)</sup>

(4) S. P. L. SÖRENSEN, « Biochem. Z. », 21, 131 (1909).

(5) L. WALLING e O. O. STOLAND, « Amer. J. Phys. », 66, 503 (1923).

(6) J. H. REGENBOGEN, *Le rôle biologique de la catalase dans le métabolisme d'énergie*. Gaston Doin e C. Parigi, 1932.

(7) L. BARELLI, *Diagnostica e tecnica di laboratorio*, 4, 216 (1933).

(8) K. NOSAKA, « Journ. of Biochemistry », 8, 257 (1928).

(9) R. STERN, citato da L. BARELLI, loc. cit.

(10) J. B. SUMNER e G. F. SOMERS, *Chemistry and methods of enzymes*. « Academic press. inc. », New York, 1953.

(11) B. CHANCE, « J. Biol. Chem. », 194, 471 (1952).

misura l'attività catalasica da pH 3 a pH 12 e dice che al disotto del pH 4 la diminuzione di attività è in parte causata dalla formazione del composto secondario inattivo: catalasi-perossido d'idrogeno. I valori dell'attività che egli ottiene a pH 3 sono ancora elevati e superiori al 50 % di quelli che registra a pH 7. Egli inoltre non fa mai specifica menzione che al disotto del pH 3 la catalasi sia del tutto inattiva. Per esempio la capacità della catalasi di combinarsi con il metil idrogeno perossido è, sempre secondo il Chance<sup>(11)</sup>, massima proprio a pH 2.

Da lavori di Sørensen<sup>(4)</sup> Nosaka<sup>(8)</sup> e Stern<sup>(9)</sup> si desume che a pH 5 l'attività catalasica è quasi annullata. Voglio inoltre ricordare che l'attività catalasica del sangue e di embrioni di varie specie animali, nonché di alcune specie vegetali è stata da molti Autori studiata sistematicamente a pH 2,62 giacché essi usavano il peridrolo Merck stabilizzato per i paesi tropicali, secondo il brevetto numero 216263, che ha appunto tale pH e senza peraltro far mai uso di soluzioni tampone: così infatti hanno lavorato il Friggeri<sup>(12, 13, 14, 15, 16)</sup>, Puma<sup>(17)</sup>, Mistruzzi<sup>(18)</sup>, Cavazzini<sup>(19)</sup>, Pitotti<sup>(20)</sup> ed altri.

Bodanski<sup>(21)</sup> trova che l'attività catalasica è quasi del tutto inibita a pH = 1, ma solo leggermente a pH = 2.

Ancor meno accordo vi è, a proposito della temperatura ed i dati in merito sono anzi grandemente discordanti. Sizer<sup>(22)</sup> trova che la catalasi cristallina estratta dal fegato ha l'ottimo a 53° e dice di evitare la distruzione della catalasi a tale temperatura usando una soluzione molto diluita di perossido d'idrogeno. Senter<sup>(23)</sup> trova per il coefficiente di temperatura il valore di 1,5 esaminando l'intervallo fra gli 0° ed i 10°.

Secondo Stern<sup>(24)</sup> il sangue riscaldato a 60° per qualche tempo presenta la sua attività catalasica grandemente aumentata ed un fatto simile osservano pure Bodnàr e Bártfoi<sup>(25)</sup>: quando scaldano a 42° per 2 h del grasso animale essi trovano un aumento dell'attività catalasica del 112 % e suppongono che così operando venga distrutto un principio inibitore. Ma Walling e Stoland<sup>(5)</sup> riferiscono che sangue non diluito e defibrinato sottoposto a temperature tra i 47° ed i 50° C per 20', quando poi provato a 22°, dimostra

(12) A. FRIGGERI, « Bollettino della S.I.B.S. », 13, 1 (1938).

(13) A. FRIGGERI, « Riv. di Biol. », 26, 5 (1938).

(14) A. FRIGGERI, « Bollettino della S.I.B.S. », 15, 442 (1940).

(15) A. FRIGGERI, « Riv. di Biol. », 30, 3 (1940).

(16) A. FRIGGERI, « Arch. Sc. Biol. », 26, 1 (1940).

(17) M. PUMA, *Relazione della XXIX riunione della S.I.P.S.*, 1942.

(18) L. MISTRUZZI, « Riv. Biol. », 36, 1 (1943).

(19) E. CAVAZZINI, « Rendiconti Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. VI, 250 (1949).

(20) M. PITOTTI, « Boll. della S.I.B.S. », 24, 117 (1948).

(21) BODANSKI, « Journ. of Biol. Chemistry », Bd. 40-41, 127 (1919).

(22) I. W. SIZER, « J. Biol. Chem. », 154, 461 (1944).

(23) G. SENTER, « Z. Phys. Chem. », 44, 257 (1903).

(24) S. STERN, « Biochem. Z. », 182, 139 (1927).

(25) J. BODNÀR e J. BÀRTFOI, « Z. Physiol. Chem. », 244, 225 (1936).

di aver perso praticamente tutta la sua attività catalasica. Anche secondo Barelli<sup>(7)</sup> già a 37° si hanno per la catalasi fenomeni di autolisi e per il Rotini<sup>(26)</sup> qualche tipo di catalasi, non della specie umana però, sarebbe già inattivato a 15°. Barelli<sup>(7)</sup> ricorda inoltre che tutti i tipi di catalasi sono totalmente distrutti a 65°. Sumner<sup>(10)</sup> riferisce una comunicazione privata di D. C. Wood secondo la quale una soluzione di catalasi cristallina estratta dal fegato e seccata per evaporazione a 80° e mantenuta a questa notevolissima temperatura per 24 h, possiede ancora una notevole attività. Jorns<sup>(27)</sup> non trova alcun cambiamento dell'attività tra i 0° ed i 50°, indebolimento ai 60° ed inattivazione a 68°-72°. Issajew<sup>(28)</sup> constata ancora attività a 90° e «l'optimum» a 40°. Secondo Libermann<sup>(29)</sup> la catalasi dell'orzo è grandemente distrutta già a 30°, la catalasi della farina ha, secondo Merl<sup>(30)</sup>, il suo ottimo di attività a 40°. Secondo Nosaka<sup>(31)</sup> il vero ottimo per la catalasi del sangue è a 40°.

PARTE SPERIMENTALE. - Il metodo da noi usato per la determinazione dell'attività catalasica è quello di Burge modificato dal Friggeri<sup>(16)</sup> adoperato in tutti i già citati lavori della Scuola di Spirito.

Il fattore sperimentale allo studio, è stato quello già introdotto nelle precedenti ricerche e cioè l'emolisi dei globuli rossi e le condizioni sperimentali hanno visto variare insieme il pH e la temperatura.

Il sangue è stato prelevato, in tutte le prove, dalla vena marginale dell'orecchio di uno stesso coniglio del peso di circa Kg. 2,500: indi il sangue è stato defibrinato e filtrato per garza e si è proceduto a preparare due campioni seguendo le modalità già descritte da Bondi<sup>(3)</sup>, cioè «cc 0,5 di sangue erano diluiti con cc 4,5 di soluzione fisiologica (ottenuta con cloruro di sodio p.a. al 0,9 %) e cc 0,5 aggiunti a cc 2,25 di acqua distillata: ottenuta così, nel secondo caso, l'emolisi, si aggiungevano cc 2,25 di una soluzione di cloruro di sodio all'1,8 % in modo tale da avere, sia nel caso del sangue intero che dell'emolizzato, la presenza e l'identica concentrazione di cloruro di sodio». Di questi due campioni di sangue cc 0,2 - corrispondenti a cc 0,02 di sangue intero e defibrinato - erano posti a reagire con 20 cc di H<sub>2</sub>O<sub>2</sub><sup>(32)</sup> avente tre diversi pH<sup>(33)</sup> e precisamente 2,2-4,5-7. Ognuno di questi pH era esaminato contemporaneamente a tre diverse temperature

(26) O. T. ROTINI, «Ann. del Lab. Ric. Ferm. L. Spallanzani», Milano, 1, 281 (1930).

(27) JORNS, «Arch. F. Hyg.», 67, 134 (1908).

(28) ISSAJEW, citato da HANS V. EULER, *Chemie der Enzymes*. T. II, A. 3, München, Verlag von J. F. Bergmann 1934, p. 34.

(29) LIBERMANN, «Pflug. Arch.», 104, 176 (1904).

(30) MERL, «Zs. Unt. Nahr.», 42, 273 (1921).

(31) K. NOSAKA, «J. of Biochem.», 8, 301 (1928).

(32) Tale H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> era ottenuta diluendo 1 a 10 il peridolo Merck p.a.

(33) Tali pH erano indotti e stabilizzati con l'uso della soluzione tampone di Mc Ilvaine, composta di acido citrico e di fosfato bisodico.

e precisamente a  $0^{\circ}$  a  $15^{\circ}$  ed a  $30^{\circ}$ . La temperatura di  $0^{\circ}$  era ottenuta ponendo le boccie, in cui avveniva la reazione, in ghiaccio fondente che veniva rinnovato per tutto il tempo della reazione: la temperatura di  $15^{\circ}$  era ottenuta per mezzo di un bagno termostatico e quella di  $30^{\circ}$  per riscaldamento dell'ambiente. Per ogni temperatura cioè erano disposte 6 bottiglie che avevano a coppie i pH riferiti e di ogni coppia una bottiglia conteneva sangue intero e l'altra sangue laccato.

A  $30^{\circ}$  la durata della reazione era al massimo di 30', anche al pH ottimale. A  $15^{\circ}$ , per il pH ottimale la durata della reazione era di circa 4 ore, mentre a  $0^{\circ}$  ed allo stesso pH esso durava 10 ore e più, tanto che non sempre è stato possibile attenderne il definitivo arresto. Per il pH di 2,2 sia a  $15^{\circ}$  che a  $0^{\circ}$  il tempo della reazione era sempre molto più breve che a pH 7, pur prolungandosi anch'esso con il decrescere della temperatura. Per il pH 4,5 si è avuta una durata di reazione intermedia, ma più prossima comunque a quella del pH 7 che non a quella del pH 2,2. Da notare inoltre che a  $0^{\circ}$  si forma sempre un'abbondante spuma alla superficie del liquido, in modo particolare a pH 7. A  $15^{\circ}$  la spuma è sempre minore che a  $0^{\circ}$ , a  $30^{\circ}$  non appare quasi affatto.

TABELLA I.

*Ossigeno svolto dall' $H_2O_2$  riferito ad 1 cc di sangue.*

	sangue intero			sangue laccato		
	$H_2O_2$ pH=7	$H_2O_2$ pH=4,5	$H_2O_2$ pH=2,2	$H_2O_2$ pH=7	$H_2O_2$ pH=4,5	$H_2O_2$ pH=2,2
Temperatura $0^{\circ}$						
Media delle prove	19793	14033	1616	20375	13046	410
Temperatura $15^{\circ}$						
Media delle prove	9575	8450	1258	9621	7641	208
Temperatura $30^{\circ}$						
Media delle prove	3956	3610	666	3780	3445	303



Le prove sono state ripetute più volte nello spazio di pochi giorni, e, come già detto, sempre con sangue prelevato dallo stesso coniglio.

Nella tabella I è riportata la media dei dati delle varie prove: con questi dati si è costruito il grafico spaziale riportato nella fig. 1.

ESAME ED INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI. - Nei limiti della nostra attrezzatura, abbiamo preferito la simultaneità di tutte le prove piuttosto

che l'esame di un maggior numero di valori sia della concentrazione idrogenionica che della temperatura. Questo l'abbiamo ritenuto un criterio essenziale per avere una visione molto esatta, se anche un po' sommaria, dell'andamento dei fenomeni.

Passando ora all'esame della tabella e del grafico possono trarsi, a nostro avviso, le seguenti essenziali considerazioni:

1° colpisce innanzitutto l'azione della temperatura nell'ambito di una stessa concentrazione idrogenionica. Tale azione è sempre più accentuata quanto più ci si avvicina al pH ottimale. Mentre, infatti, essa è relativamente modesta a pH 2,2, diviene grandemente accentuata a pH 4,5 e più ancora a pH 7: in questo caso si ha a 0° uno sviluppo di ossigeno 5 volte maggiore che a 30°;

2° ancora più marcata è l'influenza - ben nota dalla letteratura - della concentrazione idrogenionica nell'ambito, ben inteso, di una stessa temperatura ed anche tale azione è sempre più marcata quanto più ci si avvicina alla temperatura ottimale. A 0°, infatti, ed a pH 7 si ha uno

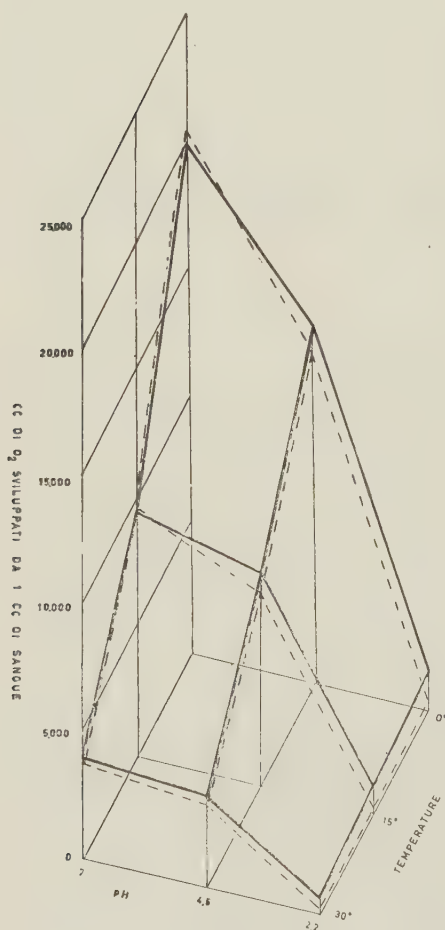


Fig. 1.

sviluppo di  $O_2$  dall'acqua ossigenata di oltre 12 volte maggiore di quello che si ha a pH 2,2;

3° è chiaramente evidente il fatto che le modificazioni indotte sulla attività catalasica del sangue ad opera della emolisi, possono non risultare affatto o possono essere messe in vario risalto a seconda della diversa con-

centrazione idrogenionica, come già dimostrato da uno di noi (Bondi <sup>(1-4)</sup>) e della diversa temperatura <sup>(34)</sup>.

Per quanto suddetto è facile comprendere come non solamente siano affatto inconfrontabili i dati ottenuti a diverse concentrazioni idrogenioniche – e questo è anzi il dato che generalmente la maggioranza degli Autori si premura di citare – ma come siano altrettanto inconfrontabili i dati ottenuti alle varie temperature e questo è proprio il dato che molti Autori trascurano invece di citare. Ora poiché la variazione di un grado si ripercuote con una notevolissima variazione dell'ossigeno svolto (ogni grado comporta una variazione di circa cc 660 di O<sub>2</sub> per cc 1 di sangue) e poiché tali oscillazioni termiche sono, per varie cause, ovviamenti frequenti, il confronto tra questi dati risulta quanto mai arbitrario.

Noi riteniamo queste differenze nei valori assoluti, che abbiamo descritto, almeno in buona parte le cause dirette della grande diversità dei dati riferiti dalla letteratura.

Per quanto concerne le differenze tra l'attività catalasica del sangue intero e quella del sangue emolizzato che, come abbiamo detto, compaiono o meno a seconda del pH dell'H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> e della temperatura alla quale avviene la reazione, esse non trovano nessuna spiegazione, come già altrove dicemmo, nella teoria classica sulla funzione biologica della catalasi e possiamo interpretarle unicamente ricorrendo alla teoria di Spirito <sup>(35, 36)</sup>. Bisogna infatti ricordare che l'emolisi dei globuli rossi induce un notevole aumento degli scambi gassosi <sup>(1)</sup>. È quindi logico pensare che a tale accresciuta attività metabolica i globuli rossi sopperiscano anche attingendo all'ossiforo con la conseguente diminuzione della fase ossidata e correlato aumento della fase ridotta. La riossidazione di tale fase, possibile in condizioni ottimali, diviene via via sempre più difficile, per divenire infine quasi del tutto impossibile, quanto più ci si allontana da esse e sono pertanto queste ultime le condizioni che ne permettono la rilevazione.

(34) È infatti prevedibile che ulteriori elevazioni della temperatura della reazione, rendano sempre più marcata la differenza tra sangue intero e laccato e di ciò ci occuperemo in una prossima ricerca.

(35) A. SPIRITO, «Medicina e Biologia», 1, 1942.

(36) A. SPIRITO, «Soc. Ital. Progr. Sc.», *Relazione della XXIX Riunione*, 1943.

**Biologia.** — *Sulla presenza di particolari cellule (gliali?) nella oblongata del Tritone crestato*<sup>(\*)</sup>. Nota di VALDO MAZZI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio N. BECCARI.

Già diversi anni or sono, nel corso di ricerche sui fenomeni neurosecretori nel nucleo magnocellulare preottico e nel nucleo della radice mesencefalica del V del Tritone crestato (Mazzi<sup>(1)</sup>) ebbi occasione di osservare nell'oblongata, in piena sostanza bianca, cellule peculiari, caratterizzate dal possedere un numero limitato di tozzi prolungamenti, dipartentesi con largo piede di attacco dal pericarion. Tanto il pericarion che i prolungamenti apparivano colorati in azzurro dal bleu di metile del metodo I di Galgano (fig. 1). Queste particolari cellule basofile occorreano in scarso numero e in una percentuale molto bassa degli animali studiati.

In successive ricerche ho avuto modo di praticare sull'encefalo di Tritone altre colorazioni e reazioni istochimiche, attraverso le quali ho potuto nuovamente mettere in evidenza le singolari cellule basofile, e, in via preliminare, identificarle con cellule di glia in particolare atteggiamento funzionale.

Il metodo di Gomori alla ematosilina cromica floxina e il metodo di Scott (fucsina basica-paraldeide secondo Gomori dopo ossidazione con permanganato e acido solforico), colorano, nell'oblongata del Tritone crestato, cellule del tutto paragonabili, per sede e per forma, alle cellule basofile rese evidenti dal metodo di Galgano. A giudicare dal numero delle cellule colorate e dalla percentuale dei reperti positivi, sembrerebbe che questi due metodi, e in particolari il secondo, siano più idonei a mettere in evidenza queste particolari cellule gliali, che non il metodo di Galgano<sup>(2)</sup>.

Le principali caratteristiche istologiche delle cellule possono essere così riassunte.

Il citoplasma, con il metodo di Galgano, dopo fissazione in Sanfelice e in Stieve, ha un aspetto fumoso; appare più o meno fittamente riempito di granuli minuti intensamente colorati dalla fucsina basica-paraldeide dopo fissazione con liquidi a base sublimato e colorazione con il metodo di Scott (figg. 2 e 3). Il nucleo, per lo più ellittico, ma anche triangolare o di forma più irregolare, possiede una ben evidente carioteca e un discreto corredo cromatinico (figg. 1 e 4)<sup>(3)</sup>. Queste cellule possono essere debolmente PAS positive (fig. 5).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.

(\*\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 3, 155 (1947); idem, 4, 109 (1948).

(2) Ho constatato che il numero delle cellule gliali basofile sembra aumentare in femmine trattate con estrogeni da sintesi (Cirene B forte, Ciba).

(3) La membrana nucleare di queste cellule e delle cellule di glia protoplasmatica porta frequentemente delle incavature nelle quali è contenuto citoplasma più nettamente basofilo. L'orientamento del piano di sezione genera figure che simulano grandi nucleoli (fig. 1), simili a quelli che descrissi nel nucleo magnocellulare preottico, e paraipofisario dell'Anguilla (MAZZI, «Arch. Ital. Anat. Embriol.», 46, 1, (1941)).

In quanto al valore da attribuirsi a queste cellule, tre, a mio avviso, sono le interpretazioni possibili: *a*) cellule di microglia, *b*) cellule di glia in particolare atteggiamento funzionale, *c*) mastociti emigrati nel tessuto nervoso.

1. Gozzano<sup>(4)</sup> è riuscito a mettere in evidenza, sia con il metodo di del Rio Hortega che con quello di Bolsi all'argento glicerinato, soltanto scarsissime cellule di microglia nell'encefalo di Rana e di Rospo; ha ottenuto risultati negativi nell'*Axolotl*. Nel Tritone crestato l'applicazione dei metodi di del Rio Hortega e di Bolsi ha dato nelle mie mani risultati negativi. Ciò non significa che la microglia è assente nell'encefalo degli Anfibi e del Tritone in particolare. Infatti in preparati allestiti con metodi diversi, e in particolare dopo reazione di Feulgen, non è raro scorgere nuclei molto piccoli, rotondeggianti, allungati, a bastoncino, forse riferibili a cellule di microglia.

Considerando la mole cospicua delle cellule più sopra descritte e le dimensioni dei loro nuclei, ritengo comunque improbabile che esse possano identificarsi con cellule di microglia. Ma con ciò non si può categoricamente escludere che si tratti di cellule di microglia ipertrofiche e in attività fagocitaria.

2. Non ho potuto finora osservare preparati ben riusciti di glia nel Tritone crestato. Dalle ricerche di Bairati e Maccagnani<sup>(5)</sup> sappiamo che negli Anfibi predomina la glia protoplasmatica. Io ho ottenuto, con il metodo di Bolsi, immagini parziali di questo tipo cellulare nell'ipotalamo, bulbo olfattivo e tetto ottico, assai più incomplete nell'oblongata. In linea generale la conformazione dei gliociti protoplasmatici ben corrisponde a quella delle cellule sopra descritte e inoltre non esistono differenze apprezzabili neppure nella struttura dei rispettivi nuclei (figg. 1 e 4). Ancora: la glia protoplasmatica, anche se non di frequente, assume una disposizione lineare (pleiadi), rilevabile facilmente anche in preparati banali per il regolare allineamento dei nuclei (fig. 4).

Nell'oblongata le pleiadi talvolta comprendono le particolari cellule basofile (fig. 4). Pertanto ritengo verosimile che esse si identifichino con cellule di glia in particolare atteggiamento funzionale.

3. Con ricerche in corso ho dimostrato la presenza di mastociti nell'encefalo del Tritone e in quello di altri Anfibi e di alcuni Teleostei. Queste cellule peculiari, molto numerose, sono localizzate preferenzialmente: *a*) in posizione avventiziale rispetto ai capillari; *b*) nella leptomeninge; *c*) nello stroma dei plessi corioidei. Occasionalmente si dimostrano mastociti anche entro il tessuto nervoso, a distanza dai capillari sanguigni (fig. 6). La carat-

(4) « Riv. Neurol. », 2, 322 (1929).

(5) « Mon. Zool. Ital. », 58 (suppl.) (1950).



teristica più notevole dei mastociti (quale si sia la localizzazione) è quella di possedere nel citoplasma granulazioni metacromatiche, alcool resistenti e cromotrope anche a valori molto bassi del pH. Tra le altre caratteristiche tintoriali e istochimiche, le granulazioni dei mastociti manifestano anche una netta colorabilità con la fucsina paraldeide<sup>(6)</sup> e, in misura minore, con la cromo ematossilina, e sono incostantemente e debolmente PAS positive.

Queste ultime caratteristiche sono condivise anche dalle cellule più sopra descritte. Ma, a causa della loro scarsezza, fino ad ora non sono riuscito a controllare se quest'ultime manifestano metacromasia e posseggono le numerose altre proprietà istochimiche dei mastociti. Certamente la forma ben corrisponde a quella dei mastociti intranervosi (figg. 2 e 6), ma una più precisa documentazione è necessaria prima di concludere per una identità fra i due tipi cellulari.

Al momento attuale sono propenso pertanto a interpretare le cellule descritte come cellule di glia protoplasmatica in particolare atteggiamento funzionale.

Cellule simili a quelle sopra illustrate sono state apparentemente individuate da Wislocki e Leduc<sup>(7)</sup> nella sostanza grigia periventricolare del ratto, e interpretate come cellule gliali in attività fagocitaria. Wislocki e Leduc hanno dimostrato infatti che esse manifestano la capacità di immagazzinare l'argento iniettato vitalmente e che la loro PAS positività aumenta proporzionalmente alla quantità di argento accumulato.

### SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

1. Tritone crestato. Presunte cellule gliali dell'oblongata con citoplasma basofilo. a) Nuclei di cellule nervose. b) Nuclei di cellule gliali tipiche. c) Cellule gliali basofile. Fiss. Sanfelice; met. I di Galgano;  $\times 450$ .

2. Tritone crestato trattato con Cirene B forte. Presunte cellule gliali dell'oblongata con citoplasma intensamente colorato dalla fucsina basica-paraldeide. Fiss. Stieve; met. di Scott;  $\times 450$ .

3. Tritone crestato. Presunta cellula gliale colorata con la fucsina basica-paraldeide. Il citoplasma è ripieno di granuli fittamente stipati. Fiss. Susa picrico; met. di Scott;  $\times 700$ .

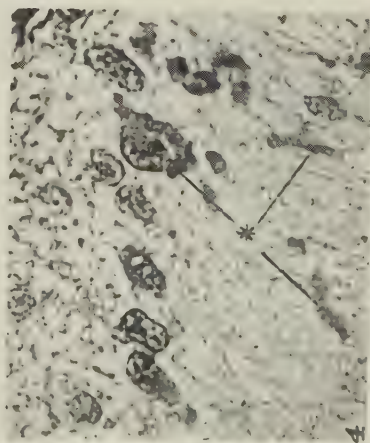
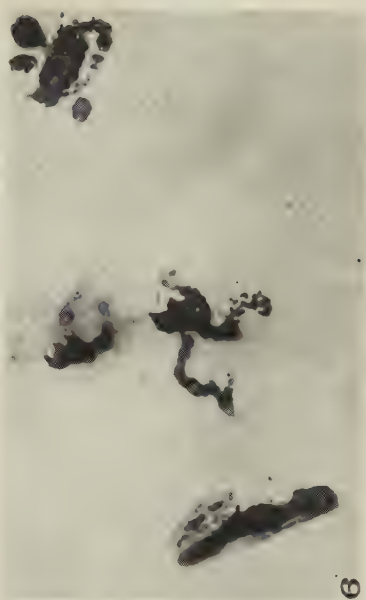
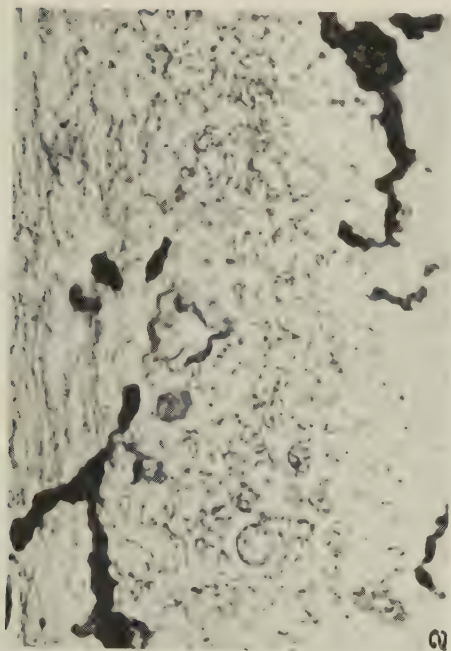
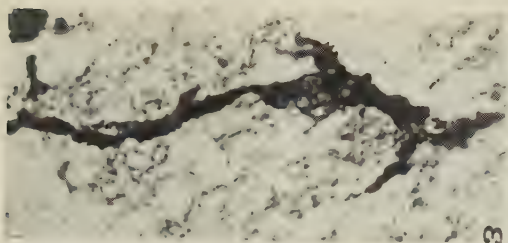
4. Tritone crestato trattato con Cirene B forte; sezione contigua a quella della fig. 2. Nuclei di cellule gliali ordinati linearmente (pleiade). In (\*) porzioni di citoplasma basofilo. Fiss. Stieve; met. I di Galgano;  $\times 450$ .

5. Tritone crestato trattato con Cirene B forte. Sezione contigua a quella delle figg. 2 e 4. Presunta cellula gliale debolmente PAS positiva. Fiss. Stieve; PAS reazione;  $\times 450$ .

6. Tritone crestato. Tre mastociti nell'ipotalamo, quello a sinistra in posizione avventiziale rispetto al capillare, gli altri due entro il tessuto nervoso. Si notino la forma ramificata del mastocita centrale e le granulazioni citoplasmatiche. Fiss.: Acetato basico di piombo 4%; bleu di toluidina;  $\times 450$ .

(6) La fucsina-paraldeide colora inoltre il sistema neurosecretorio ipotalamo-ipofisario e l'organo sottocommissurale.

(7) «Anat. Rec.», 117, 610 (1953).





**Genetica.** — *Il problema dell'equilibrio genico nelle popolazioni microcitemiche* (\*). Nota I di MARCELLO SINISCALCO, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

Estese ricerche di Autori italiani e americani <sup>(1)</sup> hanno dimostrato nell'uomo l'esistenza di un gene  $M$  autosomico, mendeliano semplice, semidominante sull'allele normale  $m$ , che in condizione eterozigote ( $Mm$ ) è responsabile dell'insorgenza di un'anomalia ematologica di solito compatibile con lo stato di buona salute (la microcitemia o talassemia minor), mentre in condizione omozigote è letale in quanto gli individui  $MM$  sono affetti da un'anemia grave che conduce a morte nei primi anni di vita (il morbo di Cooley o talassemia major).

Il gene  $M$  ha una distribuzione piuttosto irregolare e praticamente limitata al bacino del Mediterraneo: le punte di frequenza massima si osservano in Grecia, Sicilia, Sardegna e nella regione del delta padano; in questa ultima località la frequenza di  $M$  si aggira intorno ad un valore di 0,05 <sup>(2)</sup>.

Uno degli aspetti più interessanti del problema genetico della microcitemia è appunto quello di spiegare come possa conservarsi così elevata la frequenza di un gene che, per essere letale in condizione omozigote, viene costantemente eliminato ad ogni generazione in misura, come vedremo subito, tutt'altro che trascurabile.

È noto infatti che una delle prime conseguenze della selezione è il modificarsi delle frequenze geniche e che in particolare — nel caso della selezione totale contro l'omozigote recessivo o dominante in una popolazione che s'incroci a caso e dove non esistano fenomeni di compenso, — la frequenza

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Genetica dell'Università di Napoli ed il Galton Laboratory di Londra (University College).

L'autore desidera esprimere la propria gratitudine ai proff. E. Silvestroni e I. Bianco (Clinica Medica dell'Università di Roma) per avergli permesso di utilizzare i dati da essi raccolti sulla genetica della microcitemia; ai proff. J. B. S. Haldane e L. S. Penrose, al dott. C. A. B. Smith (University College — London) per l'aiuto di cui gli sono stati prodighi nell'elaborazione.

(\*\*) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) Per notizie complete sulla genetica della microcitemia ed una rassegna della estesa letteratura italiana ed americana, cfr.: E. SILVESTRONI, « 50° Congr. Soc. Med. Interna », Roma, 3, 108 (1949); J. V. NEEL, « Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol. », 15, 141 (1950); I. BIANCO, G. MONTALENTI, E. SILVESTRONI, M. SINISCALCO, « Annals of Eugenics », 16, 299 (1952); G. MONTALENTI, « Proc. IXth Int. Congr. of Genetics », 1953.

(2) E. SILVESTRONI, I. BIANCO, « Progresso Medico », 8, 757 (1952).



del gene sfavorevole decresce secondo il ritmo di una progressione armonica (Haldane <sup>(3)</sup>).

TABELLA I.

	Proporzioni zigotiche			Frequenza di $M$
	$mm$	$Mm$	$MM$	
Prima della selezione	$p^2$	$2pq$	$q^2$	$q$
Dopo la selezione	$\frac{p^2}{p^2 + 2pq}$	$\frac{2pq}{p^2 + 2pq}$	0	
ovvero	$\frac{1-q}{1+q}$	$\frac{2q}{1+q}$	0	$\frac{q}{1+q}$

Tutto ciò è illustrato in Tabella I dove vengono riportate le proporzioni zigotiche attese, prima e dopo che la selezione abbia luogo, in una popolazione teorica nella quale le frequenze di  $m$  e  $M$  siano rispettivamente espresse da  $p$  e  $q$ .

La frequenza del gene sfavorevole  $M$  varia cioè secondo il rapporto:

$$q = \frac{q}{1+q}$$

Tale rapporto tra due valori consecutivi di  $q$  può essere espresso in generale dall'equazione

$$q_{n+1} = \frac{q_n}{1+q_n}$$

che è appunto l'equazione che dà luogo allo sviluppo dei termini consecutivi di una progressione armonica. Da ciò si deduce che la frequenza di  $M$  decrescerà molto rapidamente quando  $q$  è elevato, e sempre più lentamente man mano ch'esso va diminuendo.

Queste considerazioni sono sufficienti per farci concludere che il mantenersi di così elevata frequenza degli eterozigoti  $Mm$  nelle popolazioni studiate debba in realtà spiegarsi con l'intervento di fenomeni capaci di compensare la perdita genica.

Infatti, come ha rilevato il Montalenti <sup>(1)</sup>, una così elevata percentuale di  $Mm$  non può essere interpretata come il livello attuale di una curva di frequenza regolarmente in decremento, perché, se così fosse, bisognerebbe allora assumere che una popolazione che oggi mostri il 20% di individui  $Mm$  avrebbe dovuto averne il 100% solo otto generazioni addietro. È evidente che ciò è assurdo.

(3) J. B. S. HALDANE, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », 23, 19-41; 158-163; 838-844; 26, 220-230; 27, 131-142; 28, 244-248 (1924-1932).

Già in altre occasioni Montalenti e collaboratori (1950<sup>(4)</sup>; 1952<sup>(1)</sup>; 1953<sup>(1)</sup>) hanno trattato questo problema cercando – per quanto possibile – d'individuare l'eventuale esistenza in tali popolazioni di fenomeni capaci di compensare la perdita genica come: (1) la selettività matrimoniale, (2) un elevato tasso di mutazione da  $m$  a  $M$ , (3) un'elevata fecondità in un particolare tipo d'incrocio (4) un valore selettivo positivo a favore degli eterozigoti  $Mm$ .

Lo scopo del presente lavoro è quello di discutere in dettaglio quelle ipotesi che – tra le su riferite – sembrano le più plausibili.

**SELETTIVITÀ MATRIMONIALE.** – Quest'ipotesi può senz'altro considerarsi improbabile in seguito alla dimostrazione data a più riprese che, nel materiale, studiato, i tre tipi di matrimonio –  $mm \times mm$ ,  $Mm \times mm$  e  $Mm \times Mm$  – si presentano praticamente nelle medesime proporzioni attese nel caso di una popolazione che s'incroci a caso (Montalenti, Silvestroni e Bianco, 1953)<sup>(5)</sup>.

**ELEVATO TASSO DI MUTAZIONE DA  $m$  a  $M$ .** – L'ipotesi di un elevato tasso di mutazione da  $m$  a  $M$  tale da compensare la perdita genica è – com'è stato sottolineato altre volte – anch'essa piuttosto improbabile se si pensa che, ove questo meccanismo fosse il solo a dover ristabilire l'equilibrio alterato dalla selezione totale contro gli  $MM$ , si dovrebbe trattare di un valore elevatissimo e mai prima osservato in specie animali e tanto meno nell'uomo.

Da elementari considerazioni<sup>(6)</sup> sul meccanismo di equilibrio tra mutazione e selezione – quando gli omozigoti dominanti sono letali – si ricava infatti che tale tasso di mutazione è dato da

$$v = \frac{1}{4} x_n^2 \quad \begin{array}{l} v = \text{tasso di mutazione} \\ x_n = \text{frequenza degli eterozigoti } Mm \end{array}$$

ovvero, per una frequenza degli eterozigoti  $Mm$  pari al 10%:

$$v = \frac{1}{4} (0.10)^2 = 2,5 \cdot 10^{-3}.$$

**FECONDITÀ DIFFERENZIALE A FAVORE DI UN PARTICOLARE TIPO D'INCROCIO.** – Silvestroni e coll. segnalavano<sup>(4)</sup> l'osservazione di una più elevata fecondità – misurata come numero medio di figli nati per famiglia – negli incroci del tipo  $Mm \times Mm$ .

L'informazione era relativa ad un primo collettivo di dati raccolti nelle popolazioni microcitemiche del Ferrarese (tabella II):

(4) E. SILVESTRONI, I. BIANCO, G. MONTALENTI, M. SINISCALCO, « Nature », 165, 682 (1950).

(5) G. MONTALENTI, E. SILVESTRONI, I. BIANCO, « Rend. Accad. Lincei », Cl. Sc. Fisiche, VIII, 14, 2, 183 (1953).

(6) C. C. LI, *Introduction to population genetics*. Peiping, 1948.

TABELLA II.

Tipo d'incrocio	N° di famiglie esaminate	N° medio di figli nati per famiglia	Errore medio
<i>mm</i> × <i>mm</i> . . . . .	1170	3.60	± 0.087
<i>Mm</i> × <i>mm</i> . . . . .	269	3.62	± 0.170
<i>Mm</i> × <i>Mm</i> . . . . .	19	5.89	± 0.960

Come si vede si trattava di una differenza significativa <sup>(7)</sup> solo ad un livello del 2 % che d'altronde, come vedremo meglio tra poco, non sarebbe stata da sola sufficiente a compensare la perdita genica.

Una nuova più larga campagna di ricerche fu condotta nell'estate del 1951 per chiarire questo particolare aspetto del problema (Montalenti, Silvestroni e Bianco, 1953) <sup>(8)</sup>.

Le informazioni raccolte in tale occasione si rivelavano questa volta (tabella III) nettamente contrarie ad ogni evidenza di fecondità differenziale in quanto il numero medio di figli nati, nei tre diversi tipi d'incrocio, presentava variazioni contenute nei limiti della fluttuazione statistica e doveva pertanto ritenersi praticamente il medesimo.

TABELLA III <sup>(8)</sup>.

Tipo d'incrocio	N° di famiglie esaminate	N° medio di figli nati per famiglia	Errore medio
<i>Mm</i> × <i>mm</i> . . . . .	1886	4.89	± 0.138
<i>Mm</i> × <i>Mm</i> . . . . .	793	5.02	± 0.217
<i>Mm</i> × <i>Mm</i> . . . . .	79	4.99	± 0.749

(7) Si consideri per esempio la differenza tra il valore medio dei figli nati da *Mm* × *Mm* e da *mm* × *mm*:

$$5.89 - 3.60 = 2.29 \text{ con un errore} = (0.960)^2 + (0.087)^2 = 0.963.$$

Ciò significa che tale differenza è solo  $2.29/0.963 = 2,4$  volte il proprio errore e pertanto è significativa ad un livello di circa il 2 %.

(8) Si noti che i valori medi riportati nella tabella III sono più elevati che quelli della tabella precedente. Ciò perché in questa occasione, disponendo di un più ampio materiale, abbiamo voluto realizzare il confronto su un collettivo più omogeneo selezionando quelle famiglie in cui la madre aveva raggiunto i 40 anni e che quindi poteva considerarsi alla fine del ciclo riproduttivo: in tal modo tutte le famiglie studiate potevano dirsi praticamente « complete ».

Anche l'ipotesi dell'esistenza di una fecondità differenziale a favore di un particolare tipo d'incrocio deve dunque ritenersi infondata e, del resto, non è difficile comprendere quanto improbabile dovesse essere un'evenienza del genere se si pensa — come si è accennato sopra — che anche un sensibile aumento di fecondità a favore dell'incrocio  $Mm \times Mm$  (come quello che sembrava esistere nei dati del 1950 dove il numero medio dei figli per tale incrocio era circa 1,6 volte superiore quello degli altri due) non sarebbe stato ancora sufficiente ad assicurare l'equilibrio genico.

Alcune brevi considerazioni di ordine teorico permetteranno di chiarire questa affermazione.

Sia  $x_n$  la frequenza degli eterozigoti  $Mm$  tra gli individui sopravvissuti della generazione ennesima di una popolazione che s'incrocia a caso e, di conseguenza,  $1 - x_n$  la frequenza dei normali  $mm$ .

AmMESSO che la fecondità dell'incrocio  $Mm \times Mm$  sia  $f$  volte quello degli altri incroci, ci chiediamo quale debba essere il valore minimo di  $f$  perché venga compensata la perdita genica dovuta alla eliminazione totale degli omozigoti dominanti  $MM$ .

Le proporzioni zigotiche nella generazione successiva  $n + 1$  saranno date dallo schema riportato qui appresso:

TABELLA IV.

Tipo d'incrocio	Frequenza dell'incrocio	Proporzioni zigotiche nella figliolanza		
		$mm$	$Mm$	$MM$
$mm \times mm$ . . . .	$(1 - x_n)^2$	$(1 - x_n)^2$	—	—
$Mm \times mm$ . . . .	$2x_n(1 - x_n)$	$x_n(1 - x_n)$	$x_n(1 - x_n)$	—
$Mm \times Mm$ . . . .	$(x_n)^2$	$1/4 f x_n^2$	$1/2 f x_n^2$	$1/4 f x_n^2$

Di qui segue che la somma dei figli  $mm$  e  $Mm$ , che rappresentano il totale genitori della generazione successiva, è uguale a:

$$(1 - x_n)^2 + 2x_n(1 - x_n) + 3/4 f x_n^2 = 1 - x_n^2 + 3/4 f x_n^2.$$

Pertanto la proporzione degli individui  $Mm$  nella generazione  $n + 1$  sarà:

$$x_{n+1} = \frac{x_n - x_n^2 + 1/2 f x_n^2}{1 - x_n^2 + 3/4 f x_n^2} = \frac{4x_n + 2(f - 2)x_n^2}{4 + (3f - 4)x_n^2}.$$

Ora è noto che l'equilibrio si ottiene quando il numero degli eterozigoti si mantiene costante attraverso le generazioni, ovvero quando

$$x_{n+1} = x_n = x$$



il che equivale a dire, nel nostro caso specifico, quando:

$$(1) \quad x = \frac{4x + 2(f-2)x^2}{4 + (3f-4)x^2} = \frac{4-2f}{4-3f}.$$

La (1) ci dice che l'equilibrio è solo possibile per  $f$  maggiore di 2. Infatti da essa si ricava che:

$$x = \infty \quad \text{quando} \quad 4 - 3f = 0 \quad \text{e quindi quando} \quad f = 4/3$$

$$x = 0 \quad \quad \quad \gg \quad 4 - 2f = 0 \quad \gg \quad \quad \quad \gg \quad f = 2.$$

Inoltre essendo, come è facile dimostrare:

$$\frac{4-2f}{4-3f} = 2/3 + \frac{4}{12-9f}$$

sarà anche:

$$x > 2/3 \quad \text{se } 12 - 9f \text{ è positivo, ovvero se } f < 4/3$$

$$x < 2/3 \quad \text{se } 12 - 9f \text{ è negativo} \quad \gg \quad f > 4/3 < 2.$$

Il grafico della figura 1 illustra meglio le relazioni tra  $f$  e  $x$ .

In conclusione: l'ipotesi della selezione matrimoniale è scartata dai dati di fatto; quella dell'elevata frequenza di mutazione appare poco probabile.

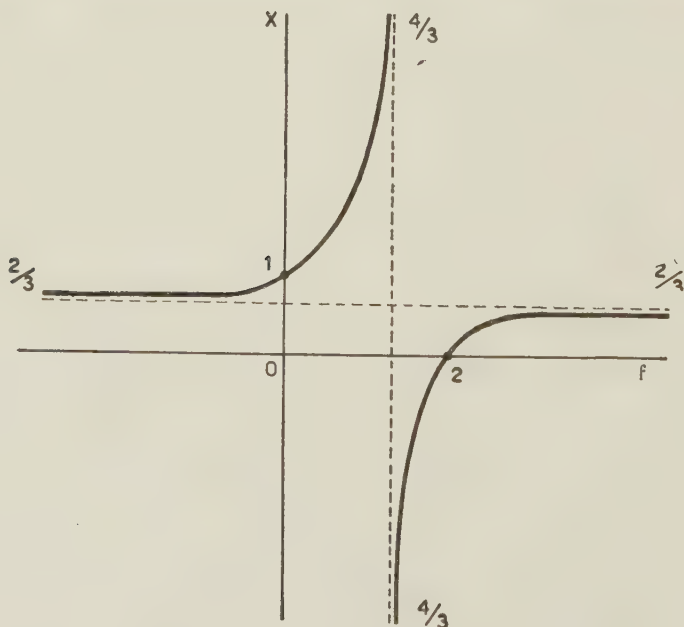


Fig. 1. - Espressione grafica dell'equazione  $X = \frac{4-2f}{4-3f}$ .

$X$  = frequenza degli eterozigoti

$f$  = fattore esprimente l'aumento di fecondità negli incroci  $Mm \times Mm$

Per spiegare, infine, il mantenimento dell'equilibrio genico con la sola ipotesi della fecondità differenziale a favore dell'incrocio  $Mm \times Mm$ , occorre che  $f > 2$ , dove  $f$  è il fattore che esprime l'aumento di fecondità di tale incrocio.

**Antropologia.** — *Ricerche biometriche sullo sviluppo e sulla senescenza dell'aorta umana* (\*). Nota di ANTONIO ASCENZI e ALESSANDRO ALISI, presentata (\*\*) dal Socio S. SERGI.

Tra le ricerche di biometria umana, quelle riferentesi all'apparato cardio-vascolare ed, in particolare, all'aorta, possono considerarsi fra le più antiche.

Se si escludono le vecchie osservazioni di Bizot, Donders e Jansen, von Ebner, Gimbert, Henle, Kölliker, Paget, Rokitansky, Vierordt e Virchow, di per sé talora criticabili per l'imprecisione della metodica, come pure per la poca praticità dell'unità di misura adottata (pollice), si può ritenere che i primi rilievi esaurienti sulla biometria del sistema cardio-vascolare siano quelli di Beneke (1878). Limitandoci ad accennare agli studi riferentisi fondamentalmente all'aorta, rileveremo come alle osservazioni del patologo di Marburg seguirono in ordine di tempo quelle di Schiele Wiegandt (1880), Thoma (1882), Grünstein (1896), Suter (1897), Scheel (1908), Kani (1910), Kaufmann (1919), Faber (1921), Ganter (1921), Dormanns ed Emminger (1934-35), Bömigh (1943), Faber (1946), Muratori e Gotte (1950), Wellman e Edwards (1950), Muratori (1951), Selberg (1951), Bompiani e Alisi (1951).

In questo complesso corpo di ricerche, accumulatosi nel giro di poco più di un settantennio, le osservazioni si basano, oltre che su misure della circonferenza interna dell'aorta, portata nei punti più diversi, anche su misure di spessore della parete (cfr. Faber, Grünstein, Kani, Muratori e Gotte, Muratori, Schiele Wiegandt, Wellman e Edwards). Più raramente è stata presa in considerazione la lunghezza del vaso (cfr. Scheel, Bompiani e Alisi).

In un esteso piano di ricerche comparative sul comportamento biometrico dell'aorta in condizioni normali e patologiche, abbiamo avuto l'opportunità di soffermarci su alcuni rilievi — a nostro avviso non privi di interesse — relativi ad un complesso di oltre 400 aorte provenienti da soggetti apparentemente indenni da lesioni cardio-vascolari. Su tali rilievi intendiamo qui riferire brevemente.

**MATERIALE DI STUDIO E TECNICA.** — Il materiale oggetto di studio è costituito da 428 aorte prelevate da cadaveri di soggetti di età compresa tra quella neonatale e la tarda vecchiaia.

Particolare cura è stata da noi posta nell'escludere dalla casistica tutte quelle condizioni morbose capaci di determinare modificazioni abnormi, sia primitive che secondarie, a carico dell'apparato cardio-vascolare.

(\*) La ricerca è stata eseguita nell'Istituto di Anatomia ed Istologia Patologica dell'Università di Roma sotto la guida del prof. Gaetano Bompiani.

(\*\*) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

Delle singole aorte sono state accuratamente misurate la circonferenza interna e la lunghezza. La prima è stata rilevata a vari livelli, corrispondenti a punti anatomici bene individuabili, tenuto conto soprattutto della diversa configurazione del vaso nelle varie età della vita.

I vari punti di repere sono stati scelti secondo l'ordine: 1° immediatamente al di sopra delle commessure delle sigmoidi aortiche; 2° a metà distanza tra orificio valvolare ed origine del tronco anonimo; 3° a livello del tronco anonimo; 4° all'origine della succlavia di sinistra; 5° all'origine della prima coppia di arterie intercostali aortiche; 6° all'origine delle arterie renali; 7° alla biforcazione dell'aorta.

Per la realizzazione pratica dei rilievi biometrici, l'aorta veniva prelevata in continuità con il cuore e accuratamente isolata dai tessuti circostanti. Quindi veniva aperta secondo una linea che, iniziando dall'origine del vaso, seguiva dapprima il versante concavo dell'arco, quindi si spostava progressivamente sulla medietà della faccia anteriore dei tratti toracico e addominale fino alla biforcazione. La recisione dell'arteria dal cuore era praticata dopo apertura e veniva eseguita immediatamente al di sopra dell'apice delle commessure valvolari, cioè nel primo punto in cui si misurava la circonferenza.

Per poter rilevare con la massima esattezza le misure relative alle circonferenze interne ed alla lunghezza, il vaso aperto veniva fissato su una tavoletta piana in legno, evitando di imprimere allo stesso deformazioni sia pure minime.

Le misure sono state praticate mediante nastro metrico. Per quelle relative alle circonferenze, il nastro veniva portato a livello dei vari punti di repere e qui disposto perpendicolarmente all'asse del vaso in quel punto. Particolare cura è stata posta ad evitare che durante i rilievi metrici venissero eseguite manovre di pressione sulla parete arteriosa.

Per le misure di lunghezza il nastro metrico seguiva una linea che correva lungo punti equidistanti dai margini di sezione del vaso. Gli estremi prossimale e distale dell'aorta, in base ai quali fu computata la lunghezza, erano rappresentati, rispettivamente, da una linea orizzontale passante per gli apici delle commessure delle sigmoidi e da una linea orizzontale tangente all'apice dello sperone di biforcazione dell'arteria.

Particolare sviluppo è stato dato alla elaborazione dell'indice aortico ed allo studio dell'andamento dello stesso nelle varie età della vita.

Come è stato già ampiamente chiarito dal Bompiani in altra Nota in collaborazione con uno di noi (Alisi), l'indice aortico sintetizza i caratteri morfologici generali dell'arteria desumendoli dalla circonferenza media e dalla lunghezza, inoltre esso permette di stabilire utili rapporti quantitativi tra aorte normali appartenenti a soggetti delle più diverse età, come pure tra aorte normali e aorte modificate da processi patologici.

L'indice aortico è dato dalla formula seguente:

$$I. A. = \frac{\text{Circonferenza media} \times 100}{\text{Lunghezza}}$$

ove la circonferenza media è calcolata come media aritmetica dei valori delle circonferenze, misurati nei sette punti precedentemente indicati. E poiché questi punti sono stati scelti opportunamente, in modo da corrispondere ad alcune delle sedi emodinamicamente più importanti dell'arteria, il valore della circonferenza media riassume, a sua volta, le note peculiari del lume aortico nei vari tratti.

**RISULTATI E CONSIDERAZIONI.** - La circonferenza dell'aorta - in armonia con le osservazioni di Beneke, Ganter, Muratori e Gotte, Scheel, Schiele, Wiegandt, Selberg, Suter, Wellman e Edwards - va aumentando progressivamente dalla nascita fino alla più tarda vecchiaia (fig. 1). Tuttavia, il ritmo di incremento circonferenziale non è costante.

Dopo un rapido aumento, che corrisponde ai primi due decenni, esso diminuisce gradatamente fino ad una fase come di spiccato rallentamento,

se non proprio di arresto o di sosta. Questa è presente in tutti i grafici relativi ai punti studiati, e corrisponde al quarto decennio. Nei maschi l'andamento ha carattere più deciso che nelle femmine.

Successivamente, la circonferenza dell'arteria riprende ad aumentare, sia pure con ritmo iniziale talora più accelerato. Infine, nel settimo e nell'ottavo decennio, il lume del vaso sembra subire, come un ulteriore, più rapido, incremento.

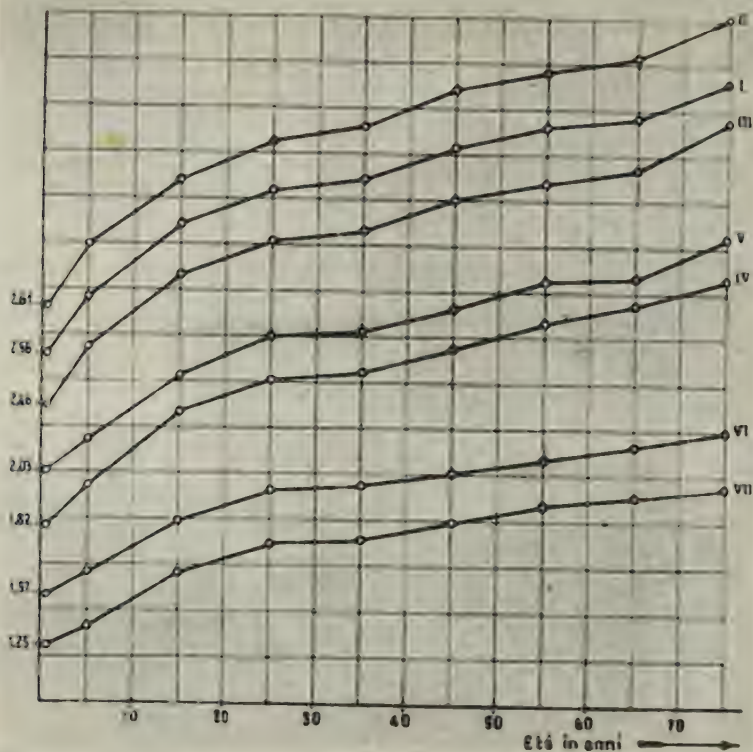


Fig. 1.

Queste singolarità nelle progressive modificazioni della circonferenza, e quindi del calibro dell'aorta, costituiscono – a nostro avviso – altrettanti elementi orientativi in ordine ad una interpretazione sempre più esatta degli adattamenti morfologici e, quindi, funzionali dell'arteria nelle varie età. Non crediamo, pertanto, di poter condividere l'opinione di Selberg, il quale ritiene che l'aumento circonferenziale dell'aorta abbia andamento iperbolico.

Le nostre determinazioni della lunghezza dell'aorta nelle varie età portano alla costruzione di una curva di accrescimento, il cui andamento generale è molto simile a quello delle curve relative delle circonferenze dell'ar-



teria. Infatti anche qui (fig. 2) si nota un rapido incremento iniziale con progressiva « stasi » intorno al quarto decennio. Segue, quindi, un'ulteriore ripresa dell'allungamento fino alla tarda vecchiaia.

Si può pertanto ritenere che esista una stretta correlazione tra accrescimento lineare della circonferenza ed accrescimento in lunghezza dell'aorta.

L'analogia nell'andamento delle curve di accrescimento longitudinale e perimetrico dell'aorta, ci ha indotti a seguire un comune procedimento analitico per lo studio di esse.

A tale scopo abbiamo creduto opportuno tener presenti le singolarità mostrate dai grafici e stabilire la rappresentazione degli stessi non già sulla

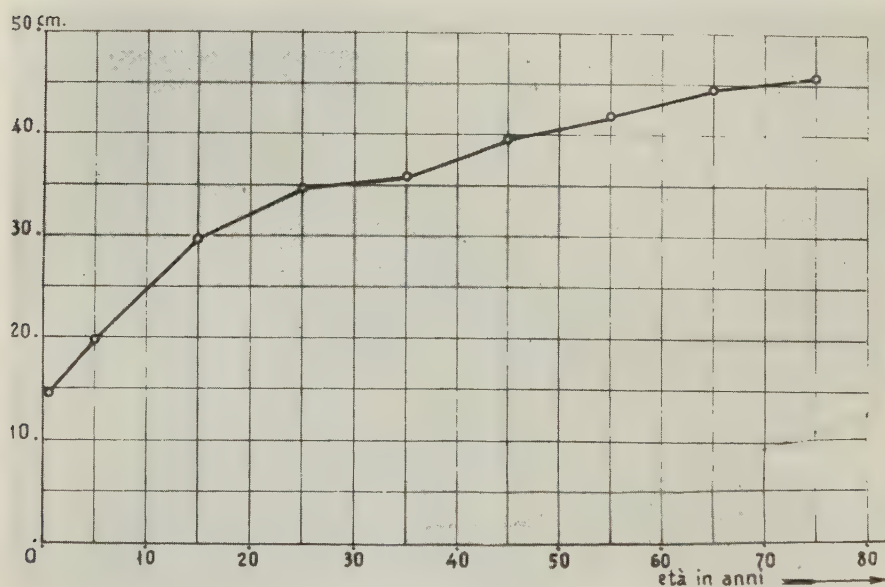


Fig. 2.

base di una sola curva, bensì di una serie di tratti di curve, ognuno dei quali descrivesse una parte del fenomeno. In altre parole, riteniamo che la curva di accrescimento della circonferenza dell'aorta, in analogia ad altre curve di accrescimento lineare (cfr. Brody e coll., Schmalhausen, Teissier, Abe-loos), venga più adeguatamente rappresentata da tratti multipli di curve diverse (cfr. D'Ancona).

Come primo tratto abbiamo scelto quello compreso tra la nascita e il quarto decennio incluso ed abbiamo voluto stabilire se i valori medi delle misure si allineassero secondo una parabola la quale - come è noto - costituisce la curva più adeguata per la rappresentazione dell'accrescimento lineare (cfr. D'Ancona).

Il problema è stato affrontato in maniera diretta. Infatti, tenendo presente che i punti di registrazione biometrica nel primo tratto della curva

erano cinque, è stata calcolata la conica che soddisfaceva ad essi, applicando la nozione di fascio di coniche al ben noto teorema della geometria analitica secondo il quale una conica è determinata da cinque punti.

Si è potuto così addivenire ad una prima constatazione, e cioè che per singole curve di accrescimento lineare (sia secondo la lunghezza che secondo le circonferenze) il tratto corrispondente ai primi quattro decenni di vita non è rappresentabile mediante una parabola.

Con ciò, non si può escludere che l'accrescimento circonferenziale e quello longitudinale dell'aorta non seguano un andamento parabolico. Interpolando, ad esempio, secondo la regola dei minimi quadrati, i primi cinque valori medi sperimentali della curva di accrescimento circonferenziale relativa al primo livello di misurazione, per i soli soggetti di sesso maschile, si ottiene una parabola ( $y = 2,546824 + 0,250206x - 0,004007x^2$ ), i cui valori teorici sono compresi entro lo scarto quadratico medio dei corrispondenti valori sperimentali (cfr. tabella I).

TABELLA I.

Età	Valori sperimentali	$\sigma$	Valori teorici
0 — 11/12	2,56	$\pm 0,41$	2,67
1 — 10	3,85	$\pm 0,60$	3,70
11 — 20	5,41	$\pm 0,35$	5,40
21 — 30	6,20	$\pm 0,65$	6,30
31 — 40	6,44	$\pm 0,68$	6,39

Tale riscontro, in realtà, non può sorprendere, in quanto il nostro precedente tentativo di elaborazione analitica diretta dei dati sperimentali trova una inevitabile limitazione interpretativa nel fatto che i punti considerati sono soltanto cinque <sup>(1)</sup>. È noto infatti, in virtù del teorema sopra enunciato, che per cinque punti passa sempre una conica ed una sola. Quindi, la limitatezza dei punti sperimentali vincola il calcolo in modo che la rappresentazione analitica del primo tratto delle curve di accrescimento mediante una conica risulta sempre soddisfatta, senza che per questo si possa ritenere che la conica stessa soddisfi alle esigenze biologiche del problema. Non si può quindi escludere che l'andamento accrescitivo dell'aorta, sia in senso circonferenziale che in lunghezza, non possa essere, nella realtà, sod-

(1) L'esiguità dei punti è stata determinata dalla necessità di ottenere una adeguata concentrazione statistica dei casi, sì da conferire ai valori medi maggiore significatività.

disfatto da un tipo di conica diverso da quella calcolata, ovvero da un tratto di curva algebrica di ordine differente. A tale proposito va tenuto ancora presente che i valori sperimentali non sono assoluti, ma rappresentativi di una media matematica compresa entro un margine di errore che è dato dallo scarto quadratico medio. Pertanto, non ha significato attribuire importanza alle singole curve passanti per i soli punti relativi alle medie dei valori sperimentali, quanto al fascio di curve, matematicamente infinito, compreso entro l'intervallo di variabilità, i cui limiti sono rappresentati dallo scarto quadratico medio.

Con un simile modo di vedere si accorda anche il fatto che l'andamento, oltre il quarto decennio, delle curve ottenute per interpolazione dei dati sperimentali, non risulta sempre interpretabile in senso biologico. Inoltre tali curve non trovano in nessun modo corrispondenza con i dati sperimentali relativi alle circonferenze ed alla lunghezza dell'aorta oltre il quarto decennio.

Pertanto sembra, a nostro avviso, che questi approcci matematici preliminari al problema dell'accrescimento circonferenziale e longitudinale della aorta portino soprattutto a far rilevare che l'andamento delle curve calcolate non soddisfa – dopo il quarto decennio – a quello denunciato dai corrispondenti valori sperimentali. In tal senso, si potrebbe ritenere che la legge di accrescimento nei primi quattro decenni di vita sia diversa da quella che esprime l'incremento dimensionale dell'aorta nei decenni successivi.

Considerato così l'andamento delle curve di accrescimento dell'aorta con l'ausilio del solo strumento matematico, vorremmo ora passare ad una analisi interpretativa, di ordine squisitamente biologico, del fenomeno sulla base dei dati derivanti dallo studio delle modificazioni pressorie, dell'elasticità, dello spessore e della struttura della parete dell'arteria. All'uopo crediamo di poter stabilire, in forma sintetica, quanto segue. Per ragguagli più ampi il lettore potrà consultare la memoria « in extenso » di prossima pubblicazione in altra sede.

Nei primi tre decenni di vita l'aumento progressivo della pressione arteriosa massima e minima (cfr. Symonds, 1923) viene equilibrato in maniera siffatta dalla differenziazione morfologica e dal progrediente aumento dello spessore della parete – ed in particolare della tonaca media (cfr. Braus, 1924), e degli strati muscolo-elastico ed elastico proprio dell'intima (cfr. Muratori e Gotte) – da derivarne uno stato di equilibrio dinamico il quale trova la sua espressione relativamente più stabile, dal punto di vista biometrico, nell'andamento « lievemente inclinato » della curva di accrescimento in corrispondenza del quarto decennio. Nei decenni successivi il più rapido incremento della pressione arteriosa massima viene contrastato da parte dell'arteria mediante il solo ispessimento collageno dello strato sottoendoteliale dell'intima, mentre l'elasticità della media diminuisce. Ne deriva pertanto una deformazione definitiva del vaso, sia secondo la circonferenza che secondo la lunghezza, per cui questo si sfianca sempre di più. La massima ectasia si manifesta poi verso il settimo e l'ottavo decennio, quando

oramai l'ispessimento collagene dell'intima si arresta e l'elasticità, sia della media che dell'intima stessa, ha subito un decremento notevole.

Concludendo, possiamo ritenere che il quarto decennio costituisca un periodo importante e singolare nella ontogenesi dell'aorta; esso cioè rappresenta l'epoca di raggiungimento del massimo equilibrio tra pressione endovasale e struttura della parete.

Accanto ai rilievi dell'accrescimento e della senescenza dell'aorta, desunti dall'andamento dei valori medi assoluti della circonferenza e della lunghezza,

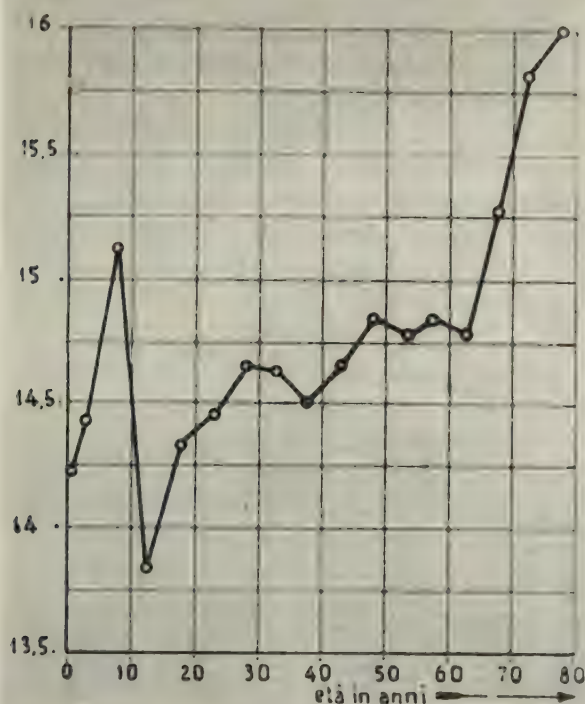


Fig. 3.

particolarmente fruttuosi ci sono apparsi i dati derivanti dalla elaborazione dell'*Indice Aortico*.

A partire dalla nascita, l'Indice Aortico mostra un rapido incremento entro il secondo quinquennio (cfr. fig. 3). Quindi, il valore cade improvvisamente, sicché nel terzo quinquennio si aggira attorno a cifre inferiori, rispetto a quelle dell'epoca neonatale. In seguito, l'Indice Aortico riprende a salire progressivamente fino al tredicesimo quinquennio (60-65 anni). Tuttavia, in questo periodo, l'andamento della curva non è lineare, ma, dopo un incremento iniziale relativamente spiccato, esso tende a denunciare come una stasi e perfino un modico decremento attorno i 35-40 anni.



Dopo il tredicesimo quinquennio, l'Indice Aortico manifesta un rapido incremento finale. Solo tra il 65° ed il 70° anno di vita, il valore dell'Indice corrisponde a quello raggiunto nel corso del secondo quinquennio.

In ordine ad una rappresentazione adeguata del presente andamento dell'Indice Aortico, ci sembra necessario prospettare le seguenti considerazioni. Inizialmente l'arteria si accresce soprattutto in larghezza - e quindi in calibro - anziché in lunghezza. Tra il secondo ed il terzo quinquennio, invece, l'aorta subisce una « crisi » di allungamento e diventa angusta. A quest'età, che precede o corrisponde all'avvento della crisi puberale, il vaso denota il minimo calibro relativo rispetto alle altre età della vita (cfr. Beneke, Scheel, Selberg). Successivamente, l'incremento circonferenziale relativo riprende lentamente, fino al tredicesimo quinquennio. Quindi, a partire da quest'epoca, subisce una rapida accelerazione. Solo tra il sessantacinquesimo ed il settantesimo anno il valore del rapporto percentuale tra circonferenza e lunghezza dell'arteria eguaglia quello raggiunto nel secondo quinquennio. È interessante notare come nel quarto decennio, ed in particolare tra il trentacinquesimo ed il quarantesimo anno, nel periodo cioè che - in ordine a quanto è stato precedentemente esposto - corrisponde alla fine dell'accrescimento vero del vaso, il calibro risulta lievemente ridotto rispetto allo sviluppo in lunghezza.

CONCLUSIONI. - Sulla base di quanto siamo venuti esponendo, crediamo di poter enunciare le seguenti proposizioni conclusive:

1° I grafici riferentisi alle modificazioni della circonferenza dell'aorta in rapporto all'età dimostrano un andamento complesso che non può venire analiticamente rappresentato da una curva del secondo ordine, ed in particolare, da una parabola.

2° Il grafico delle modificazioni in lunghezza dell'aorta in rapporto all'età dimostra anch'esso - in linea generale - un andamento complesso, peraltro analogo a quello dei grafici relativi alle circonferenze.

3° La rappresentazione analitica sia dell'incremento circonferenziale che dell'allungamento dell'aorta in funzione dell'età può venire realizzata soltanto con l'ausilio di tratti multipli di curve diverse.

4° In particolare, il tratto di curva rappresentativo dell'accrescimento in circonferenza ed in lunghezza dell'aorta nel periodo compreso tra la nascita ed il quarto decennio (35° anno), non si adegua alla rappresentazione analitica dell'andamento del fenomeno nelle altre età della vita.

5° Il presente rilievo trova la sua giustificazione nel fatto che il quarto decennio costituisce un periodo « singolare » nella evoluzione ontogenetica dell'aorta.

6° Oltre che i dati biometrici, anche il comportamento della pressione arteriosa, le condizioni di perfezionamento strutturale della parete, l'andamento delle proprietà elastiche della tonaca media portano, nel complesso, a ritenere che con il quarto decennio si chiude il ciclo di accrescimento vero dell'arteria.

7° Al di là di quest'epoca, la parete della aorta mostra una condizione di adattamento siffatto da identificarsi sempre più con i fenomeni della senescenza.

8° L'Indice Aortico, ponendo in rilievo le modificazioni circonferenziali in riferimento alla lunghezza dell'arteria, mette soprattutto in evidenza una spiccata angustia del calibro nel periodo immediatamente prepuberario e pubertario.

#### BIBLIOGRAFIA.

ABELOOS, citato da D'ANCONA.

BENEKE F. W.: *Die anatomische Grundlagen der Konstitutionsanomalien des Menschen*. N. G. Elwert'sche, Marburg, 1878.

BIZOT, citato da SELBERG.

BÖMIGH R., «Virchow's Arch.», 311, 25 (1943).

BOMPIANI G. e ALISI A., «Atti della Società Italiana di Patologia», vol. II, parte II, 1951.

BRAUS H., *Anatomie des Menschen*, Bd. II, 1924.

BRODY e coll., citato da D'ANCONA.

D'ANCONA V., *Limiti e ritmi dell'accrescimento animale*. «Quaderno 28 dei Problemi attuali di scienza e di cultura». Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1952.

DONDERS e JANSEN, citati da SCHIELE WIEGANDT.

DORMANN E. e EMMINGER E., «Virchow's Arch.», 293, 545 (1934); 295, 525 (1935).

EBNER (von), citato da GRÜNSTEIN.

FABER A., *Die Arteriosclerose; ihre pathologische Anatomie, ihre Pathogenese und Aetiologie*. G. Fischer, Jena, 1921.

GANTER R., «Virchow's Arch.», 232, 160 (1921).

GIMBERT, citato da SCHIELE WIEGANDT.

GRUNSTEIN N., «Arch. f. mikroskop. Anat.», 47, 583 (1896).

HENLE, citato da SCHIELE WIEGANDT.

HWILIWITZKAIA M. I., «Virchow's Arch.», 261, 543 (1926).

KANI I.: «Virchow's Arch.», 201, 45 (1910).

KAUFMANN L., *Zur Frage der Aorta angusta*. Jena, 1919.

KÖLLIKER, citato da SCHIELE WIEGANDT.

MURATORI G., *Struttura, accrescimento e senescenza fisiologica delle arterie*. «Annali dell'Università di Ferrara», vol. VIII, parte II, p. 131, anni 1948-49 e 1949-50. Prolusione tenuta il 12 aprile 1951, presso l'Università di Ferrara.

MURATORI G. e GOTTE L., «Arch. Ital. anat. e embriol.», 55, 269 (1950).

PAGET, citato da SCHIELE WIEGANDT.

ROKITANSKY, citato da SELBERG.

SELBERG W., «Beitr. path. Anat. u. allg. Path.», 111, 165 (1951).

SCHIELE O., «Virchow's Arch.», 191, 135 (1908).

SCHIELE WIEGANDT V., «Virchow's Arch.», 82, 27 (1880).

SCHMALHAUSEN, citato da D'ANCONA.

SUTER F., «Arch. exper. Path. u. Pharmacol.», 39, 289 (1897).

SYMONDS B., «J.A.M.A.», 80, 232 (1923).

TEISSIER, citato da D'ANCONA.

VIERORDT, citato da SCHIELE WIEGANDT.

VIRCHOW, citato da SELBERG.

WELLMAN W. E. e EDWARDS J. E., «Arch. Path.», 50, 183 (1950).

## COMMEMORAZIONI

**Commemorazione del Corrispondente Laureto Tieri**

Tenuta (\*) dal Socio ANTONIO CARRELLI

Il 17 agosto del 1952 moriva in Firenze Laureto Tieri, in quella città che da ben 20 anni lo ospitava ed alla quale egli ormai si sentiva profondamente legato. Scompareva un uomo che aveva dedicato tutta la sua vita all'insegnamento ed alla ricerca, un uomo che immediatamente manifestava a chiunque lo avvicinasse due qualità che lo hanno reso carissimo a tutti: onestà e lealtà. Nato in Abruzzo, e precisamente a Bolognano, piccolo paese della Maiella, il 24 febbraio del 1879, compì i primi studi nella sua stessa terra, all'Aquila. Roma lo accolse come studente universitario di Fisica; si laureò nel 1903 e nell'Istituto di Fisica diretto allora da Blaserna, muoveva i suoi primi passi di ricercatore. Lì ebbe la ventura di subire l'influenza del Sella che era, in quel periodo, nel pieno della sua attività. La scuola di Roma, in tale momento, appunto sotto la spinta del Blaserna, realizzata dal Sella con grande aderenza alle direttive avute, pensava, e giustamente, di rendere lo studio della Fisica, oltre che ricco di cognizioni teoriche, e quindi dotato di una notevole impostazione matematica, anche molto aderente ai problemi della ricerca fisica; s'intendeva cioè preparare nuove generazioni a nuove tecniche sperimentali allo scopo di raggiungere due fini precisi: in primo luogo dare la possibilità di conoscere fatti sperimentali fondamentali per visione diretta, il che acuisce notevolmente il senso fisico dei giovani, ed in secondo luogo mediante una adeguata « scuola pratica » renderli edotti della pratica sperimentale in modo da prepararli a risolvere, nelle loro ricerche future, i vari problemi che si potevano presentare. Quando si guarda il complesso dell'attività scientifica del Tieri, si vede appunto come nella sua produzione è sempre molto chiaro il problema fisico posto, ed è sempre ugualmente precisa la tecnica sperimentale che serve a risolvere il problema affrontato.

Dopo un ciclo di ricerche essenzialmente di carattere magnetico il Tieri conquista nel 1913 la libera docenza in Fisica Sperimentale. Lo scoppio della prima guerra mondiale lo trova pronto al compimento del suo dovere, pur potendo avvantaggiarsi dell'esonero, concesso agli insegnanti di ruolo universitario. Durante la guerra espletò senza alcuna limitazione i suoi compiti di italiano e di soldato, raggiungendo il grado di Maggiore nell'arma di artiglieria. Durante la guerra fu anche istruttore nei corsi allievi ufficiali di complemento. Per le sue qualità didattiche, finito il conflitto, fu tratte-

(\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

nuto per un certo tempo a Torino presso quella Scuola di Artiglieria, e durante questo periodo la sua attività fu anche rivolta alla compilazione di un eccellente manuale di puntamento che per vario tempo non mancò di avere notevole successo.

Ritornato quindi a Roma nel 1919 presso l'Istituto Fisico non trovò più quale direttore il Blaserna, ma il giovane suo successore Corbino, e seguendo in parte l'indirizzo e l'andamento degli studi di tale Maestro ritornò alla sua attività di ricercatore, che doveva essere rapidamente coronata da successo: nel 1923 infatti fu chiamato, dopo concorso, alla Cattedra di Fisica dell'Università di Messina. In questa Città gli toccava un compito molto arduo e faticoso; dopo il terremoto del 1908 infatti non si era pensato ad una sistemazione definitiva e decorosa dell'Istituto di Fisica di quella città, ed il Tieri si accinse alla fatica con entusiasmo e competenza, realizzando un Istituto Fisico concepito organicamente e modernamente, in base alle esigenze di ricerche didattiche che la Fisica in questi tempi è chiamata ad assolvere. E così ebbe la soddisfazione, dopo lunga fatica, di poter dotare una giovane Università, praticamente sorta dal nulla dopo la terribile sciagura del 1908, di un Istituto di ricerca modernamente concepito ed attrezzato. Dopo dieci anni di permanenza a Messina nel 1933 fu chiamato all'Istituto Fisico di Firenze in Arcetri, alla morte del prof. Garbasso, e lì completò la sua carriera, in quanto che, come direttore dell'Istituto Fisico di Firenze, fu colpito dai limiti di età, e cioè nel 1949; dopo tre anni il male che lo minava da tempo, lo condusse alla tomba.

L'attività di ricercatore del Tieri è da inquadrare nell'epoca in cui si svolse, e nell'indirizzo delle scuole da lui frequentate; si era agli albori del secolo, e problemi oscuri aveva lasciato la generazione precedente: un problema fondamentale formava sempre un punto di richiamo per la complessità delle sue manifestazioni, e per le difficoltà grandissime connesse alla sua risoluzione, il magnetismo ed in particolare il ferromagnetismo. Le prime ricerche del Tieri, pubblicate per la maggior parte nei nostri « Rendiconti », riguardano appunto problemi di magnetismo, di magnetostrizione, azione di campi elettrici alternati sui cicli di magnetizzazione dei ferromagnetici. Numerosi ed interessanti risultati sarebbero da ricordare nel campo del magnetismo, ma in questa varia attività merita una speciale menzione una ricerca condotta insieme al Piola, con grande perizia sperimentale, per stabilire l'origine della tensione prodotta nei ferromagnetici del campo magnetico. Era quella una questione fondamentale che aspettava una risposta almeno dal punto fenomenologico. Con abile ragionamento e raffinato dispositivo sperimentale si riuscì a misurare tale tensione, ed il metodo è molto originale e quanto più possibile esente da critiche; esso permise loro di giungere ad una conclusione importante la cui interpretazione è riservata alla moderna teoria sul magnetismo ed in particolare sulla magnetostrizione, e cioè essi riuscirono a dimostrare che tale tensione era proporzionale, contrariamente alle previsioni di Maxwell, al quadrato del campo magnetico.



Ma indubbiamente le sue ricerche più significative sono state quelle relative a manifestazioni di magneottica. Da poco era stato messo in evidenza dal Majorana che speciali soluzioni colloidali, e cioè ferro colloidali, detto ferro Bravais, posto in un campo magnetico o messo in moto acquistano una notevole birifrangenza. Ora il valore di questa birifrangenza dipende fra l'altro dalla concentrazione dei granuli e può essere determinata con grandissima precisione, ed ecco che tale fatto è acutamente sfruttato quale originale mezzo di indagine; esso è stato infatti utilizzato dal Tieri in due ordini di indagini: in uno egli sfrutta la birifrangenza accidentale, dovuta al moto, ed utilizza tale proprietà con un dispositivo atto ad ottenere indicazioni sul moto dei liquidi: tutto un campo importante relativo al moto lento dei liquidi viene in tal modo ad essere visualizzato in maniera molto evidente; purtroppo le difficoltà inerenti alla produzione di ferro colloidale in maniera sicura e con proprietà riproducibile non ha dato al metodo quella estensione e quella diffusione che merita. Ma questo fenomeno della birifrangenza per azione del campo magnetico, può servire come si è detto, per la determinazione della concentrazione di una soluzione di tale tipo. Ora una di queste soluzioni dopo un opportuno periodo di riposo può essere logicamente assimilata, come qualunque sospensione più o meno stabile, ad un'atmosfera in miniatura, ecco che in tal modo si realizza un metodo per la misura del numero  $N$  di Avogadro che indubbiamente per praticità presenta vantaggi su quello classico di Perrin, ricerca che appunto fu realizzata dal Tieri ottenendo per il numero  $N$  un ottimo valore sperimentale.

Un gruppo di ricerche tratta del complesso processo di solidificazione del Bi in campo magnetico, e dà un contributo notevole alla sistemazione fenomenologica degli effetti termo-galvanomagnetici; fra queste ricerche merita una speciale menzione quella che realizza con un motore termico in campo magnetico usando come rotore un cilindro di Bi; in questo originale dispositivo il moto senza alcun contatto strisciante si ottiene mediante l'utilizzazione dell'azione magnetica su correnti le quali alla loro volta sono prodotte dal campo magnetico agente su di un flusso termico prodotto opportunamente nel cilindro.

Una specialissima menzione merita la sua attività didattica, ad essa egli si dedicò sempre con grande passione, convinto com'era che l'insegnamento della Fisica richiede da parte dell'insegnante l'impegno continuo di una dimostrazione sperimentale adeguata e convincente di quanto si afferma, e conseguentemente all'esperimento didattico egli dedicò sempre grandissima cura. Amava i giovani ed in tutta la sua vita dedicata esclusivamente allo insegnamento ed al laboratorio, il suo più grande diletto era di stare fra essi.

Per i suoi assistenti aveva una paterna ed affettuosa simpatia, sempre pieno d'interesse e d'incoraggiamento; ad essi non ha mai creato il più piccolo intralcio per le loro ricerche, cercando sempre con passione giovanile di procurare loro con ogni sforzo i mezzi necessari per la loro attività.

La sua dirittura morale e la sua onestà lo hanno sempre reso amatissimo da tutti i colleghi; modesto e ritirato è stato sempre molto apprezzato e stimato da quanti hanno avuto la possibilità di avvicinarlo.

Nella sua città d'elezione Firenze, fu Consigliere d'Amministrazione dell'Istituto Nazionale d'Öttica di Arcetri, e nel 1948 fece parte del Comitato di Redazione degli Atti della Fondazione «Giorgio Ronchi».

L'Accademia Peloritana di Messina lo annoverò fra i suoi soci.

La sua cara persona, la sua calma ed il suo signorile tratto, la sobrietà d'eloquenza congiunta ad una profonda cultura non saranno dimenticate dagli amici e dai discepoli.

Alla sua eletta consorte, ai suoi due cari figli, giunga, a mio mezzo, da parte dell'Accademia, un mesto, cordiale, deferente saluto.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà la parola al Socio Carrelli che rievoca la figura e l'opera del compianto Collega Laureto Tieri.

Il Presidente ringrazia l'oratore per le sue elevate parole e rinnova ai familiari del prof. Tieri, presenti alla commemorazione, l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la scomparsa dell'insigne Collega.

Il Presidente annunzia che il Consiglio di Presidenza, accogliendo la proposta dei Colleghi De Blasi e Cotronei, ha deliberato di celebrare il centenario della nascita di Giovan Battista Grassi che cade nel corrente anno e di affidare la commemorazione dell'illustre biologo al Socio Cotronei. Tale commemorazione avrà luogo nel prossimo mese di aprile in occasione delle sedute accademiche previste per tale mese.

## COMUNICAZIONI VARIE

Il prof. Giordani comunica che è uscito in questi giorni il fascicolo dei Rendiconti n. 5 (novembre 1953) e osserva che il ritardo nella stampa di detto fascicolo non è dipeso da un rallentamento del ritmo delle pubblicazioni accademiche, bensì da una occasionale scarsità di materiale.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Carobbi offre in omaggio e presenta il volume IX dei Rendiconti della Società Mineralogica Italiana, da lui presieduta, contenente gli Atti del IX Congresso della predetta Società, svoltosi a Firenze dal 29 set-

tembre al 3 ottobre 1952 e, dopo aver ricordato di aver già presentato, nella seduta dell'11 aprile 1953, i volumi IV, V, VI, VII e VIII dei predetti Rendiconti, assicura che sarà lieto di fare omaggio all'Accademia di quelli che usciranno in seguito.

Il Socio Persico offre in omaggio la 3<sup>a</sup> edizione del suo volume « Introduzione alla fisica matematica » che ha la sua origine dall'elaborazione della parte di carattere generale e propedeutico, introdotta dall'Autore nel Corso di fisica matematica, svolto per diversi anni nella Università di Torino. L'opera ha carattere prevalentemente scolastico che ha conservato anche nella 3<sup>a</sup> edizione, nella quale è stato notevolmente ampliato il capitolo sulla relatività con l'aggiunta della interpretazione geometrica quadrimensionale, delle leggi di trasformazione delle grandezze elettriche e magnetiche e della dimostrazione dell'invarianza delle equazioni di Maxwell.

Il Socio Polvani offre in omaggio il IV volume (1800-1805) dell'« Epistolario Voltiano », edito dalla Commissione per l'Edizione Nazionale delle Opere di Alessandro Volta, sotto gli auspici dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e della Società Italiana di Fisica. In considerazione dell'importanza del volume, che comprende il periodo che va dal 26 aprile 1800 al 22 giugno 1805 e si riferisce principalmente ai rapporti tra Volta e Napoleone, il Socio Polvani ritiene opportuno dare lettura della prefazione da lui predisposta al volume stesso.

Il Socio Colonnetti offre in omaggio il 1<sup>o</sup> volume, dal titolo « Teoria Generale dell'equilibrio », della terza edizione del suo Trattato di « Scienza delle costruzioni » e ricorda che l'opera, nella quale egli ha raccolto le lezioni impartite ai suoi allievi del Politecnico di Torino, rispecchia fedelmente la concezione didattica alla quale egli ispira tutto il suo insegnamento, che si propone, deliberatamente, finalità di alta cultura e, solo subordinatamente, di preparazione professionale. La nuova edizione è preceduta da larghi cenni storico-critici sui fondamenti della statica e, all'esposizione sistematica dei teoremi fondamentali della teoria classica dell'elasticità e della moderna teoria degli stati di coazione, farà poi seguito una più ampia trattazione di certi problemi della pratica tecnica, alla cui risoluzione quei teoremi possono venire utilmente applicati.

Il Socio Colonnetti conclude affermando che lo spirito dell'opera resta però sempre immutato e che egli è lieto di poterla considerare come un risultato della sua attività di ricerca scientifica.

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno offerto pubblicazioni in omaggio.

Il Segretario accademico presenta le opere inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza i volumi I e II (parte I) delle « Oeuvres complètes » di Elie Cartan, un fascicolo contenente l'orazione funebre in memoria del compianto Socio Straniero Maurice Lugeon, pronunciata dal Pastore prof. Henri Germond nella Cattedrale di Losanna il 26 ottobre 1953, il volume « Linen flax fibre production in New Zealand » di J. W. Hadfield e due studi del Socio Straniero Gutenberg.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per le pubblicazioni nei Rendiconti i Soci: Segre, Beccari, Cambi, Graffi, Tonolo, Cotronei, Bonino, Armellini, Bompiani, Amerio e Clementi.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi.

CHIORBOLI P. e MIRONE P. — Spettro Raman e ultrarosso dell' $\alpha$ -acetiltiofene (pres. dal Socio G. B. BONINO).

CIMINO M. — Sulla distribuzione di equilibrio della materia gassosa negli ammassi globulari (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

ERCOLI R. e BARBIERI-HERMITTE F. — Ricerche sull'equilibrio tra il dicobalto ottacarbonile e il tricarbonile di cobalto (pres. dal Corrisp. G. NATTA).

GIANNUZZI M. A. — Sul satellite oscuro nel sistema di  $\zeta$  Aquari (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE  
PRESSO L'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

## ELENCO DEI CONCORRENTI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI  
ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE GENERALE

(Scadenza 31 dicembre 1954 — Premio lire 1.000.000).

1. Dott. GUSTAVO BARBENSI. — 1. «Elementi di Matematica generale ad uso dei biologi e dei chimici». — 2. «Elementi di Metodologia biometrica». — 3. «La Statistica in Clinica». — 4. «Introduzione alla biometria» (tutto in 5 copie).

2. ORSOLA CAMPERO. — «Trattazioni di problemi naturalisti» (ms.).

3. Ing. NARCISO DESIRELLO. — «Etere o elettroni? — La neve cosmica».

4. Prof. dott. FABIO FERRARI. — 1. «In tema di supercementi». — 2. «Über gipshal-tige Puzzolanamente». — 3. «Brownmillert-Zement». — 4. «Cementi pozzolanici». — 5. «Supercemento d'uso generale». — 6. «Universal-Portlandzemente». — 7. «Dei cementi Ferrari». — 8. «Cemento Ferrari». — 9. «Ciments ferreux et ferreux pouzzolaniques vis-à-vis des eaux agressives». — 10. «Il cemento Ferrari e l'attuale orientamento delle industrie dei leganti idraulici». — 11. «Il cemento Ferrari di ridotta basicità e l'autarchia». — 12. «Über Ferrari-Zement». — 13. «Le ciment Ferrari». — 14. «Zur Kenntnis des Ferrari» (4 copie). — 15. «Sulle ragioni dell'alta resistenza chimica dei cementi Ferrari». — 16. «Sulla determinazione rapida della silice del cemento idraulico o dei silicati decomponibili dagli acidi». — 17. «Sul tufo del Monferrato» (4 copie). — 18. «Per il progresso delle industrie del cemento» (1 copia). — 19. «Nel divenire del cemento idraulico». — 20. «Sulla costituzione dei legati idraulici in rapporto al ritiro e al calore d'idratazione» (3 copie). — 21. «Dei legati idraulici per la Ricostruzione» (3 copie). — 22. «Agglomerati per la Rico-



struzione » (1 copia). — 23. « Note au sujet des essais préalable cuisson dans l'industrie du ciment » (1 copia). — 24. « Leganti pozzolanici ». — 25. « Agglomerati pozzolanici e cementizi » (4 copie). — 26. « Per l'impiego razionale dei cementi idraulici ». — 27. « Sul problema della casa in Italia ». — 28. « Sui cementi misuratamente espansivi ». — 29. « Analisi rapida dei leganti idraulici unitari ». — 30. « Cementi ipocalcici ». — 31. « Leganti idraulici di razionale impiego per la costruzione di opere idrovie e marittime ». — 32. « Attitudine alla cottura, finezza di macinazione ed omogeneità dei crudi da cemento calcico ». — 33. « Sulla resistenza chimica dei cementi ferrici (tipo Ferrari) e dei relativi pozzolanici ». — 34. « Sul processo di fabbricazione dei cementi ferrici (tipo Ferrari) ». — 35. « Miscele a base di pozzolana e di calce ». — 36. « Chiarimenti in tema di cementi ferrici e pozzolanici ». — 37. « Sull'urgenza di generalizzare la razionalità di fabbricazione dei cementi ». — 38. « Ciments à basicité réduite ». — 39. « Per la razionale scorificazione del clinker di cemento idraulico ». — 40. « Sull'impiego dei cementi nelle opere destinate all'aperto ». — 41. « Silicato bicalcico e cemento pozzolanico ». — 42. « Refrattari e clincherizzazione » (tutto in 5 copie). — 43. « Le ciment le plus rationnel » (1 copia datts.).

5. ROLANDO MOROZZO DELLA ROCCA: « Memorie intorno alla ipotesi di unità del moto I, II, III » (5 copie).

6. Prof. GIROLAMO ORESTANO. — 13 opuscoli di ricerche sull'idrazide dell'acido paraminosalicilico in parte in collaborazione con altri studiosi (5 copie).

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI  
ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE DI CATEGORIA  
(MATEMATICA E MECCANICA)

(Scadenza 31 dicembre 1954 - Premio lire 1.000.000).

1. MARIO DE PAOLI. — « Descrizioni di alcune sue invenzioni ».

2. ROLANDO MOROZZO DELLA ROCCA. — « Memorie intorno alla ipotesi di unità del moto (II). - Le traiettorie elementari ».

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 16 gennaio 1954*

BENIOFF Hugo. — *Earthquakes*. Estr. da « Engineering and Science Monthly », 1953, november.

BENIOFF H., GUTENBERG B. and RICHTER C. F. — *Progress Report, Seismological Laboratory, California Institute of Technology, 1952*. Estr. da « Transactions of the American Geophysical Union », vol. XXXIV, 1953, n. 5.

BORASIO Luigi. — *Tre mesi nei paesi risicoli dell'Oriente*. Attività della Missione Scientifica Tecnica, ottobre 1951-gennaio 1952. Roma, 1952. Pp. 109, in-8°.

CARTAN Elie. — *Oeuvres complètes*. Parte I: *Groupes de Lie*. Paris, Gauthier-Villars, 1952. Voll. 2, in-8°.

COLONNETTI Gustavo. — *Scienza delle costruzioni*. Vol. I: *Teoria generale dell'equilibrio*. Torino, Einaudi, 1953. Pp. 460, in-8°, con figg.

GUTENBERG Beno. — *Travel times of longitudinal waves from surface foci*. Estr. da « Proceedings of the National Academy of Sciences », vol. XXXIX, 1953, n. 8. — *Wave velocities at depths between 50 and 600 kilometers*. Estr. da « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XLIII, 1953, n. 3.

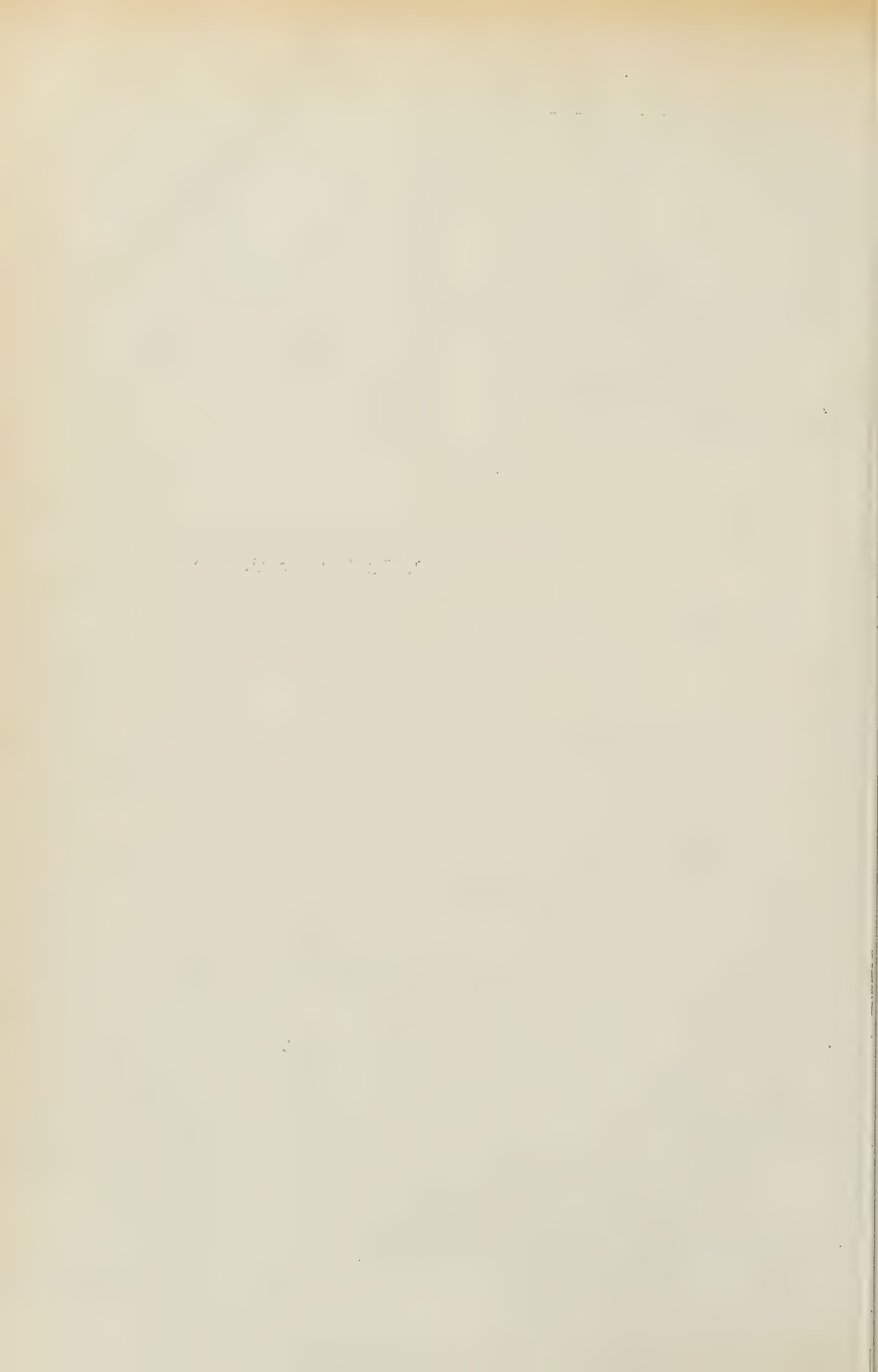
GUTENBERG Beno. — Vedi: BENIOFF H., GUTENBERG B. and RICHTER C. F.

HADFIELD J. W. — *Linen Flax fibre production in New Zealand*. Wellington, The Linen Flax Corporation and the Depart-

- ments of Agriculture, 1953. Pp. 137, in-8°, con figg.
- LUGEON Maurice. — Vedi: *Oraison funèbre en l'honneur de Maurice Lugeon...* *Oraison funèbre en l'honneur de Maurice Lugeon 1870-1953 à la Cathédrale de Lausanne (26 octobre 1953)*. Lausanne, Impr. La Concorde, 1953. Pp. 23, in-8°.
- PERSICO Enrico. — *Introduzione alla fisica matematica*. Redatta dal prof. Tino Zeuli. 3<sup>a</sup> ed. riveduta. Bologna, Zanichelli, 1952. Pp. XVI-433, in-8°, con figg.
- Rendiconti della Società Mineralogica Italiana*. Pavia. A. IX, 1953.
- RICHTER C. F. — Vedi: BENIOFF H., GUTENBERG B. and RICHTER C. F.
- TROPEANO Luigi. — *L'emofilia sporadica. Problemi attuali di ereditologia e fisiopatologia*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1953. Pp. 130, in-8° (Collana di Problemi Medico Sociali, XXIII).
- VOLTA Alessandro. — *Epistolario*. Edizione Nazionale sotto gli auspici dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e della Società Italiana di Fisica. Vol. IV: 1800-1805. Bologna, Nicola Zanichelli, 1953. Pp. XXIII-578, in-4°, con tavv.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

---



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 13 febbraio 1954*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Geometria differenziale.** — *Superficie delle quali una semplice infinità di geodetiche sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa.* Nota (\*) del Socio CORRADINO MINEO.

Di queste superficie ho già dato le due forme differenziali fondamentali che le definiscono intrinsecamente<sup>(1)</sup>. Qui ne faccio un breve studio, dopo averle determinate per quadrature, a meno d'una traslazione.

Il problema infatti si può ridurre alla determinazione d'una superficie  $S$ , quando son date la sua terza e seconda forma fondamentale.

Se  $S$  è una superficie della quale una famiglia  $\infty^1$  di geodetiche ( $g$ ) sono eliche (quindi geodetiche) su cilindri le cui direzioni sono ortogonali a una retta fissa  $r$ , evidentemente questi cilindri sono circoscritti alla  $S$  lungo la relativa linea  $g$ ; e in ogni punto  $P$  d'una linea  $g$ , il piano formato dalla normale a  $S$  e dalla parallela per  $P$  alla direzione fissa  $r$ , ha giacitura costante, essendo normale alle generatrici del relativo cilindro a cui la  $g$  pure appartiene.

Estendendo a una superficie qualunque (non sviluppabile) la nozione di meridiano, il piano anzidetto si può chiamare *meridiano geografico* della  $S$  in  $P$ , *rispetto alla direzione fissa  $r$* . Si può così definire, rispetto alla direzione fissa (orientata), un sistema, su  $S$ , di coordinate curvilinee *geografiche*, chiamando *latitudine* ( $\varphi$ ) di  $P$  il complemento dell'angolo che la normale (convenientemente orientata) alla superficie  $S$  in  $P$  forma con la direzione fissa  $r$  (in un assegnato verso), *longitudine* ( $\omega$ ) di  $P$  l'angolo diedro che il meridiano geografico in  $P$  forma con un qualunque piano parallelo alla direzione  $r$ .

(\*) Presentata nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) Vedi C. MINEO, « Reale Accademia d'Italia, Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali », vol. III, pp. 175-182 (1942).



Sulla  $S$  avremo allora un doppio *sistema geografico* di linee  $\varphi = \text{costante}$  e  $\omega = \text{costante}$ , e potremo dire che *sulla  $S$  ogni geodetica della famiglia ( $g$ ) è una linea di eguale longitudine* (rispetto alla direzione  $r$ ). Reciprocamente, *se una linea di eguale longitudine su  $S$ , rispetto alla direzione  $r$ , è anche geodetica su  $S$ , tale linea è un'elica sopra un cilindro le cui generatrici sono ortogonali alla retta  $r$* . Infatti, la sviluppabile circoscritta alla  $S$  lungo una linea di eguale longitudine è manifestamente un cilindro le cui generatrici sono normali ai piani meridiani (tutti paralleli tra loro) dei punti della linea stessa; ma se questa linea in eguale longitudine è geodetica sulla  $S$ , è anche geodetica (quindi un'elica) sul cilindro.

Il nostro problema equivale dunque a quest'altro: *Determinare le superficie  $S$  sulle quali la famiglia delle linee di eguale longitudine (rispetto a una direzione  $r$ ) sia una famiglia di geodetiche.*

A queste superficie appartengono naturalmente tutte le superficie di rotazione.

1. Supponiamo dunque che la nostra superficie  $S$  sia riferita a un sistema geografico  $(\varphi, \omega)$  di coordinate curvilinee. I coseni direttori della normale alla  $S$ , in un suo punto, sono dunque:

$$(1) \quad X = \cos \varphi \cos \omega, \quad Y = \cos \varphi \sin \omega, \quad Z = \sin \varphi;$$

epperò la 3<sup>a</sup> forma fondamentale della superficie è

$$(2) \quad d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\omega^2.$$

La  $S$  è intrinsecamente determinata dalla (2) e dalla 2<sup>a</sup> forma fondamentale

$$(3) \quad D d\varphi^2 + 2 D' d\varphi d\omega + D'' d\omega^2,$$

i cui coefficienti debbono verificare il sistema

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial D}{\partial \omega} - \frac{\partial D'}{\partial \varphi} + D' \tan \varphi = 0, \\ \frac{\partial D''}{\partial \varphi} - \frac{\partial D'}{\partial \omega} + D \sin \varphi \cos \varphi + D'' \tan \varphi = 0, \\ -D' \frac{\partial D}{\partial \varphi} + 2 D \frac{\partial D'}{\partial \varphi} - D \frac{\partial D}{\partial \omega} = 0. \end{cases}$$

Le prime due equazioni (4) non sono altro che le condizioni di Mainardi-Codazzi, necessarie e sufficienti per l'esistenza della superficie, la terza rappresenta la condizione necessaria e sufficiente affinché sulla superficie le linee  $\omega = \text{costante}$  siano geodetiche <sup>(2)</sup>.

(2) Le formole (4) rientrano come caso particolare in quelle date dal BIANCHI quando la 3<sup>a</sup> forma differenziale supposta definita positiva e di curvatura unitaria, è data sotto la forma generale (vedi *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. I, parte I, Bologna, Zanichelli, 1927, p. 232 e sgg.):

$$e du^2 + 2f du dv + g dv^2.$$

Il caso particolare delle coordinate geografiche, introdotte dal MINDING (1852), è però assai notevole e presenta vantaggi nella trattazione di molti problemi (ne è un esempio il problema risolto in questa Nota). La teoria della superficie, dal punto di vista differen-

Dal sistema (4), e precisamente dalla prima e terza, si ottiene la combinazione integrabile

$$D' \frac{\partial D}{\partial \varphi} - D \frac{\partial D'}{\partial \varphi} - DD' \tan \varphi = 0.$$

Questa, infatti, si può scrivere

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{D}{D'} \right) = \frac{D}{D'} \tan \varphi,$$

dalla quale si trae, essendo  $f(\omega)$  una funzione arbitraria di sola  $\omega$ :

$$(5) \quad D' = D f(\omega) \cos \varphi.$$

Tenendo conto della (5), la 1<sup>a</sup> delle (4) diviene

$$f(\omega) \cos \varphi \frac{\partial D}{\partial \varphi} - \frac{\partial D}{\partial \omega} = 2 D f(\omega) \sin \varphi.$$

Ponendo

$$(6) \quad v = \log D,$$

la precedente equazione si trasforma in

$$(7) \quad f(\omega) \cos \varphi \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \omega} = 2 f(\omega) \sin \varphi.$$

Relativamente alla (7), il sistema ausiliario di equazioni ordinarie del 1° ordine, è

$$\frac{d\varphi}{f(\omega) \cos \varphi} = -d\omega = \frac{dv}{2f(\omega) \sin \varphi};$$

il quale ammette i due integrali primi

$$\log \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} + \int_{\omega_0}^{\omega} f(\omega) d\omega = \text{cost.}^{\text{te}}, \quad v + \log \cos^2 \varphi = \text{cost.}^{\text{te}}$$

Poniamo

$$(8) \quad u = \log \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} + \int_{\omega_0}^{\omega} f(\omega) d\omega.$$

L'integrale generale di (7) è dunque

$$v + \log \cos^2 \varphi = \theta(u),$$

essendo  $\theta$  una funzione arbitraria di  $u$ .

Segue quindi

$$(9) \quad D = \frac{e^{\theta(u)}}{\cos^2 \varphi}.$$

ziale, si stabilisce, inoltre assai elementarmente (senza l'uso dei simboli di CHRISTOFFEL). Vedi: CORRADINO MINEO, *Sistemi geografici sulle superficie*. « Periodico di Matematica », 1910, fasc. I; *Sulle superficie riferite a un sistema geografico*. « Giornale di Battaglini », vol. XLVIII, 1911; *Sulle rappresentazioni geografiche d'una superficie su di un'altra*. « Circolo Matematico di Catania », vol. II, fasc. 3°, 1924. Vedi anche: MASSIMO MINEO, *Coordinate geografiche sulle superficie con applicazioni alla geodesia*. « Le Matematiche », Catania, Casa del Libro, 1951.

La 2<sup>a</sup> delle (4) diventa allora:

$$\frac{\partial D''}{\partial \varphi} + D'' \tan \varphi = [f^2(\omega) \theta'(\omega) + f'(\omega) - \sin \varphi] \frac{e^{\theta(\omega)}}{\cos \varphi};$$

e quindi

$$(10) \quad D'' = g(\omega) \cos \varphi + \left[ \int_{\varphi_0}^{\varphi} (\theta'(\omega) f^2 + f'(\omega) - \sin \varphi) \frac{e^{\theta(\omega)}}{\cos^2 \varphi} d\varphi \right] \cos \varphi,$$

dove  $g(\omega)$  è un'altra funzione arbitraria di  $\omega$ .

La (9), (5) e (10), tenendo presente la (8), danno i coefficienti della 2<sup>a</sup> forma differenziale quadratica di  $S$ . Bisogna però escludere, dato il procedimento seguito, i casi  $D = 0$ ,  $D' = 0$ , che vanno trattati a parte.

2. Nel caso  $D = 0$ , la 3<sup>a</sup> delle (4) è identicamente soddisfatta e il sistema (4) dà subito

$$(11) \quad D' = \frac{f_1(\omega)}{\cos \varphi}, \quad D'' = f_1'(\omega) \sin \varphi + g_1(\omega) \cos \varphi,$$

essendo  $f_1(\omega)$  e  $g_1(\omega)$  due funzioni arbitrarie della sola  $\omega$ . E la soluzione (11) non rientra in quella del n. 1 (per la quale  $D$  non è nulla).

3. Nel caso  $D' = 0$ , la 1<sup>a</sup> delle (4) dà  $\partial D / \partial \omega = 0$ , sicché la 3<sup>a</sup> delle (4) è senz'altro soddisfatta. E allora segue subito

$$(12) \quad D = f_2(\varphi), \quad D'' = \left[ g_2(\omega) - \int_{\varphi_0}^{\varphi} f_2(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right] \cos \varphi,$$

essendo  $f_2(\varphi)$  una funzione arbitraria di sola  $\varphi$  e  $g_2(\omega)$  una funzione arbitraria di sola  $\omega$ . La soluzione del n. 1 non contiene la (11), perché darebbe  $D' = 0$  nel solo caso che si scegliesse la  $f(\omega)$  identicamente nulla; e quindi si avrebbe

$$(13) \quad D = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos^3 \varphi}, \quad D'' = \left[ g_2(\omega) + \frac{1}{4} \log \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - \frac{1}{2(1 - \sin \varphi)} \right] \cos \omega;$$

mentre la (12) costituisce una soluzione più generale della (13).

4. Veniamo ora alla determinazione effettiva delle superficie  $S$ . Dalle formole generali della teoria delle superficie riferite a un qualunque sistema geografico  $(\varphi, \omega)$ , abbiamo <sup>(3)</sup>:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = D \sin \varphi \cos \omega + D' \sec \varphi \sin \omega, & \frac{\partial x}{\partial \omega} = D' \sin \varphi \cos \omega + D'' \sec \varphi \sin \omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = D \sin \varphi \sin \omega - D' \sec \varphi \cos \omega, & \frac{\partial y}{\partial \omega} = D' \sin \varphi \sin \omega - D'' \sec \varphi \cos \omega, \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -D \cos \varphi, & \frac{\partial z}{\partial \omega} = -D' \cos \varphi; \end{cases}$$

(3) Cfr. la mia Memoria citata *Sulle superficie riferite a un sistema geografico*, formole (14).

del quale sistema le condizioni di integrabilità sono soddisfatte per le prime due delle (4).

Abbiamo, nel caso  $D \neq 0$ ,  $D' \neq 0$ :

$$(15) \quad \begin{cases} x = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (\sin \varphi \cos \omega + f(\omega) \sin \omega) \frac{e^{\theta(\omega)}}{\cos^2 \varphi} d\varphi + \int_{\omega_0}^{\omega} g(\omega) \sin \omega d\omega, \\ y = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (\sin \varphi \sin \omega - f(\omega) \cos \omega) \frac{e^{\theta(\omega)}}{\cos^2 \varphi} d\varphi - \int_{\omega_0}^{\omega} g(\omega) \cos \omega d\omega, \\ z = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{e^{\theta(\omega)}}{\cos \varphi} d\varphi. \end{cases}$$

Per quel che abbiamo detto nella introduzione a questa Nota, le coordinate di direzione delle generatrici del cilindro al quale appartiene la geodetica  $\omega = \omega_1$  della nostra superficie  $S$ , sono (4).

$$-\sin \omega_1, \quad \cos \omega_1, \quad 0.$$

Detto quindi  $\alpha$  l'angolo costante che la geodetica  $\omega = \omega_1$  forma con le generatrici dell'anzidetto cilindro, si ha subito

$$\cos \alpha = - \frac{f(\omega_1)}{\sqrt{1 + f^2(\omega_1)}}.$$

Quest'angolo non è mai retto, perché  $f(\omega)$  non è nulla nel caso delle (15). Esso non varia da cilindro a cilindro soltanto nel caso che  $f(\omega)$  si riduca a una costante (non nulla).

Nel caso  $D = 0$  (n. 2), si hanno le rigate gobbe:

$$(16) \quad \begin{cases} x = f_1(\omega) \tan \varphi \sin \omega + \int_{\omega_0}^{\omega} g_1(\omega) \sin \omega d\omega, \\ y = -f_1(\omega) \tan \varphi \cos \omega - \int_{\omega_0}^{\omega} g_1(\omega) \cos \omega d\omega, \quad z = - \int_{\omega_0}^{\omega} f_1(\omega) d\omega; \end{cases}$$

e le linee  $\omega = \text{costante}$  sono rette e assintotiche per la  $S$ .

Si ha in questo caso

$$\cos \alpha = -1,$$

cioè ogni geodetica è una generatrice sul relativo cilindro.

(4) Cfr. la su detta Memoria, formole (25).



Nel caso, infine,  $D = 0$ , le  $S$  sono le ben note *superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica*, studiate da Monge.

Le equazioni parametriche di queste superficie si possono mettere sotto la forma <sup>(5)</sup>:

$$(17) \begin{cases} x = (f_2(\varphi) \cos \varphi - f'_2(\varphi) \sin \varphi) \cos \omega + g_2(\omega) \cos \omega - g'_2(\omega) \sin \omega, \\ y = (f_2(\varphi) \cos \varphi - f'_2(\varphi) \sin \varphi) \sin \omega + g_2(\omega) \sin \omega + g'_2(\omega) \cos \omega, \\ z = f_2(\varphi) \sin \varphi + f'_2(\varphi) \cos \varphi. \end{cases}$$

E si ha:

$$\cos \alpha = 0,$$

cioè l'angolo  $\alpha$  sotto il quale ogni geodetica  $\omega = \text{costante}$  della  $S$  incontra il cilindro cui appartiene, è sempre retto (come sulle superficie di rotazione).

**Geodesia.** — *Sull'uso attuale della gravimetria in sussidio della livellazione.* — Parte I. *Correzioni di primo e di secondo ordine alle differenze di livello osservate per ridurle dinamiche.* Nota <sup>(\*)</sup> del Socio GIOVANNI SILVA.

I. È ben noto che la mancanza di parallelismo fra le superficie di livello della gravità terrestre rende la quota di un punto generico, direttamente osservata mediante una livellazione geometrica, leggermente variabile a seconda del cammino percorso, pur partendo da un dato caposaldo fondamentale (*punto zero* della rete di livellazione) di quota precisata una volta per tutte. Ed è pure noto che, per togliere l'ambiguità di tali quote osservate, si ricorre alla gravimetria onde ridurle a quote dinamiche o a quote ortometriche, le quali, avendo un significato fisico preciso, sono entrambe indipendenti da quel cammino.

Il vecchio problema, importante più dal punto di vista teorico che da quello pratico, è andato acquistando sempre più vivo interesse con il progressivo aumento della precisione delle livellazioni e presenta ora nuovi aspetti, dopo l'introduzione e lo sviluppo dei gravimetri, che rendono facile, rapida e precisa la diretta determinazione dei valori della gravità in successivi caposaldi di una linea di livellazione.

Mi occupo in questa Nota I dell'uso di tali valori e di altri elementi affini per calcolare la riduzione delle differenze di quota *osservate* a differenze di quota *dinamiche*. A tale riduzione dò la forma di una correzione principale e di una correzione secondaria, scomponibile, questa, in più altre, che possono essere calcolate, ma che, generalmente, potranno essere trascurate.

(5) Vedi la mia Memoria, più volte citata, § 15.

(\*) Presentata nella seduta del 13 febbraio 1954.

2. Fra i caposaldi A e B, estremi di un tronco di una linea di livellazione, siano state eseguite  $n$  livellazioni semplici consecutive che hanno determinato i dislivelli successivi  $\delta h_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Sarà

$$(1) \quad q = \sum_i^n \delta h_i = h_B - h_A$$

il valore direttamente osservato della differenza di livello fra A e B; esso permette di ricavare la quota  $h_B$  del secondo punto quando la quota  $h_A$  sia stata parimenti ricavata da analoghe differenze, relative ai precedenti tronchi della linea di livellazione che collega il caposaldo A al *punto zero*.

Fissato convenzionalmente un valore  $\gamma_*$  della gravità terrestre, la differenza fra le quote dinamiche  $Q_A^*$ ,  $Q_B^*$  dei due punti è invece definita dalla relazione

$$(2) \quad Q_B^* - Q_A^* = - \frac{W(B) - W(A)}{\gamma_*} = \frac{1}{\gamma_*} \int_A^B g dh,$$

essendo  $W(P)$  il valore della funzione potenziale della gravità terrestre in un generico punto P, ed essendo quindi  $g = -dW/dh$ . Evidentemente, anche per le quote dinamiche, la definizione completa delle quote singole richiede la precisazione del valore della quota dinamica del *punto zero*.

Agli estremi A e B del tronco considerato siano stati osservati i valori della gravità  $g_A$ ,  $g_B$  e si ponga

$$g_m = \frac{1}{2} (g_A + g_B).$$

Siano poi  $g'_i, g''_i$  i valori della gravità nei due estremi della livellazione semplice  $i^{esima}$ , ove furono collocate le mire, cosicché sarà  $g'_1 = g_A$ ,  $g''_n = g_B$ ,  $g''_i = g'_{i+1}$ ; infine si indichi con  $g_i$  la media dei due valori  $g'_i$  e  $g''_i$ . L'incremento  $\delta W_i$  della funzione potenziale della gravità, quando, procedendo da A verso B, si passa dal primo al secondo estremo di ogni livellazione semplice, potrà essere espresso, senza errore apprezzabile, da  $-g_i \delta h_i^{(1)}$  e risulterà pertanto

$$- [W(B) - W(A)] = \sum_i^n g_i \delta h_i = g_m q + \sum_i^n (g_i - g_m) \delta h_i.$$

Otteniamo così per la (2)

$$(3) \quad Q_B^* - Q_A^* = q + \Delta' q + \Delta'' q,$$

con

$$(4) \quad \Delta' q = \frac{g_m - \gamma_*}{\gamma_*} q$$

$$(5) \quad \Delta'' q = \frac{1}{\gamma_*} \sum_i^n (g_i - g_m) \delta h_i.$$

(1) Ved. C. F. BAESCHLIN, *Lehrbuch der Geodäsie*, pp. 790-91, form. (109. 2), (109. 3). Zürich 1948.

3. Secondo la convenzione definita dall'Associazione Geodetica Internazionale a Edimburgo nel 1936<sup>(2)</sup> e confermata ad Oslo nel 1948<sup>(3)</sup> una livellazione geometrica dicesi di alta precisione quando l'errore probabile totale limite per km (coefficiente  $\tau$ ) non supera 2 mm. Poiché il massimo valore di  $\tau$  viene raggiunto soltanto quando la linea di livellazione ha la lunghezza di alcune decine di chilometri e poiché il perfezionamento degli strumenti consente una precisione sempre maggiore, adottato qui i più ristretti risultati trovati dall'ing. Salvioni<sup>(4)</sup> per la livellazione italiana. Secondo essi il valore limite di  $\tau$  è 0.72 mm e quando il tronco di livellazione AB ha lunghezze  $L$  limitate, ad esempio a 5, 10, 15, 20 km, l'errore probabile chilometrico totale  $\tau_L$  ha i valori ancor più piccoli 0.48, 0.54, 0.59, 0.62. Ne seguono quali errori probabili  $\tau_L/\sqrt{L}$  dei corrispondenti dislivelli osservati  $q$  mm 1.1, 1.7, 2.3, 2.8.

Per calcolare l'analoga incertezza della correzione  $\Delta'q$  data dalla (4), osserviamo che l'errore anzidetto del fattore  $q$  che in essa compare non ha alcuna importanza, venendo moltiplicato per un fattore assai piccolo rispetto all'unità, e che un errore di 2 milligal in  $g_m$  reca alla detta correzione un errore dell'ordine di  $2q \times 10^{-6}$ . Ammettendo poi che la strada lungo la quale si fa la livellazione abbia una pendenza costante del 6%, il che richiede che ad ogni livellazione semplice le due stadi di precisione, alte 3 m, siano poste a una distanza alquanto inferiore ai 50 m, si hanno quali valori massimi di  $q$ , nei quattro casi anzidetti, m 300, 600, 900, 1200. Ne segue che, pur adottando il suddetto errore eccessivamente forte di  $g_m$  e pur dando a  $q$  il suo massimo valore possibile, l'errore della correzione  $\Delta'q$  assume gli importi di mm 0.6, 1.2, 1.8, 2.4, sensibilmente più piccoli dei corrispondenti importi che misurano l'incertezza da cui sono affetti i valori osservati  $q$ . La correzione  $\Delta'q$ , calcolata in modo assai semplice mediante la (4), non accresce dunque, praticamente, l'incertezza di  $q$ , anche quando la lunghezza del tronco raggiunge i 20 km.

Quanto alla correzione  $\Delta''q$ , data dalla (5), osserviamo che essa può scriversi sotto la forma:

$$(5') \quad \Delta''q = \frac{q}{\gamma_*} \left( \sum_i^n \frac{g_i \delta h_i}{q} - g_m \right)$$

dalla quale apparisce che essa si ottiene moltiplicando il valore di  $q$  per un rapporto certamente molto piccolo; infatti il denominatore di esso  $\gamma_*$  è un particolare valore della gravità terrestre, mentre il numeratore è la differenza fra il valore medio degli  $n$  valori  $g_i$ , algebricamente pesati con i pesi  $\delta h_i$ , e il valor medio dei due valori estremi  $g_A, g_B$ .

(2) « Bulletin Géodésique » n. 61, pp. 172-73 (janv.-fév.-mars 1939).

(3) « Bull. Géod. », N.S. n. 18, p. 482 (déc. 1950).

(4) GUIDO SALVIONI, *Sul valore preliminare dei coefficienti caratteristici, ecc.* « I. G. M. Bolletino di Geodesia e scienze affini ». Anno XI, n. 2, p. 122 (apr.-mag.-giu. 1952).

Osserviamo inoltre che la detta correzione è identicamente nulla, oltre che nei casi banali  $n = 1$  e  $\delta h_1 = \delta h_2 = \dots \delta h_n = 0$ , anche nel caso in cui la gravità  $g$ , lungo il tronco di livellazione considerato, varia proporzionalmente alla quota  $h$ . In tal caso infatti si può scrivere  $g = \mu + \nu \cdot h$ , con  $\mu$  e  $\nu$  costanti, e, riesprimendo la sommatoria sotto forma di integrale, si ha

$$(6) \quad \Delta''q = \frac{\nu}{\gamma_*} \int_{h_A}^{h_B} \left[ h - \frac{1}{2} (h_A + h_B) \right] dh = 0.$$

Queste ed altre considerazioni fanno prevedere che, entro un certo limite per la lunghezza del tronco, la correzione  $\Delta''q$  risulterà trascurabile di fronte all'errore probabile del valore osservato  $q$ . Riservandoci di comprovare tale previsione e di definire quel limite in una Nota II, vediamo come sia possibile, generalmente, calcolare anche tale correzione di secondo ordine.

4. Per esaminare a fondo la correzione  $\Delta''q$ , osserviamo che per un qualsiasi punto terrestre di quota  $h$  e di latitudine  $\varphi$  vale la relazione

$$(7) \quad g = \gamma(h, \varphi) + \alpha$$

nella quale il primo addendo del secondo membro è la gravità normale  $\gamma(h, \varphi)$ , valutata in aria libera alla quota  $h$  e alla latitudine  $\varphi$ , mentre il secondo addendo è l'anomalia gravimetrica  $\alpha$ , secondo Faye, propria del punto terrestre suddetto. Nel limitato campo dei valori  $h, \varphi$  relativi ai punti del tronco di livellazione considerato, varrà con sufficiente approssimazione lo sviluppo

$$(8) \quad \gamma(h, \varphi) = \gamma(h_m, \varphi_m) + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)_m (h - h_m) + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \right)_m (\varphi - \varphi_m)$$

nel quale  $h_m$  e  $\varphi_m$  sono le medie delle coppie di valori  $h_A, h_B$  e  $\varphi_A, \varphi_B$ , relativi ai punti A, B, e nel quale le derivate sono calcolate per  $h = h_m, \varphi = \varphi_m$ .

Ricavando tali derivate dall'espressione approssimata della gravità normale <sup>(5)</sup>

$$(9) \quad \gamma(h, \varphi) = \Gamma \left( 1 - \frac{2h}{R} - \frac{1}{2} \beta \cos 2\varphi \right),$$

dove  $\Gamma = \gamma(0, 45^\circ)$ , le (7) e (8) danno

$$(10) \quad g = \gamma(h_m, \varphi_m) - \frac{2\Gamma}{R} (h - h_m) + \beta \Gamma \sin 2\varphi_m (\varphi - \varphi_m) + \alpha.$$

Applichiamo questa formola (10) alle coppie di valori  $g_A, g_B$  e  $g'_i, g''_i$  e deduciamone le espressioni delle corrispondenti medie  $g_m, g_i$ . Dette  $h_i, \varphi_i, \alpha_i$  le medie delle coppie  $h'_i, h''_i; \varphi'_i, \varphi''_i; \alpha'_i, \alpha''_i$  relative alle quote, alle lati-

(5) Ved. ad esempio BAESCHLIN loc. cit., form. (73. 17) p. 458.



tudini e alle anomalie dei due punti nei quali vennero collocate le mire per la  $i^{\text{esima}}$  livellazione semplice, detta similmente  $\alpha_m$  la media delle due anomalie  $\alpha'_i = \alpha_A$ ,  $\alpha''_i = \alpha_B$ , risulta

$$g_m = \gamma(h_m, \varphi_m) + \alpha_m$$

$$g_i = \gamma(h_m, \varphi_m) - \frac{2\Gamma}{R}(h_i - h_m) + \beta\Gamma \sin 2\varphi_m(\varphi_i - \varphi_m) + \alpha_i$$

$$g_i - g_m = -\frac{2\Gamma}{R}(h_i - h_m) + \beta\Gamma \sin 2\varphi_m(\varphi_i - \varphi_m) + \alpha_i - \alpha_m.$$

Il valore  $\Gamma$  della gravità normale al livello del mare e a  $45^\circ$  di latitudine è anche il valore di riferimento  $\gamma_*$  che più spesso viene usato per le quote dinamiche; comunque il rapporto  $\Gamma:\gamma_*$  è sufficientemente vicino all'unità da non alterare sensibilmente i coefficienti  $2:R$  e  $\beta \sin 2\varphi_m$  quando vengono moltiplicati per esso. Sostituendo dunque nella (5) la soprascritta espressione di  $g_i - g_m$  con tale avvertenza, si può scrivere

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta''q = \Delta''q_1 + \Delta''q_2 + \Delta''q_3 & ; \quad \Delta''q_1 = -\frac{2}{R} \sum_i^n (h_i - h_m) \delta h_i \\ \Delta''q_2 = \beta \sin 2\varphi_m \sum_i^n (\varphi_i - \varphi_m) \delta h_i & ; \quad \Delta''q_3 = \frac{1}{\gamma_*} \sum_i^n (\alpha_i - \alpha_m) \delta h_i. \end{array} \right.$$

Se, analogamente a quanto si è già fatto al n. 3, si dà alle sommatorie delle tre parti in cui è stata suddivisa la  $\Delta''q$  forma analoga alla (5'), si riconosce immediatamente che esse rappresentano la differenza fra le medie algebricamente pesate, secondo i pesi  $\delta h_i$ , della quota, della latitudine e dell'anomalia gravimetrica lungo tutto il tronco di livellazione, e le medie delle coppie di valori che le stesse grandezze hanno agli estremi del tronco.

Possiamo inoltre osservare che la prima di quelle tre parti  $\Delta''q_1$  è dello stesso tipo della  $\Delta''q$  considerata alla fine del n. 3 ed espressa dalla (6), sicché risulta  $\Delta''q_1 = 0$ .

5. Qualora invece di considerare le anomalie  $\alpha$  relative alla riduzione della gravità in aria libera, secondo Faye, si volesse tener conto dell'anomalia  $\beta$  secondo Bouguer, nello sviluppo (10), al posto di  $\alpha$ , si dovrebbe porre l'espressione

$$\frac{3\Gamma\delta}{2R\delta_T}(h - h_m) + \beta - \tau,$$

nella quale  $\delta$  è la densità del terreno sottostante al tronco di livellazione considerato,  $\delta_T$  è la densità media della Terra e  $\tau$  è la correzione topografica al valore  $g$  della (10). Il primo termine tiene conto dell'attrazione della piastra sottostante e si può conglobare con il secondo termine al secondo membro della (10); nelle (11) la  $\Delta''q_1$  viene allora ad avere un diverso coefficiente esterno alla sommatoria, ma il suo importo rimane nullo.

Se poi si indicano con  $\tau_A, \tau_B$  e  $\beta_A, \beta_B$  i valori di  $\tau$  e di  $\beta$  in A e B, con  $\tau_m$  e  $\beta_m$  le loro medie, con  $\tau'_i, \tau''_i, \tau_i$  e  $\beta'_i, \beta''_i, \beta_i$  gli analoghi valori relativi alla livellazione  $i^{\text{esima}}$ , la  $\Delta''q_3$  viene sostituita dalle due parti

$$(12) \quad \Delta''q_4 = \frac{1}{\gamma_*} \sum_i^n (\beta_i - \beta_m) \delta h_i, \quad \Delta''q_5 = -\frac{1}{\gamma_*} \sum_i^n (\tau_i - \tau_m) \delta h_i.$$

6. Si è già detto che la correzione del secondo ordine  $\Delta''q_1$  è nulla; le altre analoghe correzioni che compongono la  $\Delta''q$  sono tutte calcolabili quando si abbiano a propria disposizione le carte opportune che permettano di ricavare, per i varî punti del tronco di livellazione considerato: la latitudine  $\varphi$  per la  $\Delta''q_2$ , l'anomalia  $\alpha$  secondo Faye per la  $\Delta''q_3$ , l'anomalia  $\beta$  secondo Bouguer per la  $\Delta''q_4$ , gli elementi per la laboriosa determinazione della correzione topografica  $\tau$  per la  $\Delta''q_5$ .

Per questi calcoli non è certo necessario eseguire una sommatoria di  $n$  termini; basterà infatti: dividere il tronco in poche parti; calcolare i dislivelli fra gli estremi delle singole parti, sommando i  $\delta h_i$  compresi in ciascuna di esse; determinare per gli estremi di ciascuna parte i valori di  $\varphi$ , o di  $\alpha$ , o di  $\beta$ , o di  $\tau$ , facendo uso della carta corrispondente e, nel caso di  $\tau$ , ricorrendo al consueto metodo della divisione del terreno circostante in settori; fare le medie per ogni coppia dei predetti valori trovati per i due estremi; sottrarre da tali medie le medie analoghe relative ai due estremi A, B; moltiplicare le differenze così ottenute per i corrispondenti dislivelli ed eseguire la somma dei prodotti.

Le carte gravimetriche, dalle quali si devono trarre le anomalie  $\alpha$  o  $\beta$  per il calcolo delle correzioni  $\Delta''q_3$  o  $\Delta''q_4$ , non hanno bisogno di essere molto particolareggiate e precise, come sarebbe necessario nel caso in cui si volessero determinare, con le dette anomalie, i valori  $g$  della gravità, risparmiando il lavoro gravimetrico sperimentale. Nelle correzioni  $\Delta''q_3$  e  $\Delta''q_4$  le anomalie  $\alpha$  e  $\beta$  vengono divise per  $\gamma_*$  e questa divisione attenua straordinariamente gli errori delle anomalie stesse.

Si noti infine che, astrazion fatta dagli errori di osservazione, e ritenuti validi lo sviluppo (10) e il suo analogo che considera la riduzione secondo Bouguer, le due somme

$$q + \Delta'q + \Delta''q_2 + \Delta''q_3, \quad q + \Delta'q + \Delta''q_2 + \Delta''q_4 + \Delta''q_5,$$

dalle quali è stata omessa la correzione  $\Delta''q_1$  perché nulla comunque venga calcolata, devono dare lo stesso valore della quota dinamica.

Deve quindi essere

$$(13) \quad \Delta''q_3 = \Delta''q_4 + \Delta''q_5.$$

Nei predetti calcoli il procedimento secondo Faye, molto più rapido, deve dunque condurre allo stesso risultato del procedimento secondo Bouguer.

**Fisica matematica.** — *Sulle oscillazioni forzate nei sistemi non lineari a due gradi di libertà.* Nota (\*) del Corrisp. DARIO GRAFFI.

1. Consideriamo un circuito elettrico di autoinduzione  $L_1$  e comprendente un condensatore di capacità  $1/K_1$ , accoppiato, tramite la mutua induzione  $M$ , ad un secondo circuito di autoinduzione  $L_2$  e comprendente un condensatore di capacità  $1/K_2$ ; ovviamente  $L_1, L_2, K_1, K_2$  saranno positive e  $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$ . La resistenza di ciascun circuito non verrà però supposta costante, ma funzione della corrente  $\dot{x}_1$  o  $\dot{x}_2$  che lo attraversa; ovviamente  $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$  sono le derivate, rispetto al tempo  $t$ , delle cariche  $x_1$  e  $x_2$  portate dall'armatura del condensatore, nel primo o nel secondo circuito, verso cui si dirige la corrente quando è positiva. La resistenza del primo e del secondo circuito verrà scritta nella forma, per noi comoda,  $\frac{g_1(\dot{x}_1)}{\dot{x}_1}, \frac{g_2(\dot{x}_2)}{\dot{x}_2}$  (1); per la variabilità della resistenza i due circuiti sono da considerarsi non lineari.

Infine se ammettiamo che, sui due circuiti, agiscano rispettivamente le forze elettromotrici sinusoidali di pulsazione  $\omega$ ,  $e_1 \cos(\omega t + \gamma_1)$ ,  $e_2 \cos(\omega t + \gamma_2)$  ( $e_1, e_2, \gamma_1, \gamma_2$  sono costanti, le prime due positive) avremo che  $x_1$  e  $x_2$  soddisfano le equazioni:

$$(I) \quad \begin{cases} L_1 \ddot{x}_1 + M \ddot{x}_2 + g_1(\dot{x}_1) + K_1 x_1 = e_1 \cos(\omega t + \gamma_1) \\ M \ddot{x}_1 + L_2 \ddot{x}_2 + g_2(\dot{x}_2) + K_2 x_2 = e_2 \cos(\omega t + \gamma_2). \end{cases}$$

Derivando le (I) ed indicando con  $y_1$  e  $y_2$  le intensità di correnti che attraversano i due circuiti, cioè ponendo:

$$(2) \quad y_1 = \dot{x}_1, \quad y_2 = \dot{x}_2$$

otteniamo il sistema (2):

$$(3) \quad \begin{cases} L \ddot{y}_1 + M \ddot{y}_2 + \dot{g}_1(y_1) + K_1 y_1 = -\omega e_1 \sin(\omega t + \gamma_1) \\ M \ddot{y}_1 + L_2 \ddot{y}_2 + \dot{g}_2(y_2) + K_2 y_2 = -\omega e_2 \sin(\omega t + \gamma_2). \end{cases}$$

In una Nota precedente (3), abbiamo dimostrato, sotto opportune condizioni, che il sistema (3) ammette soluzioni periodiche di periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

(\*) Presentata nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) Non descriveremo i dispositivi (tubi elettronici, archi, ecc.) per realizzare queste resistenze. Notiamo poi che  $g_1(\dot{x}_1)$  e  $g_2(\dot{x}_2)$  non debbono essere necessariamente funzioni positive e crescenti per ogni valore di  $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$ .

(2) Ovviamente  $\dot{g}_1(y_1), \dot{g}_2(y_2)$  sono le derivate rispetto al tempo  $t$  di  $g_1(y_1), g_2(y_2)$ .

(3) D. GRAFFI, *Forced oscillations for several non linear circuits*. «Annals of Mathematics», LIV, pp. 262-271 (1951). Cfr. anche G. AYMERICH, *Sulle oscillazioni forzate di due circuiti elettrici non lineari con accoppiamento induttivo e capacitivo*. «Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena», V, pp. 83-89 (1950-51); *Oscillazioni forzate periodiche di sistemi non lineari a due gradi di libertà*, idem, pp. 165-177; S. MIZOHATA, *On the existence of systems of periodic solutions for several nonlinear circuits*. «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto», Ser. A., 27, pp. 115-121 (1952).

Queste soluzioni hanno valore medio nullo, come si comprende subito integrando le (3) su un periodo, sicché le corrispondenti  $x_1$  e  $x_2$  soluzioni del sistema (1) saranno pure funzioni periodiche di periodo  $T$  <sup>(4)</sup>.

Indicato, d'ora innanzi, con  $y_1$  e  $y_2$  una soluzione periodica (di periodo  $T$ ) di (3) e supposto  $\omega$  maggiore della più grande radice dell'equazione in  $z$  (che ha radici tutte reali):

$$(4) \quad (L_1 z^2 - K_1)(L_2 z^2 - K_2) - M^2 z^4 = 0$$

determineremo, in questa Nota, alcuni limiti superiori, che non sembrano privi di interesse, per il valore efficace di  $y_1$  e  $y_2$  (cioè per la radice quadrata del valore medio in un periodo di  $y_1^2$  e  $y_2^2$ ) e delle sue derivate  $\dot{y}_1$  e  $\dot{y}_2$ , inoltre limiti superiori per i valori assoluti di  $y_1$  e  $y_2$ . È bene indicare, fin d'ora, un significato fisico delle limitazioni citate e delle ipotesi che ne assicurano la validità. Detti, per brevità, circuiti lineari corrispondenti a quelli finora considerati, due circuiti, rappresentati dal sistema (1), ma con resistenza (cioè con  $g_1(\dot{x}_1)$ ,  $g_2(\dot{x}_2)$ ) identicamente nulla, osserviamo che le radici positive della (4) rappresentano le pulsazioni delle oscillazioni libere (cioè con  $e_1 = e_2 = 0$ ) nei circuiti lineari ora indicati; i nostri risultati valgono dunque per  $\omega$  superiore alla più grande di quelle pulsazioni. Le limitazioni che troveremo per i valori efficaci di  $y_1$  (e analoghe considerazioni si ripetono per  $y_2$ ) coincidono con la somma dei valori efficaci delle correnti nel primo circuito lineare dovute, rispettivamente, alle forze elettromotrici  $e_1 \cos(\omega t + \gamma_1)$ ,  $e_2 \cos(\omega t + \gamma_2)$ .

Dalle limitazioni che otterremo per  $y_1$  e  $y_2$  potremo anche dedurre alcuni criteri per la stabilità o la instabilità delle soluzioni periodiche di (1) e di conseguenza di (3); criteri però validi in condizioni piuttosto restrittive.

È da notare infine che le considerazioni che seguiranno sono la estensione di nostre ricerche su una sola equazione <sup>(5)</sup>. Perciò alcuni passaggi si troveranno meglio chiariti nella Memoria ora citata.

2. Poiché  $y_1$  e  $y_2$  sono funzioni periodiche di periodo  $T$ , avremo con integrazioni per parti:

$$(5) \quad \int_0^T \ddot{y}_r y_r dt = - \int_0^T \dot{y}_r^2 dt \quad \int_0^T \dot{g}_r(y_r) y_r dt = 0 \quad (r = 1, 2)$$

$$(6) \quad \int_0^T \ddot{y}_r y_s dt = \int_0^T y_r \ddot{y}_s dt = - \int_0^T \dot{y}_r \dot{y}_s dt \quad (r = 1, s = 2).$$

(4) Per costruire queste  $x_1$  e  $x_2$  si integri le (3) da 0 a  $t$  e si indichi con  $k_1$  e  $k_2$  le costanti di integrazione rispettivamente della prima e seconda equazione, costanti che potremo supporre nel primo membro delle equazioni in discorso. Basta allora porre

$$x_1 = \int_0^t y_1 dt + k_1, \quad x_2 = \int_0^t y_2 dt + k_2 \quad \text{per ottenere le } x_1 \text{ e } x_2 \text{ che soddisfano le (1).}$$

(5) D. GRAFFI, *Sulle oscillazioni forzate nella Meccanica non-lineare*. « Rivista di Matematica della Università di Parma », III, pp. 317-326 (1952).



Moltiplichiamo ora la prima equazione di (3) per  $y_1$ , la seconda per  $y_2$  e tenendo conto di (5) e (6), dopo semplici passaggi, otteniamo:

$$(7) \quad L_1 \int_0^T \dot{y}_1^2 dt - K_1 \int_0^T y_1^2 dt = \omega e_1 \int_0^T y_1 \sin(\omega t + \gamma_1) dt - M \int_0^T \dot{y}_1 \dot{y}_2 dt$$

$$(8) \quad L_2 \int_0^T \dot{y}_2^2 dt - K_2 \int_0^T y_2^2 dt = \omega e_2 \int_0^T y_2 \sin(\omega t + \gamma_2) dt - M \int_0^T \dot{y}_1 \dot{y}_2 dt.$$

Ora, ricordando che il valor medio su un periodo di  $y_r$  e  $y_2$  è nullo, si ha <sup>(6)</sup>:

$$(9) \quad \omega^2 \int_0^T y_r^2 dt \leq \int_0^T \dot{y}_r^2 dt = I_r^2 \quad (r = 1, 2)$$

intendendo, ovviamente, per  $I_r^2$ , l'integrale su un periodo del quadrato di  $\dot{y}_r$ . Sostituendo nelle (6) e (7), applicando nell'integrale al secondo membro la formula di Schwarz, e ricordando che l'integrale su un periodo del quadrato di un seno vale  $T/2$ , dopo alcune riduzioni si ha ( $I_r$  è la radice positiva di  $I_r^2$ ):

$$(10) \quad (L_1 \omega^2 - K_1) I_1 \leq |M| \omega^2 I_2 + e_1 \omega^2 \sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$(11) \quad (L_2 \omega^2 - K_2) I_2 \leq |M| \omega^2 I_1 + e_2 \omega^2 \sqrt{\frac{T}{2}}.$$

Ora, essendo  $\omega^2$  maggiore della più grande radice della (4), considerata come equazione in  $z^2$ , si avrà che i coefficienti di  $I_1$  e  $I_2$  nelle (10) e (11) sono positivi <sup>(7)</sup>, quindi potremo ricavare dalla seconda  $I_2$  e sostituirlo nella prima. Dopo alcune riduzioni si ha:

$$(12) \quad \left( (L_1 \omega^2 - K_1)(L_2 \omega^2 - K_2) - M^2 \omega^4 \right) I_1 \leq \omega^2 \sqrt{\frac{T}{2}} (e_1 (L_2 \omega^2 - K_2) + e_2 |M| \omega^2).$$

Ora, essendo  $\omega^2$  esterna all'intervallo delle radici dell'equazione in  $z^2$  (4) e  $M^2 < L_1 L_2$  il coefficiente del primo membro di (12) è positivo. Potremo perciò dividere questa inequazione per tale coefficiente, che indicheremo, per brevità, con  $\Delta$ , ed avremo:

$$(13) \quad I_1 \leq \sqrt{\frac{T}{2}} \omega^2 \frac{e_1 (L_2 \omega^2 - K_2) + e_2 |M| \omega^2}{\Delta}.$$

(6) Questa relazione è in sostanza il classico lemma di Almansi che può ottenersi facilmente sviluppando  $y_r$  e  $\dot{y}_r$  in serie di Fourier e tenendo presente la formula di Parseval.

(7) È noto infatti (cfr. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, Bologna, Zanichelli, 1940, cap. V, par. 1, p. 232) che le soluzioni della (4) sono esterne all'intervallo delle radici  $\frac{K_1}{L_1}$ ,  $\frac{K_2}{L_2}$  dell'equazione ottenuta ponendo nella (4)  $M = 0$ . Ciò perché le pulsazioni proprie del sistema non accoppiato ( $M = 0$ ) sono comprese fra le pulsazioni proprie del sistema accoppiato. Per le nostre ipotesi sarà perciò  $\omega^2 > \frac{K_1}{L_1}$ ,  $\omega^2 > \frac{K_2}{L_2}$  conforme a quanto si è supposto nel testo.

Otteniamo così il valore maggiorante cercato per  $I_1$  ossia dividendo per  $\sqrt{\frac{T}{2}}$  il valore maggiorante per il valore efficace di  $\dot{y}_1$ . Analogamente, scambiando gli indici, si avrà una limitazione per il valore efficace di  $\dot{y}_2$ .

Ricordando ora la (9) e la definizione di valore efficace  $y_{1\text{ eff}}$  di  $y_1$  avremo:

$$(14) \quad y_{1\text{ eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y_1^2 dt} \leq \frac{I_1}{\omega \sqrt{T}} \leq \frac{\omega}{\sqrt{2}} \left( \frac{e_1 (L_2 \omega^2 - K_2) + e_2 |M| \omega^2}{\Delta} \right).$$

Poiché i due termini entro parentesi moltiplicati per  $\omega/\sqrt{2}$  valgono rispettivamente <sup>(8)</sup> il valore efficace della corrente nel primo circuito rispettivamente per effetto della forza elettromotrice  $e_1 \cos(\omega t + \gamma_1)$ ,  $e_2 \cos(\omega t + \gamma_2)$  si ha subito per  $y_{1\text{ eff}}$  la limitazione già accennata in principio e analoga si ottiene, scambiando gli indici, per  $y_{2\text{ eff}}$ .

3. Indicato, per brevità con  $N_1 \sqrt{2}$  l'ultimo membro di (14) si ha per la (13),  $I_1$  inferiore a  $\omega \sqrt{\frac{T}{2}} N_1$ . Allora, ragionando come nel numero 3 della Memoria citata in nota (1), si ha:

$$|y_1| \leq \pi N_1$$

e analoga limitazione vale per  $|y_2|$  che sarà inferiore a  $\pi N_2$ .

Siamo ora in grado di assegnare un criterio di stabilità per le soluzioni periodiche del sistema (1) e di conseguenza del sistema (3). Supponiamo cioè che per  $|y_1| \leq \pi N_1$ ,  $|y_2| \leq \pi N_2$  siano  $\frac{dg_1}{dy_1}$ ,  $\frac{dg_2}{dy_2}$  positive, quindi scrivendo l'equazione alle variazioni corrispondenti alle equazioni del sistema (1) ( $x_1 + \delta x_1$ ,  $x_2 + \delta x_2$  sono soluzioni prossime alle soluzioni periodiche  $x_1$  e  $x_2$ ) abbiamo:

$$(15) \quad \begin{cases} L_1 \delta \ddot{x}_1 + M \delta \ddot{x}_2 + \frac{dg_1}{dy_1} \delta \dot{x}_1 + K_1 \delta x_1 = 0 \\ M \delta \ddot{x}_2 + L_2 \delta \ddot{x}_2 + \frac{dg_2}{dy_2} \delta \dot{x}_2 + K_2 \delta x_2 = 0. \end{cases}$$

Poiché i coefficienti di  $\delta \dot{x}_1$  e  $\delta \dot{x}_2$  sono positivi, le soluzioni del sistema (15) rappresentano le oscillazioni di un sistema meccanico, intorno ad una posizione di equilibrio stabile, in presenza di forze dissipative. Per un noto teorema di Lord Kelvin queste oscillazioni sono stabili (anzi tendono allo zero) perciò nelle nostre ipotesi le soluzioni periodiche di (1) sono stabili. Poiché i coefficienti di  $\delta \dot{x}_1$ ,  $\delta \dot{x}_2$  sono periodici possiamo affermare che gli esponenti caratteristici del sistema (15) hanno parte reale negativa.

(8) Cfr. KRALL, loc. cit. in nota (7), cap. V, par. 4, p. 248. È bene osservare che per ottenere le formule da noi applicate bisogna supporre in quelle di Krall le  $c$  nulle,  $b_{11} = L_1$ ,  $b_{22} = L_2$ ,  $b_{12} = M$ ,  $a_{11} = K_1$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} = K_2$ ,  $v = \omega$  e ricordare che il valore efficace delle derivate di una funzione sinoidale si ottiene dividendo per  $\frac{\sqrt{2}}{\omega}$  il suo valore massimo.

Se invece per  $|y_1| \leq \pi N_1$ ,  $|y_2| \leq \pi N_2$  le derivate di  $g_1(y_1)$ ,  $g_2(y_2)$ , relative a  $y_1$  e  $y_2$  sono negative le soluzioni del sistema (15) e quindi le  $x_1$  e  $x_2$  sono instabili (9).

Con le stesse considerazioni della nostra nota citata in (5) si potrebbero stabilire varie limitazioni per le ampiezze dei diversi armonici dello sviluppo in serie di Fourier di  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ . Non insisteremo su tale questione, come non insisteremo sull'estensione dei risultati di questa Nota ai temi di  $n$  circuiti con accoppiamento induttivo e capacitivo.

**Chimica.** — *Ricerche spettrofotometriche nell'infrarosso sulle relazioni tra sostanza organica e inorganica nel tessuto osseo* (\*). Nota di VINCENZO CAGLIOTI, ANTONIO ASCENZI e MARISA SCROCCO, presentata (\*\*) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

I rapporti chimici tra matrice organica (osseina) e frazione inorganica dell'osso sono tuttora oggetto di studio.

Secondo Caglioti (1935), queste formerebbero un reticolo semicombinato. Le conclusioni di Dallemagne e Mélon (1946) secondo le quali non sarebbero svelabili legami chimici, vengono confutate da Ascenzi (1948-1949-1950).

Recentemente, osservazioni istochimiche (Rubin e Howard, 1950), ricerche sui sostituenti del calcio nei rapporti del substrato osteinico (Sobel, 1952), rilievi autoradiografici mediante  $S^{35}$  (Dziewiatkowski, 1952) porterebbero concordemente a far ritenere che la fissazione del calcio sia correlata con la presenza di gruppi solforici dell'osseina, o meglio della sostanza fondamentale (cfr. le ricerche al microscopico elettronico di Ascenzi e Benedetti, 1953). La natura del composto contenente tali gruppi non è stata tuttavia, ancora definita, per quanto si ammette si tratti di un mucopolisaccaride (Sobel, 1952).

Corrispondentemente Neuman, Boyd e Feldman (1952) hanno dimostrato che nella calcificazione della cartilagine, l'acido condroitinsolforico si combina con il calcio mediante un processo di tipo scambio ionico.

Infine Polonovski e Cartier (1951) sostengono che il primo stadio della calcificazione sia caratterizzato dalla fosforilazione dell'osteide a livello di gruppi  $NH_2$  e dalla fissazione di calcio su radicali  $PO_4^{\equiv}$  legati alla proteina.

(9) Basta infatti porre nelle (15)  $t = -\tau$  per ricondursi al caso già considerato in cui, gli esponenti caratteristici sono con parte reale negativa. Le soluzioni di (15) risultano perciò, rispetto a  $t$ , stabili nel passato, ma instabili nel futuro, cioè instabili come si è affermato nel testo.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e inorganica e Centro di Chimica generale del C.N.R. e nell'Istituto di Anatomia patologica dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

Sulla base di queste premesse abbiamo istituito una ricerca sui rapporti tra matrice organica e frazione inorganica dell'osso facendo ricorso alla spettrofotometria infrarossa ed usando uno spettrofotometro Beckman IR<sub>2</sub>. Le osservazioni sono state portate su diafisi femorale di bue, e precisamente su sezioni sottili (non superiori a 10 micron) di osso intero, sulle stesse sezioni decalcificate mediante soluzione di HNO<sub>3</sub> al 2 %, su polvere di osso privato dell'osseina mediante il metodo di Gabriel (1894).

RISULTATI. — Lo studio comparativo degli spettri di assorbimento allo infrarosso dell'osso intero (o totale), della sola frazione organica (osseina) e, rispettivamente, della sola frazione inorganica, ha permesso di stabilire differenze di particolare rilievo che si concretano essenzialmente nei risultati seguenti (vedi fig. 1):

a) Nello spettro dell'osseina è presente un massimo di assorbimento intorno a  $2155\text{ cm}^{-1}$  che non si appalesa né nello spettro dell'osso intero, né in quello della sola frazione inorganica. Inoltre l'assorbimento a  $1213\text{ cm}^{-1}$  presente nello spettro dell'osseina diminuisce d'intensità in quello dell'osso intero.

b) Lo spettro della frazione inorganica dimostra un massimo appena accennato intorno a  $850\text{ cm}^{-1}$  il quale aumenta in maniera notevolissima nell'osso intero.

Sulla scorta indiziaria della letteratura già citata, come pure sulla base di indagini collaterali su sostanze più semplici, condotte seguendo la traccia dello studio di Schreiber (1949), crediamo di poter identificare il massimo di assorbimento intorno a  $2155\text{ cm}^{-1}$  dell'osseina, come la prima armonica dell'oscillazione fondamentale e simmetrica a  $1213\text{ cm}^{-1}$  del gruppo  $\text{—SO}_2\text{—}$  presente nell'osseina <sup>(1)</sup>.

Tale interpretazione è in accordo con lo studio di Mecke (1932) sulle frequenze di vibrazione del legame solfo-ossigeno nell'SO<sub>2</sub>.

Riteniamo pertanto verosimile che nell'osso totale uno o entrambi i legami S — O dei gruppi solforici dell'osseina siano polarizzati; ne deriverebbe una maggiore elettronegatività dell'ossigeno, sì da rendere quest'ultimo capace di interagire verosimilmente con il calcio.

Abbiamo potuto ulteriormente rilevare che la frazione inorganica dell'osso presenta essenzialmente lo spettro degli ortofosfati (cfr. anche Hunt, Wisherd e Bonham, 1950; Herzberg, 1951, Corbridge e Lowe, 1954). Quivi un massimo, appena accennato a  $850\text{ cm}^{-1}$ , aumenta in maniera notevole nello spettro dell'osso intero. Esso è con ogni verosimiglianza, dovuto alla comparsa di una asimmetria dello ione  $\text{PO}_4^-$  nell'osso totale, ove i legami P—O non sarebbero più energeticamente equivalenti tra loro; il gruppo fosforico sarebbe polarizzato e ciò lo renderebbe capace di formare altri

(1) In tale regione ( $1250\text{--}950\text{ cm}^{-1}$ ) si osservavo anche degli assorbimenti propri di alcuni gruppi relativi ai polisaccaridi; di essi abbiamo tenuto conto mediante opportuni confronti.



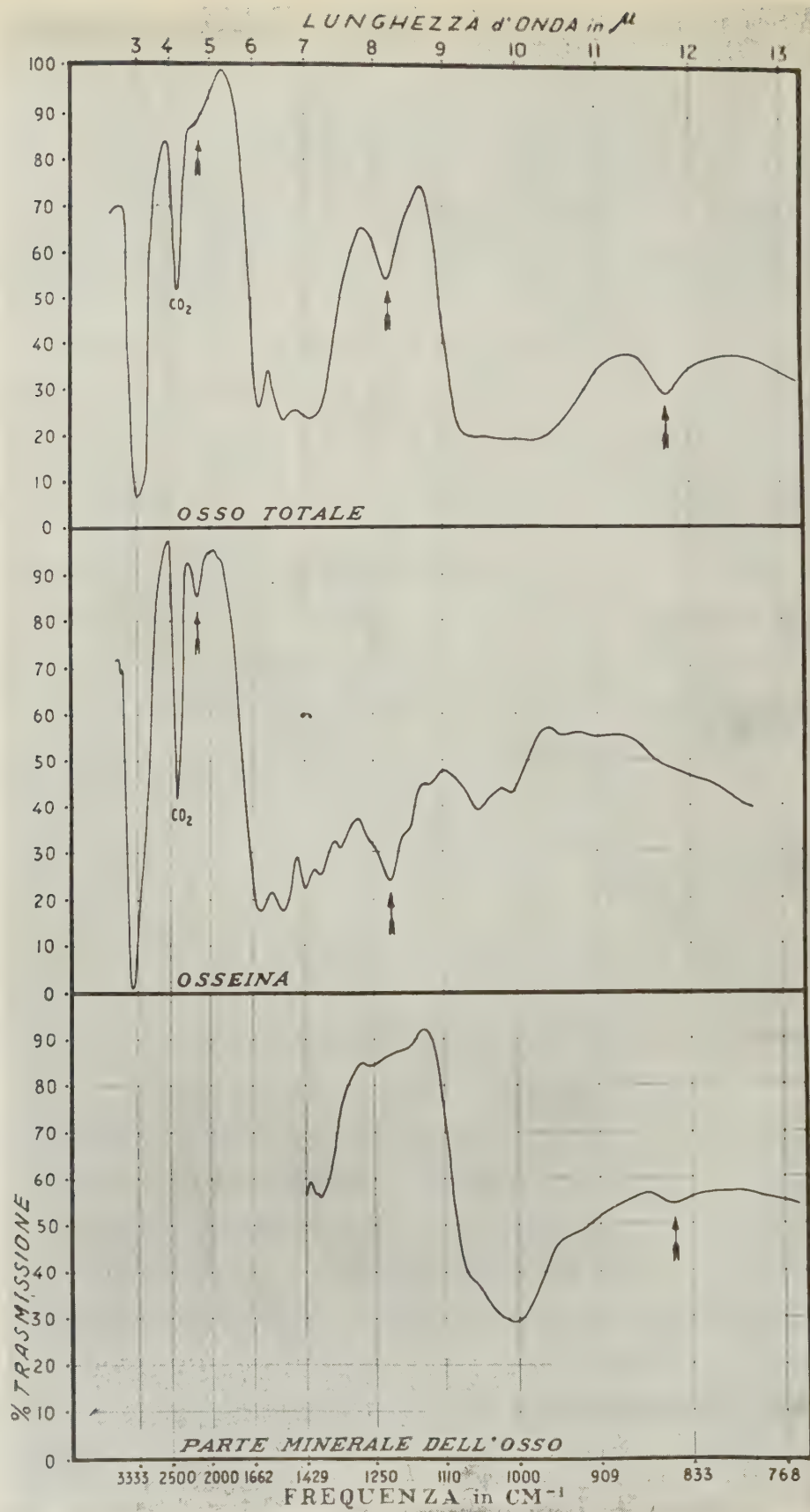


Fig. 1.

legami, tipo legame idrogeno, con gruppi OH o NH della sostanza fondamentale.

Un indizio della presenza di tale legame ci viene fornito peraltro dallo spostamento che si osserva nella frequenza caratteristica del gruppo OH (o NH come vorrebbero dimostrare le ricerche di Polonovski e Cartier), che nella parte organica ha un valore di  $3546\text{ cm}^{-1}$  e nell'osso totale di  $3289\text{ cm}^{-1}$ .

CONCLUSIONI. — Sulla base dei dati sperimentali da noi ottenuti, e da una revisione critica della letteratura, *crediamo di poter concludere che al legame tra sostanze organica e inorganica nel tessuto osseo sono interessati: il gruppo solforico presente nella matrice organica (osseina), il gruppo fosforico della frazione inorganica e il legame idrogeno.*

#### BIBLIOGRAFIA.

- ASCENZI A., « Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei », Nota I: ser. VIII, vol. IV, p. 777 (1948);  
 Nota II: ser. VIII, vol. V, p. 100 (1948); Nota III: ser. VIII, vol. V, p. 171 (1948).  
 ASCENZI A., « Nature », 163, 604 (1949).  
 ASCENZI A., « Science », 112, 84 (1950).  
 ASCENZI A e BENEDETTI E. L., « Arch. Science Biol. » (in stampa).  
 CAGLIOTI V., « Atti del V Congresso di Chimica pura ed applicata », 325 (1935).  
 CORBRIDGE D. E. C. e LOWE E. J., « J. Chem. Soc. », 493, 1954.  
 DALLEMAGNE M. J. e MÉLON J., « J. of the Washington Acad. of Sciences », 36, 181 (1946).  
 DZIEWIATKOWSKI D. D., « Trans. Macy Conference on Metabolic Interrelations », 4, 74 (1952).  
 GABRIEL S., « Hoppe-Seyl. Z. », 18, 257 (1894).  
 HERZBERG G., *Infrared and Raman Spectra*, Van Nostrand Co. Inc., New York, 1951 (5<sup>a</sup> ed.).  
 HUNT J. M., WISHERD M. P. e BONHAM L. C., « Anal. Chem. », 22, 1478, 1950.  
 MECKE R., « Z. physik. Chem. B », 16, 409 (1932).  
 NEUMAN W. F., BOYD E. S. e FELDMAN I., « Trans. Macy Conference on Metabolic Interrelations », 4, 100 (1952).  
 POLONOVSKI M. e CARTIER P., « C. R. Acad. Sci. », Paris, 232, 119 (1951).  
 RUBIN P. S. e HOWARD J. E., « Trans. Macy Conference on Metabolic Interrelations », 2, 155 (1950).  
 SCHREIBER K. C., « Anal. Chem. », 21, 1168 (1949).  
 SOBEL A. E., « Trans. Macy Conference on Metabolic Interrelations », 4, 113 (1952).

**Patologia.** — *Ignota potenza, ritenuta causa della proliferazione preblastomatosa, identificata con il potere germinale. Fenomeni che lo dimostrano e sua prevalenza nell'origine dei tumori.* Nota (\*) del Socio ACHILLE RUSSO.

I. PRELIMINARE. — *Potenza sconosciuta e potere germinale.* — Com'è detto in precedenti pubblicazioni <sup>(1)</sup>, è diffuso fra i patologi che causa essenziale dell'origine dei tumori siano gli *agenti fisici e chimici* con i quali siamo in diretto rapporto, e gli *agenti interni*, che hanno sede nel nostro organismo. Alcuni di essi, facilmente individuati, furono illustrati ed altri, sempre nuovi, ne furono scoperti, facendosi opera utile alla conoscenza di uno dei fattori necessari allo sviluppo dei neoplasmi.

Rimaneva però di conoscere in quale rapporto fossero gli *agenti* con la proliferazione cellulare preblastomatosa, mancando il collegamento tra essi e la formazione neoplastica. A tale riguardo furono fatte diverse ipotesi, delle quali la più accettata è che esista una *potenza* sconosciuta, che regola lo sviluppo del blastoma.

Contro tale ipotesi, anche oggi prevalente, nei lavori avanti citati si è dimostrato che causa della proliferazione cellulare sia un *potere germinale*, che è uno dei caratteri fondamentali degli organismi animali e vegetali. Siffatto *potere* è chiaramente documentato da quei casi, che saranno appresso riferiti, nei quali sia la *cellula-ovo* sia quella dei *tessuti somatici*, che ha carattere femminile <sup>(2)</sup>, producono nuovi individui senza unirsi all'elemento maschile.

Dalle nuove conoscenze deriva che nessun enigmatico collegamento esista tra gli *agenti esterni* ed *interni* e la proliferazione preblastomatosa, poiché il *potere germinale*, finora sconosciuto, rappresenta l'enigmatica *potenza*, invano ricercata dai cancerologi. Tale potere, del quale si afferma l'esistenza per gli effetti prodotti, come nei fenomeni appresso ricordati, ha avuto una chiara dimostrazione nel *ciclo vitale* di un *Protozoo*, nel corso del quale si differenziano individui somatici, che producono gameti, i quali, accoppiandosi, danno origine a nuovo ciclo ed a nuove forme adulte <sup>(3)</sup>.

(\*) Presentata nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) A. RUSSO, *Il potere germinativo dei tessuti somatici ridestato da agenti cancerigeni*. « Rend. Accad. Naz. Lincei », Roma 1953; *Etiologia dei tumori ed i due fattori che vi collaborano. Identità di origine tra tumori e partenogenesi sperimentale*. « Atti Accad. Gioenia », Catania, vol. IX, ser. 6<sup>a</sup>, 1952-53; *Per l'origine dei tumori, un enigma da chiarire, un potere germinale da difendere*. (Nota riassuntiva). « Boll. Accad. Gioenia », sez. IV, vol. II, fasc. 7, Catania 1954.

(2) A. RUSSO, *Carattere femminile dei tessuti somatici e loro indipendenza in relazione all'origine dei tumori*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », 1952.

(3) A. RUSSO, *Sul ciclo di sviluppo di « Cryptochilum echini » Mps.* (Nota preliminare riassuntiva). « Atti Accad. Gioenia », Catania 1914; *Ciclo evolutivo di « Cryptochilum echini », Maupas (Ciliato parassita di « Paracentrotus lividus » Mrsn.)*. « Memorie R. Accad. Naz. Lincei », Roma 1930; *Stadi del ciclo evolutivo di un Ciliato, loro individualità e rapporto con analoghe manifestazioni nei Metazoi*. « Rend. Accad. dei XL. » Roma 1948.

2. SVILUPPO DI NUOVI INDIVIDUI PER SOLO POTERE GERMINALE. — Per illustrare l'influenza del *potere germinale* nel prodursi di nuovi individui, senza fusione dell'ovo con lo spermio, furono descritti fenomeni diversi, di alcuni dei quali si fa soltanto cenno.

In quello, detto di *Ginogenesi*, illustrato da Oscar e Paula Hertwig negli *Echinodermi* e negli *Anfibi* («Arch. f. Mikrosk. Anatomie», 1912-1913), gli autori ottennero embrioni dalle ova mature senza unirsi agli spermii, resi inattivi con la irradiazione.

Analogamente, per il solo *potere germinale* delle ova, nel fenomeno, che fu detto *Fecondazione crociata eterogenea*, Goldeswki («Roux's Arch. Entw.», 1906) e Baltzer («Arch. f. Zellenforsch.», 1910) osservarono che gli spermii di una delle due specie incrociate penetravano nell'ovo dell'altra specie, ma che venivano accantonati e non utilizzati per la fecondazione, potendosi produrre un nuovo individuo solo con il proprio *potere*.

Anche nei fenomeni di *Induzione* il *potere germinale* delle cellule dei tessuti vi prenderebbe parte. Difatti, com'è noto, un lembo del labbro superiore della gastrula di *rana*, trapiantato in altro embrione di *rana*, produce un secondo embrione con *tubo neurale*, *corda dorsale* e *somiti* (Spemann, Mangold ed altri 1930-1939), confermando l'influenza dell'innesto nel ridestare il *potere germinale* nelle cellule dei tessuti del portainnesto.

Tale risultato sarebbe confermato dal fatto che un nuovo embrione si è anche ottenuto, adoperando poltiglie del labbro superiore bollito (Bautzmann) o prodotti chimici, specialmente *lipidi* del gruppo degli *steroli* (Fischer).

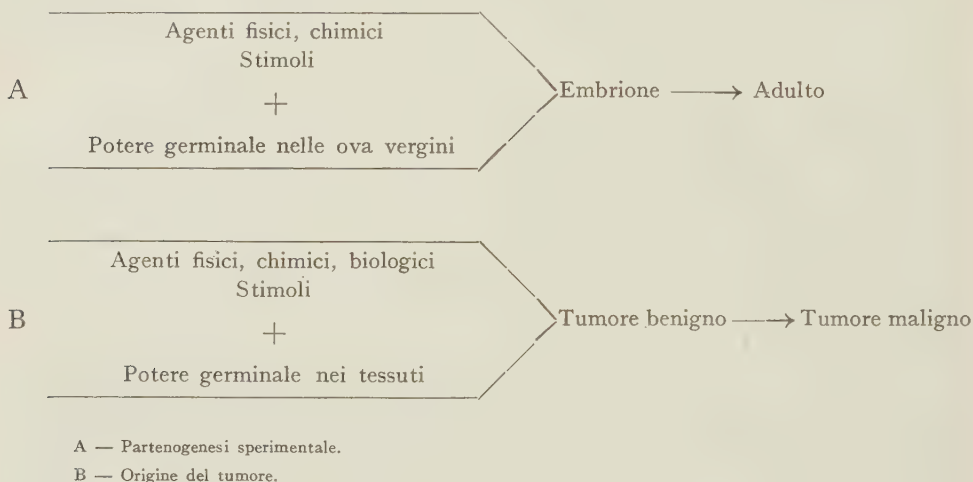
I fenomeni di *partenogenesi primitiva* e di quella *sperimentale* confermano più chiaramente l'esistenza di un *potere germinale* nelle ova vergini e nelle cellule dei tessuti somatici. Nella *partenogenesi primitiva* la durata più o meno lunga della proliferazione delle ova per lo sviluppo di un nuovo individuo, fu riferita all'esaurirsi più o meno precoce del loro *potere germinale*. Recenti studi di Br. Monterosso su gli *Araneoidi* hanno dimostrato che il *potere germinale* nelle ova sia autonomo in quanto, in alcune specie, quelle deposte, dopo avere percorso le prime tappe dello sviluppo, si arrestano in una fase del processo embriogenetico, che è per tutte la stessa. Tale tipo di *partenogenesi*, che è costante ed obbligatoria, dimostra che alcune specie di tali animali, nella compagine dell'ovo vergine, abbiano il *potere* di produrre un nuovo individuo e che tale *potere* possa anche esaurirsi.

La *partenogenesi sperimentale* ha dato maggiore evidenza al *potere germinale* latente, che è ridestato da *agenti fisici e chimici*, alcuni dei quali sono identici a quelli cancerogeni. Fra di essi, oltre a quelli dipendenti dall'elettricità, furono sperimentati la temperatura e le azioni meccaniche, come gli urti e gli scuotimenti, e le più diverse sostanze chimiche, isolate o associate, in alcuni casi identiche a quelle adoperate per produrre i *tumori sperimentali*, come gli *idrocarburi* ad alcuni *acidi grassi*.

Potendosi ridestare sperimentalmente il *potere germinale* nelle ova vergini e, per *induzione*, nelle cellule dei tessuti, per cui, senza fecondazione, si ottengono nuovi individui, anche lo sviluppo di un tumore rientra in tali



fenomeni. Pertanto, con gli *schemi* sotto tracciati è messa a confronto la origine di un nuovo individuo nella *partenogenesi sperimentale*, che, più degli altri fenomeni sopra ricordati, si presta al paragone, con la prima origine di una individualità organica particolare, il *tumore*.



I due schemi rappresentano la fase iniziale dei due fenomeni, cui ha dato l'avvio il *potere germinale*. Mentre, nella fase iniziale dello sviluppo delle due individualità, i fenomeni sono identici, ciascuno di essi darà origine a forme particolarmente diverse, i cui processi formativi sono poco noti ed in gran parte regolati da ipotesi, come la trasformazione della cellula normale in cellula maligna con la sua irreversibilità.

3. POTERE GERMINALE NEL CICLO VITALE DI ALCUNI GRUPPI ANIMALI E NEI VEGETALI. — Poiché il *potere germinale* si è dimostrato necessario e prevalente nei fenomeni riproduttivi avanti cennati, si è ricercato se esista in momenti determinati del ciclo vitale di *Metazoi*, per dare ad esso maggior valore. Nei *Poriferi* e nelle *Idromeduse*, fra i *Metazoi* meno evoluti, è dimostrato che il *mesenchima* della larva vescicolare, corrispondente a cellule somatiche (4), assume *potere sessuale* e per gemmazione produce nuovi individui, che possono rimanere attaccati alla forma originaria o rendersi liberi, assumendo forma medusoide. Analogo *potere germinale*, non ostante modalità diverse, si manifesta nel ciclo vitale dei *Cestodi*, nei quali da una zona di cel-

(4) Non ostante Maas (1894) e Minchin (1900) dicano avere distinto nelle larve dei *Poriferi* il *germe* ed il *soma* e che dal primo abbiano sempre origine i nuovi individui, oggi è confermato che nella larva si costituisce solo un tessuto, corrispondente al *soma*, che, per il *potere germinale*, forma individui sessuati.

La distinzione, che era stata fatta da Weismann per le *Idromeduse*, ha perduto sempre più di valore dopo le mie prime osservazioni su l'origine delle cellule sessuali dal *mesenchima* nel primo sviluppo di un *Echinoderma viviparo*, *Amphiura squamata* Sars (« Atti R. Accad. di Scienze fisiche, matematiche e naturali », Napoli, 1892).

lule somatiche del *cisticerco*, per agamia, si forma una catena lineare d'individui sessuati che rinnovano il ciclo.

Anche evidente è il *potere germinale* in un gruppo di *Tunicati*, nel quale i singoli individui adulti emettono dalla base, aderente al suolo sottomarino, delle ramificazioni, dette *stoloni proliferi*, costituiti da cellule somatiche. Anche da esse, per il *potere germinale* di cui sono fornite, si sviluppano individui sessuati adulti.

Tale processo riproduttivo richiama il *ciclo vitale* e la riproduzione stagionale delle piante, che giornalmente si presentano alla nostra osservazione. In esse, difatti, in epoche diverse dell'anno ed in alcune, per più anni successivi nello stesso soggetto, dalle cellule somatiche si producono con i *fiori* gli elementi sessuali necessari a ricostituire la nuova pianta.

Non ostante la struttura ed i processi di nutrizione siano diversi negli animali e nei vegetali, l'origine d'individui sessuati dalle cellule somatiche nelle piante, provocata dal *potere germinale*, documenta sempre di più tale potere sia una delle proprietà fondamentali della sostanza vivente.

Si ripete anche qui che tale riconoscimento, tanto diffuso, è stato in gran parte conseguente agli studi, iniziati nel 1914 <sup>(5)</sup>, sul ciclo di sviluppo di un *Protozoo*, durante il quale anche gl'individui somatici producono *gameti*, che, accoppiandosi tra loro, danno origine ad un nuovo ciclo con nuove forme adulte, come in particolare si è detto in pubblicazioni precedenti.

4. CANCRO E METASTASI CORRISPONDENTI ALLA FASE FINALE DI ALTRI CICLI. — Il *cancro*, essendo una individualità particolare, che vive nei tessuti dentro i quali ebbe origine, compie un ciclo simile a quello degli organismi sopra cennati. Come in essi, in una fase finale del ciclo, dalle cellule somatiche, per il loro *potere germinale* latente, si originano le cellule sessuali della nuova forma adulta, anche nel *cancro*, giunto a maturità, alcune cellule cancerose assumono un potere germinativo, dando origine a nuovi tumori, a più o meno distanza dal tumore originario (*metastasi*).

5. NUOVO INDIRIZZO PER LA CURA. — Non essendosi finora riconosciuto dai cancerologi che il *potere germinale*, latente nei tessuti, sia la causa prevalente dell'origine dei tumori, niente fu fatto per combatterlo. I mezzi terapeutici, essendo stati diretti a combattere gli *agenti esterni ed interni*, ritenuti causa del male, finora però non hanno dato risultati soddisfacenti, tanto che si è ricorso alla *diagnosi precoce* per prevenirne lo sviluppo.

Persuaso che causa fondamentale prevalente dell'inizio del processo tumorale sia il *potere germinale*, fin dal 1950 <sup>(6)</sup>, con molte riserve, proposi la *sterilizzazione del soma*, ma, fin di allora facevo intendere che la stessa proposta, con mezzi più adatti, potesse applicarsi alla cura dei cancri in via

(5) Cfr. Note bibliografiche citate a p. 184.

(6) A. RUSSO, *Ulteriori notizie sul potere germinativo del soma nei Metazoi e su le sue manifestazioni in relazione al ciclo biologico di un Ciliato*. «Atti Accad. Gioenia», Catania 1950.

di sviluppo, potendosi inibire la moltiplicazione delle cellule cancerose ed arrestare lo sviluppo di altri tumori nello stesso individuo per *metastasi*.

Se altri, con nuovo mezzo curativo, otterrà l'effetto desiderato, sarò compensato della mia fatica, diretta *soltanto* a conoscere la causa recondita, il *primum movens*, di un male, che presenta altri numerosi problemi, che compete risolvere ai cancerologi.

6. RIASSUNTO. — Confermato che il *potere germinale* latente nei tessuti è ridestato dagli *agenti esterni* o *interni*, che funzionano da stimoli, si dimostra che il primo è fattore dominante nello sviluppo dei tumori. La dominanza è avvalorata, oltre alla diffusione in natura di tale potere, da fenomeni particolari, nei quali le ova producono nuovi individui senza unirsi allo spermio, come nella *Ginogenesi*, nella *Fecondazione eterogenea*, nella *Partenogenesi* primitiva e sperimentale, ed in altri casi, come nei processi d'*induzione* e nella produzione d'individui sessuati direttamente dalle cellule somatiche, come nel corso del ciclo vitale in alcuni gruppi di animali e di vegetali.

La prevalenza del *potere germinale* su gli altri fattori, che collaborano alla produzione del tumore, consiglia indirizzare la cura ad inibire la proliferazione della cellula cancerosa.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse.* Nota II (\*) di MICHELE SCE, presentata (\*\*) dal Socio B. SEGRE.

4. La (8), posto  $PP_{-1} = \| a_{ik} \|$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ), si scrive  $\sum_{i,k} a_{ik} u_i u_k = 0$ ; onde, poiché le unità  $u_1$  ed  $u_2$  delle algebre complesse del 2° ordine, — cioè dei numeri complessi e duali <sup>(1)</sup> — si combinano secondo gli schemi  $u_1 u_i = u_i$ ,  $u_2^2 = -u_1$  e  $u_1 u_i = u_i$ ,  $u_2^2 = 0$  ( $i = 1, 2$ ), segue che, per soddisfare alla (8), deve essere  $a_{11} = a_{22}$ ,  $a_{12} = 0$  oppure  $a_{11} = a_{12} = 0$ . Nel 2° caso  $PP_{-1}$  è degenere e quindi *l'algebra dei numeri duali non è solenoidale e l'algebra dei numeri complessi è l'unica algebra complessa solenoidale del 2° ordine*.

Cerchiamo ora di soddisfare alla (8) per 2 delle 5 algebre complesse del 3° ordine <sup>(2)</sup>, i numeri tripotenziali e triduali, le cui unità si combinano secondo

(\*) Continuazione della Nota I pubblicata a p. 30 di questi « Rendiconti ».

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) Cfr. G. SCORZA 1° lavoro cit. in I <sup>(3)</sup>. È sottinteso che consideriamo sempre algebre dotate di unità, distinte rispetto alla relazione di isomorfismo.

(2) Cfr. G. SCORZA 2° lavoro cit. in I <sup>(3)</sup>; in tale classificazione le 5 algebre hanno le tabelle di moltiplicazione III (numeri tricomplessi), X (numeri tripotenziali), XI (numeri triduali), XXIV (somma diretta dei numeri duali e del campo complesso) e XXVII (ternioni). I ternioni sono l'unica algebra non commutativa. Nel testo, anziché le tabelle, usiamo degli schemi in cui non compaiono i prodotti  $u_i u_k$  nulli.

gli schemi  $u_i u_i = u_i$ ,  $u_2^2 = u_3$  e  $u_i u_i = u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ); nel 1° caso risulta  $a_{11} = a_{12} = 0$  e  $2 a_{13} + a_{22} = 0$ , nel 2°  $a_{1i} = 0$  e quindi  $PP_{-1}$  degenerare. Un'analisi affatto analoga per le altre 3 algebre assicura poi che *soltanto l'algebra dei numeri triduali non è solenoidale*.

Le (6') nel caso dei ternioni, in cui le unità si combinano secondo lo schema  $u_1^2 = u_1$ ,  $u_2^2 = u_2$ ,  $u_1 u_3 = u_3 u_2 = u_3$ , si traducono nelle

$$(9) \quad a_{11} u_1 + a_{13} u_3 = 0 \quad , \quad a_{22} u_2 + a_{32} u_3 = 0 \quad , \quad a_{12} u_3 = 0$$

che assicurano la degenerescenza di  $PP_{-1}$ ; onde *l'algebra dei ternioni non è bisolenoidale* <sup>(3)</sup> e, tra le algebre complesse del 3° ordine, *sono bisolenoidali soltanto le algebre commutative solenoidali*.

Considerando le 16 tabelle di moltiplicazione cui dan luogo le algebre complesse del 4° ordine <sup>(4)</sup> in relazione alla (8), si perviene a dimostrare che *soltanto le algebre con le tabelle di moltiplicazione XLI e LV non sono solenoidali*. A questo proposito ci limitiamo ad osservare che, essendo gli schemi delle 2 algebre, rispettivamente,  $u_i u_i = u_i$  e  $u_i u_i = u_i$ ,  $u_2 u_3 = -u_3 u_2 = u_4$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), in entrambi i casi per soddisfare alla (8) si deve annullare la prima riga di  $PP_{-1}$  <sup>(5)</sup>.

Cercando di soddisfare alle (6') per le 6 algebre non commutative, si conclude che *sono bisolenoidali soltanto le algebre le cui unità si combinano secondo lo schema*  $u_i u_i = u_i$ ,  $u_2^2 = u_2 u_3 = -u_3 u_2 = u_4$ ,  $u_3^2 = \alpha u_4$  <sup>(6)</sup>.

5. Nello studio delle algebre reali solenoidali, bisogna tener presente che anche la matrice  $P$  della (8) e delle (6') è reale e che quindi  $PP_{-1}$  è simmetrica definita positiva <sup>(7)</sup>.

Questa osservazione ci permette subito di invertire il 1° teorema del n. 3 e cioè di dimostrare che *una somma diretta di algebre reali è bisolenoidale soltanto se sono tali le componenti*.

(3) Poiché l'unità dell'algebra è  $u_1 + u_2$ , la (8) si ottiene sommando la 1ª e la 2ª delle (9) e porta  $a_{11} = a_{22} = a_{13} + a_{32} = 0$ ; quindi con il cambiamento di base  $u'_1 = u_1 + u_2$ ,  $u'_2 = u_1 - u_2$ ,  $u'_3 = u_3$  si ottiene una base tale che  $u' u'_{-1} = 0$ .

(4) Cfr. SCORZA 3° lavoro cit. in I <sup>(3)</sup>; in tale classificazione le 16 tabelle sono I\* (quaternioni), X (numeri quadricompletti), XXXVI (numeri quadripotenziali), XXXVII\* ( $\infty^2$  algebre non isomorfe al variare di un parametro), XXXIX (2 algebre per i valori 0 ed 1 di un parametro), XLI\*, LV (numeri quadriduali), XC, C\*, CIII\*, CIV\*, CV, CVIII\*, CXXV, CXXVIII\*. Le tabelle con asterisco corrispondono ad algebre non commutative.

(5) L'osservazione si estende ai numeri  $n$ -duali il cui schema è  $u_i u_i = u_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) e si dimostra che *le algebre di numeri  $n$ -duali non sono solenoidali*.

(6) Questo schema si muta nella tabella XXXVII di Scorza con il cambiamento di base  $u'_1 = u_1$ ,  $u'_2 = u_2$ ,  $u'_3 = \frac{1}{2}(u_2 - u_3)$ ,  $u'_4 = u_4$ . Rileviamo poi che, rispetto alla base,  $u'_1 = u_1 - u_4$ ,  $u'_2 = u_2 + u_3$ ,  $u'_3 = i u_1$ ,  $u'_4 = u_2 + i u_3$  la (8) diventa  $u' u'_{-1} = 0$  ed ha come conseguenza immediata tutte le quattro (6').

(7) Cfr. A. A. ALBERT, *Modern higher algebra* (Chicago, 1937), Chap. V, n. 12.



Infatti, se l'algebra reale  $\mathcal{C} = (u) = (u^\circ v^\circ)$ , somma diretta delle algebre  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , è bisolenoidale, esiste una matrice simmetrica definita positiva  $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$  tale che

$$w A w_i w_{-i} = u^\circ A_1 w_i u_{-i}^\circ + v^\circ A_4 w_i v_{-i}^\circ = 0;$$

da qui, secondo che  $w_i$  è un elemento di  $u^\circ$  o di  $v^\circ$ , si ricava

$$u^\circ A_1 u_i^\circ u_{-i}^\circ = 0 \quad , \quad v^\circ A_4 v_i^\circ v_{-i}^\circ = 0$$

con  $A_1$  ed  $A_4$  ancora simmetriche definite positive perché minori principali di  $A$ .

Ne segue che *l'unica algebra del 2° ordine reale solenoidale è quella dei numeri complessi*. Infatti alle 2 algebre considerate nel campo complesso va aggiunta soltanto quella dei numeri bireali<sup>(8)</sup> che è somma diretta del campo reale (certo non solenoidale) e di se stesso.

Per quanto riguarda le sei algebre reali del 3° ordine<sup>(9)</sup>, si è già visto nel n. 4 che le tre algebre irriducibili non possono soddisfare alla (8) con  $PP_{-i}$  simmetrica definita positiva; poiché le tre algebre riducibili non sono solenoidali per il teorema testè dimostrato, si può concludere che *non esistono algebre reali solenoidali del 3° ordine*.

*Tra le algebre reali del 4° ordine<sup>(10)</sup> sono solenoidali, oltre alle due prodotto diretto dell'algebra dei numeri complessi per quelle dei numeri bireali e duali, soltanto l'algebra dei quaternioni, quella delle matrici di 2° ordine e quella con la tabella di moltiplicazione LXXXI; nessuna di queste tre ultime algebre è bisolenoidale.*

Mediante una verifica diretta od usando teoremi che daremo nel n. 6, si può dimostrare che tra le algebre del 4° ordine soltanto le 5 dell'enunciato possono essere solenoidali; poiché, in virtù del 2° teorema del n. 3, le due algebre prodotti diretti sono senz'altro solenoidali, esamineremo soltanto le tre algebre non commutative.

Le unità dell'algebra di tabella LXXXI si combinano secondo lo schema  $u_i u_i = u_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ),  $u_2 u_3 = -u_3 u_2 = u_4$ ,  $u_2 u_4 = -u_4 u_2 = -u_3$  e quindi la (8) porta  $a_{11} - a_{22} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$  che assicura la solenoidalità<sup>(11)</sup>; aggiungendo alla (8) la  $(a_{11} + a_{22}) u_3 = 0$  si ottengono tutte le (6') che però possono essere soddisfatte soltanto con  $PP_{-i}$  degenerare e l'algebra non è bisolenoidale.

(8) Cfr. SCORZA cit. in (1).

(9) SCORZA cit. in (2); alle tabelle di (2) va aggiunta la I (somma diretta dell'algebra dei numeri complessi e del campo reale) che, nel campo complesso, può ridursi alla III. Ricordiamo che nella classificazione di Scorza si prescinde dai corpi numerici.

(10) SCORZA cit. in (4); alle tabelle ivi date vanno aggiunte le III\* (matrici di 2° ordine), V (prodotto diretto dei numeri complessi per i bireali), VIII, LXXIX (prodotto diretto dei numeri complessi per i duali), LXXXI\* e CXIX che, nel campo complesso, possono ridursi, rispettivamente, alle I, X, X, CV, CVIII, CXXV.

(11) La solenoidalità è, del resto, evidente poiché  $uu_{-i} = 0$ .

Le (6') per l'algebra delle matrici di 2° ordine, quando si siano scelte unità  $e_{i,k}$  ( $i, k = 1, 2$ ) che si combinino secondo lo schema  $e_{i,h} e_{h,k} = e_{i,k}$ , danno luogo alle  $\sum_i a_{j,h+i} e_{1,i} + \sum_i a_{j+2,h+i} e_{2,i} = 0$  ( $i, j = 1, 2; h = 0, 2$ ); poiché esse per  $h = 0$  impongono l'annullarsi delle prime due colonne di  $PP_{-1}$  e per  $h = 2$  delle altre due colonne, l'algebra non è bisolenoidale nemmeno nel campo complesso. Dato che l'unità dell'algebra è  $e_{11} + e_{22}$ , la (8) si ottiene sommando le relazioni che si hanno per  $j = 1, h = 0$  e  $j = h = 2$  e porta che  $a_{11} + a_{23} = a_{12} + a_{24} = a_{31} + a_{43} = a_{32} + a_{44} = 0$ ; queste condizioni sono compatibili con l'essere  $PP_{-1}$  simmetrica definita positiva, onde l'algebra è solenoidale <sup>(12)</sup>.

La (8) per l'algebra dei quaternioni, la cui base  $e_0 = 1, e_1, e_2, e_3 = e_1 e_2$  soddisfa alle  $e_1^2 = e_2^2 = -1, e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$ , si scrive  $a_{11} - \sum_k^{2 \dots 4} a_{kk} + + 2 \sum_k^{2 \dots 4} a_{1k} e_{k-1} = 0$ ; perciò deve essere  $a_{11} = \sum_k a_{kk}, a_{1k} = 0$  ( $k = 2, \dots, 4$ ), condizioni che essendo compatibili con la definitezza di  $PP_{-1}$  assicurano la solenoidaltà.

Poiché  $e_1(e_0 \dots e_3) = 2(e_1 - e_0 o o) - (e_0 \dots e_3) e_1$ , la seconda delle (6') - una volta che si sia soddisfatto alla prima delle (6') cioè alla (8) - si riduce alla  $(a_{11} - a_{22}) e_1 - \sum_k^{3,4} a_{2k} e_{k-1} = 0$  e quindi porta  $\sum_k a_{kk} = 0, a_{2k} = 0$  ( $k = 3, 4$ ). Cercando poi di soddisfare alle successive (6'), si ottiene che  $PP_{-1}$  deve essere nulla e ciò esclude che l'algebra sia bisolenoidale anche nel campo complesso.

6. Le algebre reali con divisione sono date, oltre che dal campo reale, dall'algebra dei numeri complessi e da quella dei quaternioni <sup>(13)</sup>; onde, dal n. 5, abbiamo anche che *le algebre reali con divisione di ordine  $> 1$  sono solenoidali*.

Una generalizzazione immediata delle dimostrazioni del n. 5 ci permette poi di affermare che *tutte le algebre regolari* (total matrix algebras) e *tutte le algebre di Clifford reali o complesse sono solenoidali ma non bisolenoidali*.

Dalle due proposizioni segue che *le algebre reali o complesse semplici, cioè prodotto diretto di un'algebra con divisione per una regolare, di ordine  $> 1$  sono solenoidali*.

Le algebre reali semisemplici, cioè somme dirette di algebre semplici, in forza del teorema iniziale del n. 5, sono solenoidali soltanto se lo sono tutte le loro componenti; poiché non esistono algebre solenoidali semplici di ordini 1, 3, 5, 7 <sup>(14)</sup>, si conclude che *le algebre reali semisemplici di ordini 1, 3, 5 e 7 non sono solenoidali*.

(12) La solenoidaltà è immediata quando si faccia il cambiamento di base  $u'_1 = u_1 + u_4, u'_2 = u_1 - u_4, u'_3 = u_2 + u_3, u'_4 = u_2 - u_3$  poiché risulta  $u' J u'_{-1} = 0$  con  $J = \begin{pmatrix} 1_3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

(13) Cfr. ALBERT cit. in I <sup>(4)</sup>, Chap. IX, n. 11.

(14) Esiste invece un'algebra semplice solenoidale di ordine 9, quella regolare delle matrici di 3° ordine.

Un'algebra  $\mathfrak{A} = (u_1, \dots, u_{n-m}; u_{n-m+1}, \dots, u_n) = (u'; u'')$  di ordine  $n$  non semisemplice possiede una sottoalgebra  $\mathfrak{R} = (u'')$  non nulla di ordine  $m$  che è il suo massimo ideale pseudonullo e che si dice il radicale dell'algebra <sup>(15)</sup>; per  $\mathfrak{A}$ , la (8) si scrive:

$$(u'u'') \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_{-1} \\ u''_{-1} \end{pmatrix} = u'A_1 u'_{-1} + (u'u'') \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_{-1} \\ u''_{-1} \end{pmatrix} = 0,$$

che, essendo  $\mathfrak{R}$  ed  $\mathfrak{A} - \mathfrak{R} = (u')$  disgiunte, impone l'annullarsi dei due fattori del 2° membro. Ne segue: *affinché l'algebra reale  $\mathfrak{A}$  sia solenoidale deve essere tale  $\mathfrak{A} - \mathfrak{R}$ .*

Poiché l'algebra reale  $\mathfrak{A} - \mathfrak{R}$  è semisemplice <sup>(16)</sup>, dai due ultimi enunciati segue che *le algebre reali di ordine  $n$  con radicali di ordini  $n-1$ ,  $n-3$ ,  $n-5$  ed  $n-7$  non sono solenoidali* <sup>(17)</sup>.

Le algebre con radicale potenziale, cioè con radicale di ordine  $m$  ed indice  $m+1$ , sono somma diretta di due algebre una delle quali è o l'algebra dei numeri  $(m+1)$ -potenziali o quella dei ternioni <sup>(18)</sup>; poiché entrambe queste algebre, in forza dell'ultimo enunciato e del n. 5, non sono solenoidali, *le algebre reali con radicale potenziale non sono solenoidali*. In particolare, *non sono solenoidali le algebre con radicale di ordine 1*.

Dopo aver ricordato che se  $\mathfrak{A} - \mathfrak{R}$  è semplice, il suo ordine deve dividere sia l'ordine di  $\mathfrak{A}$  che quello di  $\mathfrak{R}$  <sup>(19)</sup> passiamo a dimostrare che *non esistono algebre reali solenoidali di ordini 5 e 7*.

Sappiamo già che non esistono algebre semisemplici solenoidali di ordini 5 e 7; dunque, avuto riguardo al penultimo teorema, le algebre i cui radicali hanno, nei due casi, ordini 4, 2, 1, 0 e 6, 4, 2, 1, 0 non sono solenoidali.

Se poi esistesse un'algebra reale solenoidale  $\mathfrak{A}$  del 5° ordine con il radicale  $\mathfrak{R}$  del 3°, l'algebra di 2° ordine  $\mathfrak{A} - \mathfrak{R}$  dovrebbe essere solenoidale e quindi sarebbe l'algebra dei numeri complessi che è semplice; ma allora il suo ordine dovrebbe dividere quello di  $\mathfrak{A}$  e questo è assurdo.

Con lo stesso ragionamento si vede che il radicale di un'algebra reale solenoidale del 7° ordine non può essere del 5° ordine e che se  $\mathfrak{R}$  è del 3° ordine  $\mathfrak{A} - \mathfrak{R}$  non può essere semplice. Supponiamo dunque che esista una algebra  $\mathfrak{A}$  del 7° ordine reale solenoidale con il radicale del 3° ordine - che sarà non potenziale - ed  $\mathfrak{A} - \mathfrak{R}$  somma diretta dell'algebra dei numeri complessi e di se stessa; la tabella di moltiplicazione di  $\mathfrak{A}$  sarà  $\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$ ,

(15) Cfr. ALBERT cit. in <sup>(13)</sup>, Chap. II, n. 5.

(16) Cfr. G. SCORZA, *Sopra un teorema fondamentale della teoria delle algebre*. « Rend. Lincei » (6), vol. 20, p. 65-72 (1934).

(17) Poiché le algebre semisemplici commutative di ordine dispari non possono essere solenoidali, si avrà che *le algebre reali commutative di ordine pari  $n$  con radicali di ordini  $n-1$ ,  $n-3$ , ..., 1 non sono solenoidali*. Un enunciato analogo si ha per  $n$  dispari.

(18) G. SCORZA, *Le algebre per ognuna delle quali la sottoalgebra eccezionale è potenziale*. « Acc. Sc. Torino », vol. 70 (1934-35), n. 11. Ricordiamo che qui si considerano soltanto algebre con unità.

(19) SCORZA cit. in <sup>(16)</sup>, n. 5.

dove  $T_1$  è la tabella di  $\mathfrak{A} - \mathfrak{R}$  le cui unità si combinano secondo lo schema  $u_1^2 = u_1$ ,  $u_1 u_2 = u_2$ ,  $u_2^2 = -u_1$ ,  $u_3^2 = u_3$ ,  $u_3 u_4 = u_4$ ,  $u_4^2 = -u_3$ ,  $T_2$  e  $T_3$  sono matrici di elementi di  $\mathfrak{R}$  e  $T_4$  è la tabella di un'algebra pseudonulla del 3° ordine le cui unità si combinino secondo gli schemi  $u_5^2 = u_6 u_5 = u_7$ ,  $u_6^2 = \alpha u_7$  o  $u_5^2 = u_7$ ,  $u_6^2 = \alpha u_7$  (1° caso),  $u_5 u_6 = -u_6 u_5 = u_7$  (2° caso) oppure è la tabella di una zero-algebra (3° caso) <sup>(20)</sup>. Sia poi  $u = (u_1 + u_3 + \alpha u_5 + + b u_6 + c u_7)$  l'unità di  $\mathfrak{A}$  e poniamo  $(u_2 + u_4) u_{4+i} = \sum_k m_{ik} u_{4+k}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) con le  $m_{ik}$  numeri reali.

Nei primi due casi si avrà, rispettivamente

$$(u_2 + u_4) u_7 = (u_2 + u_4) u_5^2 = (\sum_i m_{1i} u_{4+i}) u_5 = \gamma u_7$$

$$(u_2 + u_4) u_7 = (u_2 + u_4) u_5 u_6 = (\sum_i m_{1i} u_{4+i}) u_6 = \gamma u_7$$

con  $\gamma$  reale (eventualmente nullo). D'altronde

$$u_7 = u u_7 = (u_1 + u_3) u_7 = - (u_2 + u_4)^2 u_7 = -\gamma^2 u_7;$$

perciò un'algebra reale come la nostra non può avere un radicale che presenti il 1° od il 2° caso. Consideriamo dunque il 3° caso; allora

$$u_{4+i} = u u_{4+i} = (u_1 + u_3) u_{4+i} = - (u_2 + u_4)^2 u_{4+i} = - \sum_k m_{ik} (\sum_i m_{ik} u_{4+i}),$$

e quindi deve essere  $\|m_{ik}\|^2 + I_3 = 0$ . Ma una matrice reale di ordine dispari non può soddisfare a quella equazione, e quindi il radicale di  $\mathfrak{A}$  non può essere nemmeno una zero-algebra di 3° ordine; questo completa la dimostrazione del teorema.

**Geometria.** — *Su alcune connessioni affini localmente associate ad una assegnata connessione asimmetrica.* Nota di ALDO COSSU, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

PREMESSA. — Definita in un punto  $x$  di una varietà regolare  $n$ -dimensionale e nei punti dell'intorno del prim'ordine di  $x$  una connessione affine asimmetrica  $L$ , si consideri una nuova connessione affine  $\bar{L}$ , che in  $x$  coincida con la  $L$  e tale che gli  $E_3$  di autoparallele per  $x$  da essa determinati coincidano con quelli determinati dalla  $L$ .

Le condizioni imposte non determinano però in modo unico, nell'intorno del prim'ordine di  $x$ , la  $\bar{L}$ ; si arriva a ciò imponendo che  $\bar{L}$  goda di altre proprietà geometriche relative al suo tensore di curvatura in  $x$ , definite intrinsecamente nell'intorno del prim'ordine di  $x$  dalla connessione assegnata  $L$ .

Si ottengono così connessioni  $\bar{L}$  con tensore di curvatura nullo in  $x$ , tali cioè che, considerato un generico ciclo infinitesimo di origine  $x$ , trasportando, secondo la  $\bar{L}$ , un generico vettore lungo il suddetto ciclo, si ottiene

(20) SCORZA, cit. in <sup>(2)</sup>, § 2.

(\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.



un vettore coincidente con quello iniziale, a meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo. Chiameremo *localmente integrabili*, le connessioni del suddetto tipo. Un'altra classe di connessioni che si può ottenere e che determinano un trasporto di direzioni che chiameremo localmente integrabile, è tale che, trasportando un vettore per  $x_0$ , lungo un ciclo infinitesimo, il vettore finale che così si ottiene risulta parallelo a quello iniziale a meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo <sup>(1)</sup>.

1. CONNESSIONI AVENTI IN COMUNE GLI  $E_3$  DI AUTOPARALLELE PER UN PUNTO. - Sia  $X_n$  una varietà regolare  $n$ -dimensionale e sia  $L$  una connessione affine asimmetrica definita in  $x_0$  e nei punti dell'intorno del prim'ordine di  $x_0$ . Siano cioè note in  $x_0$  le  $n^3$  componenti della  $L$ ,  $L_{hk}^i(x_0)$ , con le loro derivate parziali prime  $\partial_l L_{hk}^i(x_0)$ .

Nello stesso intorno di  $x_0$  si consideri una seconda connessione asimmetrica  $\bar{L}$ , di componenti  $\bar{L}_{hk}^i$  tale che  $\bar{L}_{hk}^i(x_0) = L_{hk}^i(x_0)$ .

Posto  $\partial_l \bar{L}_{hk}^i(x_0) - \partial_l L_{hk}^i(x_0) = \partial_l \gamma_{hk}^{\cdot\cdot i}$  queste ultime risulteranno ovviamente in  $x_0$  le componenti di un tensore <sup>(2)</sup>, avendosi

$$\nabla_l \gamma_{hk}^{\cdot\cdot i} = \bar{\nabla}_l \gamma_{hk}^{\cdot\cdot i} = \partial_l \gamma_{hk}^{\cdot\cdot i(3)}$$

Sono altresì componenti di un tensore le

$$\partial_l \eta_{hk}^{\cdot\cdot i} = \partial_l \bar{\Gamma}_{hk}^i(x_0) - \partial_l \Gamma_{hk}^i(x_0) = \partial_l \gamma_{(hk)}^{\cdot\cdot i}$$

$$\partial_l \psi_{hk}^{\cdot\cdot i} = \partial_l \bar{S}_{hk}^{\cdot\cdot i}(x_0) - \partial_l S_{hk}^{\cdot\cdot i}(x_0) = \partial_l \gamma_{[hk]}^{\cdot\cdot i},$$

ove con  $\Gamma_{hk}^i$  e  $\bar{\Gamma}_{hk}^i$  si sono indicate le componenti di  $\Gamma$  e  $\bar{\Gamma}$  connessioni simmetriche rispettivamente associate alla  $L$  ed alla  $\bar{L}$ , mentre con  $S_{hk}^{\cdot\cdot i} = L_{[hk]}^i$  e  $\bar{S}_{hk}^{\cdot\cdot i} = \bar{L}_{[hk]}^i$  si sono indicati i tensori di torsione di  $L$  e  $\bar{L}$ .

È facile verificare che affinché gli  $E_3$  di autoparallele per  $x_0$  della  $\bar{L}$  coincidano <sup>(4)</sup> con quelli della  $L$ , deve aversi:

$$\partial_{(l} \gamma_{hk)}^{\cdot\cdot i} = \partial_{(l} \eta_{hk)}^{\cdot\cdot i} = \frac{1}{n+2} [ \partial_{(l} \eta_{|h}^{\cdot\cdot i} \delta_{k)}^i + 2 \delta_{(l}^i \partial_{h} \eta_{k)}^{\cdot\cdot i} ],$$

(1) Questo modo di associare ad una assegnata connessione altre connessioni più semplici è stato ispirato dalle Note di E. BOMPIANI, *Connessioni affini e geometria riemanniana*. « Rend. di Mat. », ser. V, vol. X, p. 391 (1951) e « Boll. dell'U.M.I. », ser. III, anno VIII, n. 4, p. 363 (1953).

(2) Cfr. per analogia il tensore divario, introdotto da E. BOMPIANI, tra un'assegnata connessione simmetrica e quella affine integrale relativa ad un punto ed alla connessione data, in *Geometria Differenziale*. Parte prima. *Teorie introduttive*, Roma, p. 109.

(3) Si indicano con  $\nabla$  e  $\bar{\nabla}$  rispettivamente i simboli di derivazione covariante relativi alla connessione  $L$  ed alla  $\bar{L}$ .

(4) In generale se due connessioni hanno, come nel nostro caso, gli stessi  $E_2$  di autoparallele per  $x_0$ , hanno in comune  $\frac{3^n-1}{2} E_3$  di autoparallele; le loro direzioni tangenti per  $x_0$  sono date da  $\delta_{rs}^{ij} \partial_l \eta_{hk}^{\cdot\cdot r} dx^s dx^h dx^l dx^k = 0$ .

posto quindi:

$$\rho_{lh} = \frac{1}{n+2} (\partial_l \eta_{hk}^{\cdot\cdot i} + 2 \partial_{(l} \eta_{h)k}^{\cdot\cdot i}),$$

si ha:

$$(1.1) \quad \partial_l \gamma_{hk}^{\cdot\cdot i} = \partial_{(l} \eta_{h)k}^{\cdot\cdot i} = \delta_{(l}^i \rho_{h)k}.$$

Cerchiamo di esprimere il tensore  $\partial_l \gamma_{hk}^{\cdot\cdot i}$  mediante le grandezze di curvatura delle connessioni  $L$ ,  $\bar{L}$ ,  $\Gamma$ ,  $\bar{\Gamma}$ .

Essendo  $\partial_l \eta_{hk}^{\cdot\cdot i} - \partial_h \eta_{lk}^{\cdot\cdot i} = \Psi_{l\bar{h}k}^{\cdot\cdot\cdot i}$ , ove  $\Psi_{l\bar{h}k}^{\cdot\cdot\cdot i} = \Gamma_{l\bar{h}k}^{\cdot\cdot\cdot i} - \bar{\Gamma}_{l\bar{h}k}^{\cdot\cdot\cdot i}$  è il divario tra i tensori di curvatura <sup>(5)</sup> delle connessioni  $\Gamma$  e  $\bar{\Gamma}$ , si ha

$$2 \partial_l \eta_{hk}^{\cdot\cdot i} - 2 \partial_{(l} \eta_{h)k}^{\cdot\cdot i} = 2 \Psi_{l(hk)}^{\cdot\cdot\cdot i}$$

e quindi per la (1.1)

$$(1.2) \quad \partial_l \eta_{hk}^{\cdot\cdot i} = \delta_{(l}^i \rho_{h)k} + \frac{2}{3} \Psi_{l(hk)}^{\cdot\cdot\cdot i}.$$

Essendo inoltre

$$(1.3) \quad \partial_l \psi_{hk}^{\cdot\cdot i} - \partial_h \psi_{lk}^{\cdot\cdot i} = \Phi_{l\bar{h}k}^{\cdot\cdot\cdot i} - \Psi_{l\bar{h}k}^{\cdot\cdot\cdot i}$$

ove  $\Phi_{l\bar{h}k}^{\cdot\cdot\cdot i} = L_{l\bar{h}k}^{\cdot\cdot\cdot i} - \bar{L}_{l\bar{h}k}^{\cdot\cdot\cdot i}$  è il divario tra i tensori di curvatura di  $L$  ed  $\bar{L}$ , considerando le analoghe alla (1.3)

$$(1.4) \quad \begin{cases} \partial_k \psi_{lh}^{\cdot\cdot i} - \partial_l \psi_{kh}^{\cdot\cdot i} = \Phi_{k\bar{l}h}^{\cdot\cdot\cdot i} - \Psi_{k\bar{l}h}^{\cdot\cdot\cdot i} \\ \partial_h \psi_{kl}^{\cdot\cdot i} - \partial_k \psi_{hl}^{\cdot\cdot i} = \Phi_{h\bar{k}l}^{\cdot\cdot\cdot i} - \Psi_{h\bar{k}l}^{\cdot\cdot\cdot i}, \end{cases}$$

e sommando la (1.3) e la prima delle (1.4) e sottraendo l'ultima si ha

$$(1.5) \quad 2 \partial_l \psi_{hk}^{\cdot\cdot i} = \Phi_{l\bar{h}k}^{\cdot\cdot\cdot i} + 2 \Phi_{k(lh)}^{\cdot\cdot\cdot i} + 2 \Psi_{h\bar{k}l}^{\cdot\cdot\cdot i}$$

Dalle (1.2) e (1.5) si ha in definitiva

$$(1.6) \quad \partial_l \gamma_{hk}^{\cdot\cdot i} = \delta_{(l}^i \rho_{h)k} - \frac{4}{3} \Psi_{k(hl)}^{\cdot\cdot\cdot i} + \frac{1}{2} \Phi_{l\bar{h}k}^{\cdot\cdot\cdot i} + \Phi_{k(lh)}^{\cdot\cdot\cdot i}.$$

Concludendo assegnata nell'intorno del prim'ordine di  $x$  una connessione asimmetrica  $L$ , la più generale connessione asimmetrica  $\bar{L}$ , avente gli stessi  $E_3$  di autoparallele per  $x$  della connessione  $L$ , e tale che sia  $\bar{L}_{hk}^i(x) = L_{hk}^i(x)$ , è definita nei punti dell'intorno del prim'ordine di  $x$  dalle

$$\partial_l \bar{L}_{hk}^i = \partial_l L_{hk}^i + \delta_{(l}^i \rho_{h)k} - \frac{4}{3} \Psi_{k(hl)}^{\cdot\cdot\cdot i} + \frac{1}{2} \Phi_{l\bar{h}k}^{\cdot\cdot\cdot i} - \Phi_{k(lh)}^{\cdot\cdot\cdot i}$$

ove  $\rho_{hk}$  è un arbitrario tensore doppio covariante simmetrico,  $\Psi_{k(hl)}^{\cdot\cdot\cdot i}$  un tensore simmetrico rispetto ad  $l, h$  soddisfacente la  $\Psi_{(k(lh)}^{\cdot\cdot\cdot i} = 0$  e  $\Phi_{k(lh)}^{\cdot\cdot\cdot i}$  un tensore alter-nante rispetto ad  $l, h$ .

(5) Il tensore di curvatura di una connessione  $L_{hk}^i$  è dato da  $L_{l\bar{h}k}^{\cdot\cdot\cdot i} = \partial_h L_{lk}^i - \partial_l L_{hk}^i + L_{lk}^r L_{hr}^i - L_{hk}^r L_{lr}^i$ ; cfr. ad esempio E. BOMPIANI, op. cit., nella (2).

Determiniamo il significato geometrico del tensore  $\rho_{hk}$ . Si consideri un  $E_3$  di autoparallela per  $x$  tangente ivi alla direzione  $dx$  e si consideri un vettore  $\xi$  tangente in  $x$  al suddetto  $E_3$ , con la condizione che trasportandolo per equipollenza, secondo la connessione  $L$ , lungo l' $E_2$  del suddetto  $E_3$ , si mantenga sempre tangente all' $E_3$  <sup>(6)</sup>. Sia  $\bar{\xi}$  il vettore applicato nel punto  $x + dx + 1/2 d^2x$  di  $E_3$  che così si ottiene, se si perviene allo stesso vettore  $\bar{\xi}$  trasportando allo stesso modo, secondo la  $\bar{L}$ , il vettore  $\xi$ , deve aversi  $\rho_{hk} dx^h dx^k = 0$ . Da ciò è facile dedurne il significato geometrico dell'annullarsi di  $\rho_{hk}$ .

2. ALCUNE DETERMINAZIONI INTRINSECHE DELLA  $\bar{L}$  NELL'INTORNO DEL PRIM'ORDINE DI  $x$ . - Cerchiamo di determinare la  $\bar{L}$  in modo intrinseco rispetto alla  $L$ , nell'intorno del prim'ordine di  $x$ . Sia intanto  $\rho_{hk} = 0$  e  $\partial_l \gamma_{ht}^{\dots i} = 0$  <sup>(7)</sup>, si deduce quindi che, essendo  $\partial_t \gamma_{hk}^{\dots i} = 0$ , è anche  $\Psi_{ljk}^{\dots i} = 0$ .

Indicato inoltre con  $\bar{W}_{ljk}^{\dots i}$  <sup>(8)</sup> il tensore di Weyl della connessione  $\bar{L}$  sia  $\bar{W}_{ljk}^{\dots i}(x) = 0$ , segue allora che

$$\bar{\Gamma}_{ljk}^{\dots i}(x) = \frac{1}{n+1} \delta_k^i (\bar{\Gamma}_{hl} - \bar{\Gamma}_{lh}) + \frac{1}{n^2-1} [\delta_l^i (n \Gamma_{hk} + \bar{\Gamma}_{kh}) - \delta_h^i (n \bar{\Gamma}_{lk} + \bar{\Gamma}_{kl})]$$

ove  $\bar{\Gamma}_{hk} = \Gamma_{hk}^{\dots t}$ . Siccome è  $\bar{\Gamma}_{hk} = \Gamma_{hk}$  per le precedenti condizioni imposte, si deduce che  $\Psi_{ljk}^{\dots i} = W_{ljk}^{\dots i}(x)$ , essendo quest'ultimo il tensore di Weyl della connessione  $L$ .

Se infine si suppone  $\bar{L}_{ljk}^{\dots i} = 0$  la (1.6) si può scrivere

$$\partial_l \gamma_{hk}^{\dots i} = -\frac{4}{3} W_{k(lh)}^{\dots i} + \frac{1}{2} L_{ljk}^{\dots i} + L_k^{\dots i}(l_h).$$

Tenendo conto del significato delle varie condizioni imposte alla  $\bar{L}$  si conclude che *assegnata nell'intorno del prim'ordine di  $x$  una connessione asimmetrica  $L$ , rimane determinata nello stesso intorno un'unica connessione asimmetrica  $\bar{L}$ , tale che  $L_{hk}^i(x) = \bar{L}_{hk}^i(x)$ , con le seguenti condizioni geometriche:*

a) la  $\bar{L}$  abbia gli stessi  $E_3$  di autoparallele per  $x$  della  $L$ ;

b) trasportando secondo la  $L$ , un vettore  $\xi$  tangente in  $x$  ad un qualunque  $E_3$  di autoparallela, lungo l' $E_2$  del suddetto  $E_3$ , con la condizione che si mantenga sempre tangente all' $E_3$ , si pervenga allo stesso vettore che si ottiene trasportando allo stesso modo secondo la  $\bar{L}$ , il vettore  $\xi$  ( $\rho_{hk} = 0$ );

(6) È facile costruire un siffatto tensore ricordando che se  $s$  è un parametro affine per una autoparallela di una connessione, il campo di vettori tangenti definito nei punti della autoparallela considerata è un campo di vettori equipollenti.

(7) Per le notazioni del n. 1 si ha  $\partial_l \Gamma_{ht}^i = \partial_l \Gamma_{ht}^t$ . A tal proposito si ricorda che il volume  $V_n$ -dimensionale determinato da  $n$  vettori indipendenti per  $x$  si trasporta, secondo la connessione  $L$ , da  $x$  a  $x + dx$  nel volume  $V' = V(1 - L_{ht}^t dx^h)$ .

(8) Per il tensore di Weyl cfr. ad esempio E. BORTOLOTTI, *Spazi a connessione proiettiva* in *Corsi dell'Istituto di Alta Matematica*, Roma, 1941, p. 26.

c) il trasporto, secondo la  $\bar{\Gamma}$ , da  $x$  ad un qualunque punto dell'intorno del secondo ordine di  $x$ , di un volume  $n$ -dimensionale, coincida con quello relativo alla  $\Gamma$  ( $\partial_l \gamma_{ht}^i = 0$ ).

d) la parte principale dell'incremento subito da un vettore generico  $\xi$  per  $x$ , nel trasporto secondo la  $\bar{\Gamma}$ , lungo un ciclo infinitesimo, la cui 2-direzione è parallela a  $\xi$ , risulti parallela alla stessa 2-direzione ( $\bar{W}_{lhk}^{\dots i}(x) = 0$ ) <sup>(9)</sup>;

e) la connessione  $\bar{L}$  sia localmente integrabile ( $\bar{L}_{lhk}^{\dots i}(x) = 0$ ) <sup>(10)</sup>.

La connessione  $\bar{L}$  in questione è definita nell'intorno del prim'ordine di  $x$  dalle

$$\partial_l \bar{L}_{hk}^i(x) = \partial_l L_{hk}^i(x) - \frac{4}{3} W_{k(lh)}^{\dots i} + \frac{1}{2} L_{lhk}^{\dots i} + L_{k(lh)}^{\dots i}.$$

Un'altra connessione  $\bar{L}$  intrinsecamente determinata dalla  $L$  si ha sostituendo alla condizione geometrica e) la seguente:

il trasporto delle direzioni, secondo la connessione  $\bar{L}$ , sia localmente integrabile <sup>(10)</sup> ed il rotore del vettore di Einstein della  $\bar{L}$  coincida con quello della  $L$ .

In tal caso è  $\bar{L}_{lhk}^{\dots i} = \frac{1}{n} \delta_k^i \bar{L}_{hkt}^{\dots t}$  <sup>(11)</sup> ove  $\bar{L}_{lht}^{\dots t} = L_{lht}^{\dots t}$  e quindi la connessione  $\bar{L}$  risulta determinata dalle

$$\begin{aligned} \partial_l \bar{L}_{hk}^i(x) &= \partial_l L_{hk}^i(x) - \frac{4}{3} W_{k(lh)}^{\dots i} + \frac{1}{2n} (n L_{lhk}^{\dots i} - \delta_k^i L_{lht}^{\dots t}) + \\ &+ \frac{1}{n} (n L_{k(lh)}^{\dots i} + \delta_{(h}^i L_{l)kt}^{\dots t}). \end{aligned}$$

Un modo molto più semplice per individuare nell'intorno del primo ordine di  $x$  una connessione  $\bar{L}$ , intrinsecamente definita dalla  $L$ , sempre nell'ipotesi che sia  $\bar{L}_{hk}^i(x) = L_{hk}^i(x)$ , si ha imponendo la condizione che, nel suddetto intorno, le due connessioni abbiano la stessa connessione simmetrica associata. In tal caso quindi non solo si ha che  $\bar{\Gamma}_{hk}^i(x) = \Gamma_{hk}^i(x)$ , ma anche  $\partial_l \bar{\Gamma}_{hk}^i(x) = \partial_l \Gamma_{hk}^i$  e quindi  $\partial_l \gamma_{hk}^i = 0$ . Segue allora che in  $x$  è

$$\partial_l \gamma_{hk}^i = \partial_l \psi_{hk}^i = \frac{1}{2} \Phi_{lhk}^{\dots i} + \Phi_{k(lh)}^{\dots i}.$$

Se quindi la connessione  $\bar{L}$  è localmente integrabile,  $\bar{L}_{lhk}^{\dots i}(x) = 0$ , si ha  $\partial_l \gamma_{hk}^i = \frac{1}{2} L_{lhk}^{\dots i} + L_{k(lh)}^{\dots i}$ . Se invece si vuole che solo il trasporto delle direzioni sia localmente integrabile, imponendo la condizione che il rotore del

(9) Si osservi che pur essendo nullo in  $x$  il tensore di Weyl la connessione  $\bar{L}$  non è nell'intorno di  $x$  proiettivamente piana. Per il significato geometrico dell'annullarsi in un punto del tensore di Weyl cfr. A. COSSU, *Sulla curvatura delle varietà a tre dimensioni dotate di una connessione affine*. « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. VIII, p. 551 (1950).

(10) Ciò naturalmente nel senso precisato nella premessa.

(11) Cfr. E. BORTOLOTTI, *Sulla Geometria delle varietà a connessione affine*. « Ann. di Mat. », ser. IV, t. VIII, 1930-31.



vettore di Einstein della  $\bar{L}$  sia in  $x$  eguale a quello della  $L$ , si ha

$$\partial_l \gamma_{hk}^{\dots i} = \frac{1}{2n} (n L_{lhk}^{\dots i} - \delta_k^i L_{lht}^{\dots t}) + \frac{1}{n} (n L_{k(lh)}^{\dots t} + \delta_{(h}^i L_{l)kt}^{\dots t}).$$

3. CONNESSIONI AVENTI IN COMUNE GLI ELEMENTI DI AUTOPARALLELE PER UN PUNTO  $x$  E PER I PUNTI DELL'INTORNO DEL PRIM'ORDINE DI  $x$ . - È noto che se una connessione  $\bar{L}$  ha le stesse autoparallele di una connessione  $L$  i suoi parametri sono dati da

$$\bar{L}_{hk}^i = L_{hk}^i + \delta_h^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_h + \psi_{hk}^{\dots i}$$

ove naturalmente  $\varphi_h$  è un vettore covariante e  $\psi_{hk}^{\dots i}$  è un tensore alternante rispetto ad  $h, k$ .

Se quindi in  $x$  è  $\bar{L}_{hk}^i(x) = L_{hk}^i(x)$ , la connessione  $\bar{L}$  le cui autoparallele per  $x$  e per i punti dell'intorno del prim'ordine coincidono quelle della  $L$ , a meno di infinitesimi d'ordine superiore al terzo, è definita nel suddetto intorno dalle

$$\partial_l \bar{L}_{hk}^i(x) = \partial_l L_{hk}^i(x) + \delta_h^i \partial_l \varphi_k + \delta_k^i \partial_l \varphi_h + \partial_l \psi_{hk}^{\dots i}$$

ove  $\partial_l \varphi_h$  e  $\partial_l \psi_{hk}^{\dots i}$  sono le derivate parziali dei tensori  $\varphi_h$  e  $\psi_{hk}^{\dots i}$  nulli in  $x$ .

Posto  $\partial_l \varphi_k = \sigma_{lk}$  si ha

$$\partial_l \gamma_{hk}^{\dots i} = 2 \delta_l^i \sigma_{[hk]} + 2 \delta_h^i \sigma_{[lk]} + 2 \delta_k^i \sigma_{[lh]} + \frac{1}{2} \Phi_{lhh}^{\dots i} + \Phi_{k(lh)}^{\dots i}.$$

Se quindi la connessione  $\bar{L}$  è localmente integrabile e se le due connessioni hanno nei punti dell'intorno del prim'ordine di  $x$  gli stessi vettori di Einstein, è

$$\partial_l \gamma_{hk}^{\dots i} = \frac{2}{n+1} \delta_l^i L_{kht}^{\dots t} - \frac{2}{n-1} \delta_k^i L_{lht}^{\dots t} + \frac{1}{2} L_{lhh}^{\dots i} + L_{k(lh)}^{\dots i}.$$

Se invece si vuole che soltanto il trasporto delle direzioni sia localmente integrabile, posto  $\bar{L}_{lht}^{\dots t}(x) = L_{lht}^{\dots t}(x)$ , nell'ipotesi che le due connessioni abbiano gli stessi vettori di Einstein nei punti dell'intorno del prim'ordine di  $x$ , si ha

$$\partial_l \gamma_{hk}^{\dots i} = \frac{1}{2n(n+1)} \{ \delta_l^i [2n L_{hkt}^{\dots t} - (n+1) L_{kht}^{\dots t}] +$$

$$\delta_h^i [2n L_{lkt}^{\dots t} - (n+1) L_{klt}^{\dots t}] - \delta_k^i (4n L_{l(h)}^{\dots t} + L_{lht}^{\dots t}) \} + \frac{1}{2} L_{lhh}^{\dots i} + L_{k(lh)}^{\dots i}.$$

**Geometria.** — *Classi caratteristiche e varietà covarianti d'immersione.* Nota di EDOARDO VESENTINI, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

In una Memoria recentissima B. Segre ([3], cap. II, pp. 25-50) <sup>(1)</sup> ha introdotto per ogni sottovarietà algebrica irriducibile non singolare,  $P$ , di dimensione  $p > 0$ , di una varietà algebrica, anch'essa irriducibile e non singolare,  $V$ , di dimensione  $v > p$ , una *successione covariante d'immersione*, ossia una successione di  $p$  sistemi di equivalenza, definiti intrinsecamente su  $P$ , aventi dimensioni eguali a  $p - 1, p - 2, \dots, 0$ . In particolare, considerando la successione covariante d'immersione della varietà diagonale nel prodotto  $V \times V$ , B. Segre ([3], cap. VI, pp. 89-103) ha dato una nuova definizione dei *sistemi canonici* di  $V$ .

Nella presente Nota mostreremo (nn. 2-3) che *le classi caratteristiche di omologia dello spazio fibrato dai vettori complessi normali a  $P$  in  $V$  coincidono con le classi di omologia di egual dimensione determinate in  $P$  dagli elementi dell'inversa della successione covariante d'immersione di  $P$  in  $V$*  ([3], nn. 6-7, p. 13).

Sulla base di questo risultato e della nuova definizione della successione dei sistemi canonici di  $V$ , mostreremo (n. 4) che *le classi di omologia di  $V$  determinate dagli elementi dell'alternante della successione canonica di  $V$  coincidono con le classi caratteristiche di omologia di Chern di egual dimensione dello spazio fibrato dai vettori tangenti a  $V$* . Questa proposizione è già stata enunciata da W. V. D. Hodge [2], ma è stata da lui dimostrata completamente soltanto nel caso in cui  $V$  sia un'intersezione completa oppure possenga un numero sufficiente di integrali semplici di prima specie.

Faremo anzitutto (n. 1) alcune premesse ed esporremo alcuni risultati della teoria degli spazi fibrati stabiliti recentemente da R. Thom ([5], [6]) e da S. S. Chern [1], limitandoci ad enunciarli nelle ipotesi, più restrittive di quelle originali, nelle quali avremo occasione di utilizzarli in seguito.

1. Relativamente alla teoria degli spazi fibrati, in tutto il seguito ci riferiremo alla nomenclatura introdotta da N. Steenrod in [4]. Tradurremo con il termine *struttura fibrata* l'espressione *fibre bundle* in luogo della quale abbiamo usato dianzi l'espressione *spazio fibrato*. In luogo di *bundle space* adotteremo il termine *spazio associato alla struttura fibrata*. Nel caso in cui il *fibre bundle*  $\mathcal{B}$  sia un *k-sphere bundle* ([4], n. 7. 8, p. 34), cioè nel caso in cui la fibra di  $\mathcal{B}$  sia una sfera a  $k$  dimensioni,  $S^k$ , ed il gruppo associato alla struttura  $\mathcal{B}$  (*group of the bundle*, [4], n. 2. 3, p. 5) sia il gruppo  $O_{k+1}$

(\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) I numeri entro parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

delle trasformazioni reali ortogonali dello spazio euclideo a  $k + 1$  dimensioni, diremo che  $\mathfrak{B}$  è una  $k$ -struttura sferica od una struttura sferica a  $k$  dimensioni. Se il gruppo associato a  $\mathfrak{B}$  è il sottogruppo di  $O_{k+1}$  delle rotazioni di  $S^k$ , diremo che  $\mathfrak{B}$  è una  $k$ -struttura sferica orientabile od una struttura sferica orientabile a  $k$  dimensioni (*orientable sphere bundle*, [4], n. 7.8, p. 34). Se la dimensione della sfera fibra di  $\mathfrak{B}$  è  $k = 2n - 1$ , e se il gruppo di  $\mathfrak{B}$  è il gruppo unitario dello spazio euclideo complesso a  $n$  dimensioni, diremo che  $\mathfrak{B}$  è una  $2n - 1$ -struttura sferica unitaria od una struttura sferica unitaria a  $2n - 1$  dimensioni (*unitary sphere bundle*, [4], n. 41.2, pp. 209-210).

Veniamo ora ai risultati di Thom ([5], [6]) e di Chern [1].

Siano:  $\mathfrak{B}$  una struttura sferica orientabile a  $n - 1$  dimensioni avente come spazio base un complesso finito connesso  $M$ ;  $\mathfrak{A}$  la struttura fibrata dalle sfere piene chiuse  $A^n$  ottenuta ritraendo sul proprio centro la sfera  $S^{n-1}$  fibra di  $\mathfrak{B}$ ;  $\mathfrak{A}'$  la struttura fibrata complementare di  $\mathfrak{B}$  in  $\mathfrak{A}$ , avente cioè come fibra la sfera piena aperta  $a^n = A^n - S^{n-1}$ ;  $B$ ,  $A$  ed  $A'$  gli spazi associati, rispettivamente, alle strutture  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{A}$  ed  $\mathfrak{A}'$ . Una suddivisione di  $M$  in celle  $E^i$  induce una suddivisione dello spazio  $A'$  in celle  $E^i \times a^n$ . Indichiamo con  $C^i$ ,  $H^i$  e  $H_i$  i gruppi, rispettivamente, delle cocatene, di coomologia e di omologia di dimensione  $i$ , che supporremo sempre a coefficienti interi, la coomologia in  $A'$  essendo la coomologia a supporti compatti, canonicamente isomorfa alla coomologia relativa  $A \bmod B$ . L'operatore  $g^*$  definito su ogni cocatena  $u^i \in C^i(M)$  dalla relazione  $g^* u^i (E^i \times a^n) = u^i (E^i)$  determina un isomorfismo  $\psi^*$  di  $H^{i+n}(A')$  su  $H^i(M)$  per il quale, secondo R. Thom [5], se  $c^n(\mathfrak{B})$  è la  $n$ -esima classe caratteristica di Whitney della struttura sferica orientabile  $\mathfrak{B}$  ([4], n. 38.2, p. 190), e se  $U^n \in H^n(A')$  è la immagine, mediante  $\psi^{*-1}$  dell'unità di  $H^0(M)$ , si ha

$$(1) \quad c^n(\mathfrak{B}) = \psi^*(U^n \smile U^n),$$

il « cup-product »  $\smile$  essendo definito dal prodotto fra interi.

Supponiamo ora che  $M$  sia una sottovarietà compatta, chiusa, orientabile, di dimensione  $m > 0$ , di una varietà compatta, chiusa, orientabile,  $W$ , di dimensione  $w = m + 2$ . Nell'ipotesi che  $W$  e  $M$  siano analitiche, che  $M$  sia immersa analiticamente in  $W$ , e che  $W$  sia dotata d'una metrica riemanniana a coefficienti analitici, applichiamo i risultati precedenti alla struttura sferica orientabile,  $\mathfrak{B}$ , ad una dimensione, normale a  $M$  in  $W$ <sup>(2)</sup>, ed alle strutture  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{A}'$  collegate a  $\mathfrak{B}$  nel modo sopra indicato. Lo spazio  $A'$  associato ad  $\mathfrak{A}'$  è l'intorno normale di  $M$  in  $W$  determinato dai cerchi geodetici aperti normali a  $M$  in  $W$  [6].

(2) Tale struttura sferica è stata introdotta da H. Whitney, il quale, nella Monografia [7], ne ha approfondito lo studio stabilendo per essa una relazione generalizzata dalla formula (1) di R. Thom. Non ci è stato però possibile consultare tale Monografia, sicché non sappiamo se la formula (1), nel caso particolare che a noi interessa, appartenga a H. Whitney od a R. Thom.

Con i medesimi simboli  $W$  e  $M$  indichiamo, rispettivamente, la classe fondamentale di omologia di  $W$  e la classe di omologia di  $W$  determinata dalla classe fondamentale di omologia di  $M$  nell'immersione di  $M$  in  $W$ . Per ogni elemento  $u \in H^i(A, B)$  indichiamo con  $\mathfrak{D}_A u \in H_{w-i}(A)$  la classe di omologia duale di  $u$  nella varietà orientabile  $A$  avente  $B$  come contorno regolare. Inoltre indichiamo con  $\mathfrak{D}_M t \in H_{m-i}(M)$  la classe di omologia duale di un qualsiasi elemento  $t \in H^i(M)$ . Essendo  $f_*: H_j(A) \rightarrow H_j(M)$  l'omomorfismo determinato dalla rappresentazione fibrata  $f: A \rightarrow M$ , vale la seguente relazione

$$(2) \quad f_* \mathfrak{D}_A u = \mathfrak{D}_M \psi^* u^{(3)}.$$

Essendo  $\pi^*: H^i(A') \rightarrow H^i(W)$  l'omomorfismo determinato dalla dissezione  $(A', W - A')$  di  $W$  risulta [6]:

$$(3) \quad \pi^* U^n \cap W = M.$$

2. Siano:  $V$  una varietà algebrica irriducibile, non singolare, di dimensione  $v > 1$ ;  $P$  una sottovarietà algebrica di  $V$ , anch'essa irriducibile e non singolare di dimensione  $p > 0$ ;  $\{P_V\} = P, P_{V,1}, P_{V,2}, \dots$ , la *successione covariante d'immersione* di  $P$  in  $V$  secondo B. Segre ([3], n. 13, pp. 25-26);  $\{\tilde{P}_V\} = P, \tilde{P}_{V,1}, \tilde{P}_{V,2}, \dots$ , la *successione inversa* di  $\{P_V\}$  ([3], nn. 6-7, pp. 13-17), ove  $\tilde{P}_{V,i}$  è un sistema d'equivalenza, di dimensione  $p-i$ , determinato in  $P$  dai sistemi  $P, P_{V,1}, \dots, P_{V,i-j}$ . Per semplicità di notazioni nel seguito indicheremo con gli stessi simboli  $V$  e  $P$  le classi fondamentali di omologia, aventi dimensioni  $2v$  e  $2p$ , di  $V$  e di  $P$ . Inoltre denoteremo con il medesimo simbolo  $\tilde{P}_{V,i}$  la classe di omologia di dimensione  $2p-2i$ , determinata in  $P$  dalla classe fondamentale di omologia di una varietà di  $\tilde{P}_{V,i}$ , mediante l'omomorfismo indotto dall'immersione di tale varietà in  $P$ .

Introdotta in  $V$  una metrica hermitiana definita positiva, indichiamo con  $\mathfrak{B}'$  la struttura sferica unitaria di dimensione  $2v-2p-1$  normale a  $P$  in  $V$ , e sia  $c'^{2q}$  ( $q=1, 2, \dots, v-p$ ) la  $2q$ -esima classe caratteristica di coomologia di  $\mathfrak{B}'$  nel senso di Chern ([4], n. 41.3, pp. 210-211). Vogliamo dimostrare che, essendo  $C_{2p-2q} = c'^{2q} \cap P$  la classe di omologia duale di  $c'^{2q}$  in  $P$ , risulta

$$(4) \quad C_{2p-2q} = \tilde{P}_{V,q} \quad (q=1, 2, \dots, p).$$

Supponiamo dapprima che  $P$  sia un'ipersuperficie irriducibile, non singolare, di  $V$  ( $p=v-1$ ). In tal caso si ha ([3], n. 22, p. 37).

$$\tilde{P}_{V,1} = (P \cdot P)_V, \quad \tilde{P}_{V,i} = 0 \quad ; \quad \text{per } i \geq 2.$$

(3) Questa relazione, strettamente analoga alla (5) di [1], può ottenersi sulla base della (1) di [5], con un ragionamento simile a quello esposto da Chern a pp. 585-586 di [1]. In tale relazione abbiamo indicato con lo stesso simbolo  $u$  la classe di  $H^i(A')$  corrispondente all'elemento  $u \in H^i(A, B)$ , precedentemente considerato, nell'isomorfismo canonico  $H^i(A') \longleftrightarrow H^i(A, B)$ .



D'altra parte la seconda classe caratteristica di Chern,  $c'^2$ , di  $\mathcal{B}'$  coincide con la seconda classe caratteristica di Whitney della struttura sferica orientabile *corrispondente* a  $\mathcal{B}'$  ([4], n. 41.8, p. 212), cioè della 1-struttura sferica orientabile determinata dai vettori reali normali a  $P$  in  $V$ . Tenendo conto del modo di operare della rappresentazione fibrata  $f: A \rightarrow M$  (considerata nel n. 1) su  $M \subset A$ , dalle (1) e (2), avuto riguardo alla (3), segue agevolmente l'asserto <sup>(4)</sup>.

3. Dimostrato l'asserto per  $v - p = 1$ , nel caso  $v - p > 1$  procederemo per induzione completa supponendo di aver provato la (4) per tutti gli interi positivi minori di  $v - p$ .

Sia  ${}_1V$  un'ipersuperficie irriducibile, non singolare, di  $V$ , passante per  $P$ . In virtù dell'ammessa induzione, la (4) risulta dimostrata per la successione  $\{\tilde{P}_{{}_1V}\}$ , inversa della successione covariante d'immersione di  $P$  in  ${}_1V$ , e per le classi caratteristiche di coomologia  ${}_1c'^{2r}$  ( $r = 1, 2, \dots, v - p - 1$ ) della struttura sferica unitaria,  ${}_1\mathcal{B}'$ , a  $2v - 2p - 3$  dimensioni, normale a  $P$  in  ${}_1V$ . Inoltre, in base al numero precedente, la (4) risulta dimostrata per la successione

$$\{{}_1\tilde{V}_V\} = {}_1V, ({}_1V \cdot {}_1V)_V, 0, \dots,$$

e per la seconda classe caratteristica  $c'^2$  della struttura sferica unitaria ad una dimensione,  $\mathcal{B}'$ , normale a  ${}_1V$  in  $V$ .

A norma del *teorema dell'appartenenza* ([3], n. 18, pp. 32-33), si ha che

$$\{P_V\} = (\{P_{{}_1V}\} \cdot \{{}_1V_V\})_{{}_1V},$$

ossia ([3], n. 8, pp. 17-19)

$$\{\tilde{P}_V\} = (\{\tilde{P}_{{}_1V}\} \cdot \{{}_1\tilde{V}_V\})_{{}_1V};$$

cioè ([3], n. 8 a), p. 10), posto

$$(5) \quad {}_1\tilde{V}'_{V,1} = ({}_1\tilde{V}_{V,1} \cdot P)_{{}_1V},$$

e

$$\{{}_1\tilde{V}'_V\} = P, {}_1\tilde{V}'_{V,1}, 0, \dots,$$

si ha che

$$(6) \quad \{\tilde{P}_V\} = (\{\tilde{P}_{{}_1V}\} \cdot \{{}_1\tilde{V}'_V\})_P.$$

(4) L'argomentazione testé accennata presenta interesse anche nel caso delle varietà  $M$  e  $V$  considerate nel n. 1; contiamo tornare su essa e sulle considerazioni del n. 1, con maggiori dettagli, in altro lavoro. Cfr. la nota aggiunta, durante la correzione delle bozze di stampa, alla fine del presente lavoro.

Introducendo i polinomi formali

$$\begin{aligned} [\{\tilde{P}_V\}, x] &= P + \tilde{P}_{V,1}x + \tilde{P}_{V,2}x^2 + \cdots + \tilde{P}_{V,v-p}x^{v-p}, \\ [\{\tilde{P}_{1V}\}, x] &= P + \tilde{P}_{1V,1}x + \tilde{P}_{1V,2}x^2 + \cdots + \tilde{P}_{1V,v-p-1}x^{v-p-1}, \\ [\{{}_1\tilde{V}_V\}, x] &= P + {}_1\tilde{V}_{V,1}x, \end{aligned}$$

la (6) diviene

$$(7) \quad [\{\tilde{P}_V\}, x] = [\{\tilde{P}_{1V}\}, x] \cdot [\{{}_1\tilde{V}_V\}, x],$$

il prodotto essendo eseguito in  $P$ .

Sia  $\gamma^2$  un cociclo della classe  $'c'^2$  di  $'\mathcal{B}'$ . Si riconosce facilmente che la restrizione  $\gamma^2|P$  di  $\gamma^2$  ad un sottocomplesso chiuso ricoprente  $P$ , è un cociclo della classe caratteristica  ${}_2c'^2$  della struttura sferica unitaria  ${}_2'\mathcal{B}' = '\mathcal{B}'|P$  porzione di  $'\mathcal{B}'$  su  $P$  ([4], n. 2.5, pp. 9-10) <sup>(5)</sup>. Pertanto, se  ${}_2C_{2p-2}$  è la classe di omologia duale di  ${}_2c'^2$  nella varietà chiusa  $P$ , risulta manifestamente

$${}_2C_{2p-2} = {}_2c'^2 \cap P = 'c'^2 \cap P,$$

onde, dal numero precedente e dalla (5) segue che

$$(8) \quad {}_2C_{2p-2} = {}_1V_{V,1}.$$

Introduciamo ora i polinomi caratteristici delle strutture  $\mathcal{B}'$ ,  ${}_1\mathcal{B}'$  e  ${}_2\mathcal{B}'$ :

$$\begin{aligned} [c', x] &= c'^0 + c'^2x + c'^4x^2 + \cdots + c'^{2v-2p}x^{v-p}, \\ [{}_1c', x] &= {}_1c'^0 + {}_1c'^2x + {}_1c'^4x^2 + \cdots + {}_1c'^{2v-2p-2}x^{v-p-1}, \\ [{}_2c', x] &= {}_2c'^0 + {}_2c'^2x, \end{aligned}$$

ove  $c'^0$ ,  ${}_1c'^0$  e  ${}_2c'^0$  indicano l'unità del gruppo di coomologia  $H^0(P)$ , ed osserviamo che la struttura  $\mathcal{B}'$  è il *prodotto* delle due strutture  ${}_1\mathcal{B}'$  e  ${}_2\mathcal{B}'$  ([4], n. 38.13, p. 198; [8], cap. V, § 2, p. 85). Pertanto, a norma del *teorema di dualità* ([1], Teor. 4, p. 570; [8], teor. 15, p. 85), risulta

$$(9) \quad [c', x] = [{}_1c', x] \cdot [{}_2c', x],$$

i prodotti essendo dei cup-products definiti dal prodotto fra interi.

(5) Questo fatto può essere stabilito ricorrendo al lemma 32.7 di [4] (pp. 168-169). Riferendoci alle notazioni ivi introdotte e supponendo per semplicità che  $L = L' = 0$ , si ha che, se  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'|K$ , se cioè  $\mathcal{B}$  è la porzione di  $\mathcal{B}'$  sul sottocomplesso chiuso,  $K$ , di  $K'$ , la rappresentazione  $k: \mathcal{B}(\pi_q) \rightarrow \mathcal{B}'(\pi_q)$  non è altro che l'inclusione di  $\mathcal{B}(\pi_q)$  in  $\mathcal{B}'(\pi_q): \mathcal{B}(\pi_q) = \mathcal{B}'(\pi_q)|K$ , e l'omomorfismo

$$h^{\parallel}: C^{q+1}(K', \mathcal{B}'(\pi_q)) \rightarrow C^{q+1}(K, \mathcal{B}(\pi_q))$$

è indotto dall'immersione di  $K$  in  $K'$ . Risulta pertanto che

$$c(f) = h^{\parallel}c(f') = c(f')|K,$$

cioè che  $c(f)$  è la restrizione di  $c(f')$  a  $K$ .

La (4) risulta completamente dimostrata qualora si confrontino la (7) e la (9), tenendo conto della (8) ed avuto riguardo all'induzione ammessa.

4. Supponiamo che  $P$  sia la varietà diagonale nel prodotto  $V \times V$ , e sia  $\Omega$  la trasformazione birazionale biregolare  $P \rightarrow V$ . Essendo  $V_1^*, V_2^*, \dots, V_v^*$  i sistemi canonici di dimensione  $v-1, v-2, \dots, 0$ , di  $V$ , ed essendo  $\{\tilde{V}\} = \tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \dots$  la successione dei sistemi di equivalenza di  $V$ , trasformata mediante  $\Omega$  della inversa della successione covariante d'immersione di  $P$  in  $V \times V$ , B. Segre ha dimostrato ([3], n. 66, p. 91, e nn. 87-89, pp. 113-114) che

$$\tilde{V}_i^* = (-1)^i \tilde{V}_i \quad (i = 1, 2, \dots, v).$$

Poiché, come si riconosce facilmente, la struttura sferica tangente a  $V$  è isomorfa alla struttura sferica unitaria normale a  $P$  in  $V \times V$ , dalla (4) segue che *la classe di omologia di dimensione  $2v-2$  determinata in  $V$  da  $(-1)^i V_i^*$  coincide con la classe caratteristica di omologia di Chern di egual dimensione della struttura sferica unitaria tangente a  $V$ .*

ADDENDUM. - Correggendo le bozze di stampa, avvertiamo che il risultato del n. 2, secondo cui, se  $P$  è un'ipersuperficie irriducibile, non singolare, di  $V$  ( $p = v-1$ ), si ha che  $C_{2p-2} = (P \cdot P)_V$  in  $P$ , è stato ottenuto da S. S. Chern, *indipendentemente dalle considerazioni svolte nel n. 1*, con un'argomentazione esposta nel caso  $v=3$ , ma valida per  $v > 1$  qualunque, in K. KODAIRA, *The theorem of Riemann-Roch for adjoint systems on 3-dimensional algebraic varieties*. («Ann. of Math.», (2) 56 (1952), 298-342), pp. 319-320.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] S. S. CHERN, *On the characteristic classes of complex sphere bundles and algebraic varieties*. «Am. Journ. of Math.», LXXV, 565-597 (1953).
- [2] W. V. D. HODGE, *The characteristic classes on algebraic varieties*. «Proc. London Math. Soc.», (3), I, 138-151 (1951).
- [3] B. SEGRE, *Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche*. «Ann. di Mat.», (4), XXXV, 1-128 (1953).
- [4] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*. Princeton, 1951.
- [5] R. THOM, *Classes caractéristiques et i-carrés*. «C. R. Acad. Sc. Paris», 230, 427-429 (1950).
- [6] R. THOM, *Variétés plongées et i-carrés*. «C. R. Acad. Sc. Paris», 230, 507-508 (1950).
- [7] H. WHITNEY, *On the topology of differentiable manifolds*. Lectures in topology, Univ. of Mich. Press, 1941.
- [8] WU WEN-TSUN, *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques*. «Publ. de l'Inst. de Math. de l'Université de Strasbourg», XI (Hermann et Cie., Paris, 1952).

**Geometria.** — *Sopra una proprietà caratteristica delle curve algebriche appartenenti ad una quadrica.* Nota di ERMANN0 MARCHIONNA, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

1. Recentemente il prof. Beniamino Segre ha assegnato una notevole proprietà di geometria differenziale riguardante le quadriche, e ne ha tratto come corollario la seguente proposizione, di carattere essenzialmente algebrico:

*Le curve algebriche d'ordine  $n \geq 6$  tracciate su una quadrica sono le curve algebriche sghembe che ammettono  $\infty^3$  coniche 6-secanti <sup>(1)</sup>.*

Ora penso che di questo risultato possa interessare una dimostrazione ugualmente algebrica; e qui appunto presento una tale dimostrazione.

Trovo tra l'altro che, per decidere dell'appartenenza ad una quadrica di una curva  $\Gamma$  (d'ordine  $n > 6$ ), non è necessario verificare che 6 punti di ognuna delle  $\infty^3$  sezioni piane di  $\Gamma$  giacciono su una conica. Sussiste infatti il

**TEOREMA:** *Una curva gobba irriducibile  $\Gamma$  (d'ordine  $n > 6$ ) appartiene ad una quadrica se ognuno degli  $\infty^2$  gruppi ottenuti tagliando  $\Gamma$  con i piani di una stella (il cui centro non appartenga alla rigata delle trisecanti e non sia vertice di un cono di bisecanti la curva) possiede sei punti su una conica.*

2. Stabiliamo dapprima il

**LEMMA 1:** *Una curva gobba irriducibile  $\Gamma$  d'ordine  $n \geq 6$ , i cui gruppi piani giacciono su una conica, appartiene ad una quadrica.* Osserviamo innanzitutto che fra le  $\infty^3$  coniche contenenti i gruppi piani di  $\Gamma$  vi sono almeno  $\infty^2$  coniche spezzate,  $\varphi$ ; pertanto una (od ognuna) delle due rette che compongono una  $\varphi$  è almeno trisecante la curva  $\Gamma$ . Notiamo anche che le coniche spezzate  $\varphi$  sono soltanto  $\infty^2$  e non  $\infty^3$  (infatti i piani passanti per le trisecanti sono  $\infty^2$ ).

Consideriamo ora la rigata  $\Phi$  delle rette che sono almeno trisecanti la  $\Gamma$  <sup>(2)</sup> ed indichiamo con  $F$  una qualsiasi delle componenti di  $\Phi$  (tali componenti sono naturalmente in numero finito <sup>(3)</sup>):  $F$  contiene ovviamente la curva  $\Gamma$ .

Orbene noi dimostreremo che  $F$  è una quadrica, e con ciò risulterà provato non solo il nostro lemma, ma anche che  $F$  è l'unica componente della superficie  $\Phi$  (infatti, se  $\Gamma$  appartiene ad una quadrica  $Q$ , qualsiasi trisecante di  $\Gamma$  giace su  $Q$ ).

(\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) Cfr. B. SEGRE, *Una proprietà caratteristica in grande delle curve giacenti su una quadrica.* « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. XII, fasc. 4, 1952.

(2) L'esistenza della rigata delle trisecanti per una curva gobba d'ordine  $n > 4$  è d'altronde un fatto ben noto, cfr. ad esempio ENRIQUES e CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. II, p. 301.

(3) La rigata delle trisecanti di una curva gobba può essere spezzata: si pensi, ad esempio, ad una curva intersezione di due generici coni del terz'ordine.



Dimostriamo dapprima che, *se la  $F$  è un cono, essa è necessariamente un cono quadrico.*

Osserviamo per questo che il piano  $\alpha$  di due generiche generatrici  $a$  e  $b$  del cono  $F$  taglia  $\Gamma$  secondo un gruppo  $G$  appartenente ad una conica  $\varphi$ , che è necessariamente spezzata nelle due rette  $a$  e  $b$  (avendo in comune con ognuna di esse almeno tre punti di  $\Gamma$ ).

Il piano  $\alpha$  non contiene una terza generatrice di  $F$ , in quanto su tale retta verrebbero a giacere altri punti del gruppo  $G$  (contro l'ipotesi che  $G$  appartenga per intero alla conica  $\varphi$ ).

Si conclude che l'ordine del cono  $F$  è uguale a 2.

*Supponiamo ora che fra le componenti  $F$  della rigata  $\Phi$  non vi sia nessun cono.*

Esaminiamo dapprima il caso in cui le generatrici di una  $F$  abbiano meno di  $n - 2$  punti d'appoggio con  $\Gamma$ .

Dimostriamo che, presa su  $F$  una generica generatrice  $g$ , da ogni punto di  $g$  esce un'altra retta che è almeno trisecante la curva  $\Gamma$  e giace su  $F$ .

A tale scopo si consideri un piano  $\alpha$  variabile passante per  $g$ : esso taglia  $\Gamma$  secondo un gruppo  $G$  giacente su una conica, che è ovviamente spezzata nella  $g$  ed in un'altra retta  $g'$  anch'essa (almeno) trisecante  $\Gamma$ .

La  $g'$  incontra  $g$  in un punto  $P$  variabile con  $\alpha$  (altrimenti essa individuierebbe un cono, contro l'ipotesi che nessuna componente della rigata  $\Phi$  sia un cono) e descrive una componente  $F'$  della superficie  $\Phi$ , *a priori* diversa da  $F$ , ma avente in comune con  $F$  la retta  $g$ . Al variare con continuità della  $g$  sopra  $F$ , la superficie  $F'$  non può variare, perché le componenti della  $\Phi$  sono in numero finito. Se ne deduce che  $F'$  ha in comune con  $F$  le  $\infty^1$  rette  $g$ , cioè coincide con  $F$ . Concludendo, da ogni punto di una qualsiasi generatrice  $g$  di  $F$  esce un'altra generatrice  $g'$  della  $F$ . Questo basta, come è ben noto, per affermare che la rigata  $F$  è una quadrica.

Esaminiamo ora il caso in cui la generica generatrice di  $F$  abbia  $h \geq n - 2$  punti d'appoggio con  $\Gamma$ .

Allora la quadrica  $Q$  individuata da tre generatrici di  $F$  sghembe fra loro (ed effettivamente esistenti perché  $F$  non è un cono) ha almeno  $3h \geq 3n - 6$  intersezioni con  $\Gamma$ . Con ciò si può affermare che la quadrica  $Q$  contiene  $\Gamma$ , escluso per ora il caso  $n = 6$ ,  $h = 4$  (poiché soltanto in questo caso non si ha  $3h > 2n$ ).

Resta così da esaminare l'ipotesi che  $\Gamma$  sia una sestica e possieda una rigata  $F$  di quadrisecanti.

Osserviamo innanzitutto che vi è almeno una superficie cubica  $\Psi$  passante per la sestica. La  $\Psi$  contiene la rigata  $F$  delle quadrisecanti, in quanto ogni quadrisecante ha in comune con  $\Psi$  4 punti della curva  $\Gamma$ ; inoltre  $\Psi$  è certamente spezzata in un piano ed in una quadrica  $Q$  contenente la curva gobba  $\Gamma$  (per cui  $Q$  risulta irriducibile). Infatti, se  $\Psi$  fosse una rigata cubica

irriducibile, da un punto della sua retta doppia <sup>(4)</sup> dovrebbero uscire due quadrisecanti di  $\Gamma$ ; queste individuerrebbero un piano avente con la sestica più di 6 intersezioni, il che è manifestamente assurdo.

Il Lemma rimane così completamente dimostrato.

3. Dimostriamo ora il

LEMMA 2: *Sia  $\Gamma$  una curva gobba irriducibile d'ordine  $n > 6$ . Se ognuno dei gruppi  $G$  ottenuti tagliando  $\Gamma$  con i piani di un (generico) fascio possiede 6 punti su una conica  $\varphi$ , tutti gli altri punti di  $G$  giacciono sulla stessa  $\varphi$ .*

Osserviamo innanzitutto che gli  $n$  punti comuni alla curva  $\Gamma$  e ad un piano  $\alpha$  del fascio considerato corrispondono alle determinazioni di una funzione algebrica ad  $n$  valori

$$P = f(\lambda),$$

ove  $\lambda$  è il parametro che individua il piano  $\alpha$  nel fascio.

Il gruppo di monodromia di tale funzione possiede certamente uno scambio (in quanto fra i piani  $\alpha$  ve n'è qualcuno che ha con  $\Gamma$  esattamente un contatto semplice), ed è pertanto il gruppo totale su  $n$  elementi oppure un gruppo imprimitivo. Quest'ultima circostanza però si esclude, poichè la  $g_n^1$  segata su  $\Gamma$  da un generico fascio di piani non è composta <sup>(5)</sup>.

Supponiamo ora che 6 punti  $P_1, \dots, P_5, P_6$  appartenenti ad un gruppo  $G$  segato su  $\Gamma$  da un certo piano  $\alpha$  giacciono su una conica  $\varphi$  (che sarà irriducibile per il piano generico del fascio).

Vogliamo verificare che – nell'ipotesi che la stessa proprietà valga per tutti i piani del fascio – ogni altro punto di  $G$  (diciamolo  $P_7$ ) sta sulla conica  $\varphi$ .

A tale scopo consideriamo nel piano della variabile complessa  $\lambda$  un cammino chiuso  $\gamma$  per il quale le determinazioni  $P_1, \dots, P_5, P_6, P_7, \dots, P_n$  di  $f(\lambda)$  subiscano lo scambio  $P_6 P_7$  (cioè in particolare  $P_1, \dots, P_5$  ritornino in sé). Tale cammino esiste certamente, in quanto il gruppo di monodromia della funzione  $f(\lambda)$  è il gruppo totale.

In corrispondenza al suddetto cammino  $\gamma$ , la conica  $\varphi$  – su cui giacciono  $P_1, \dots, P_5, P_6$  – torna in sé (per il fatto che i primi cinque punti ritornano in sé). Quindi su tale conica viene a giacere anche il punto  $P_7$  (che si scambia con  $P_6$  nella sostituzione sulle determinazioni di  $f(\lambda)$  legata al cammino  $\gamma$ ).

(4) Più precisamente nodale (cfr. ad esempio F. CONFORTO, *Le superficie razionali*, p. 62) perché  $\Psi$ , cioè  $F$ , per ipotesi non è un cono (ma qui la cosa non è essenziale).

(5) La cosa è da ritenersi nota, almeno per il caso delle curve piane, al quale ovviamente si riduce.

Del resto il fatto che la  $g_n^1$  segata su una curva piana da un generico fascio di rette non sia composta con una  $\gamma_r^1$  (variabile con continuità) risulta dall'osservazione che – nella ipotesi opposta – la  $g_n^1$  dovrebbe restare composta mediante una  $\gamma_r^1$  anche quando il centro del fascio cade in un punto generico della curva (cosa visibilmente assurda).

4. Ciò premesso, è immediata la dimostrazione del teorema del prof. Segre citato nel n. 1.

Se ognuno degli  $\infty^3$  gruppi piani  $G$  di una curva gobba irriducibile  $\Gamma$  di ordine  $n > 6$  ha 6 punti su una conica, dal lemma 2 segue che ciascun gruppo  $G$  giace per intero sopra una conica, e dal lemma 1 si deduce che  $\Gamma$  appartiene ad una quadrica.

5. Il criterio d'appartenenza di  $\Gamma$  ad una quadrica dato dal lemma 1 può venire ampliato, nel modo specificato dal

LEMMA 3: *Una curva gobba irriducibile  $\Gamma$  d'ordine  $n > 6$  appartiene ad una quadrica, se ognuno degli  $\infty^2$  gruppi ottenuti tagliando  $\Gamma$  con i piani di una stella (per il cui centro  $O$  passino almeno 3 corde di  $\Gamma$  semplici e non complanari) appartiene ad una conica.*

Consideriamo tre corde  $a, b, c$  della  $\Gamma$  che passino per  $O$  e non appartengano allo stesso piano, ed indichiamo con  $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$  i loro rispettivi punti d'appoggio con  $\Gamma$ .

I piani  $bc, ac, ab$  tagliano  $\Gamma$  secondo tre gruppi  $G_\alpha, G_\beta, G_\gamma$  appartenenti rispettivamente a tre coniche  $\alpha, \beta, \gamma$  (si noti che  $\alpha$  passa per  $B_1 B_2, C_1 C_2$ ;  $\beta$  passa per  $A_1 A_2, C_1 C_2$ ;  $\gamma$  passa per  $A_1 A_2, B_1 B_2$ ).

Si considerino poi tre punti generici  $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$  appartenenti rispettivamente alle coniche  $\alpha, \beta, \gamma$ .

La quadrica  $Q$  individuata dai punti  $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2, P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$  passa per le tre coniche considerate (in quanto ha in comune con ciascuna di esse 5 punti) e contiene così i tre gruppi  $G_\alpha, G_\beta, G_\gamma$ , e quindi in tutto almeno  $3n - 6$  punti di  $\Gamma$ . (Si ricordi per questo che  $G_\alpha$  e  $G_\beta$ , hanno in comune  $C_1, C_2$ , ecc.).

Si conclude che per  $n > 6$  la quadrica  $Q$  ha più di  $2n$  intersezioni con  $\Gamma$ , e pertanto contiene  $\Gamma$  per intero.

*Osservazione 1.* - La dimostrazione suesposta mette in luce che, per decidere l'appartenenza di  $\Gamma$  ad una quadrica, basta verificare che i piani di 3 corde della  $\Gamma$  (passanti per un medesimo punto e non complanari) tagliano  $\Gamma$  secondo gruppi giacenti su di una conica.

*Osservazione 2.* - In una qualsiasi stella, che abbia per centro un punto  $O$  non appartenente alla rigata delle trisecanti di  $\Gamma$ , esistono tre corde di  $\Gamma$  semplici e non complanari.

Infatti una proiezione piana di  $\Gamma$  eseguita da un siffatto centro  $O$  possiede almeno  $n - 2$  punti doppi apparenti<sup>(6)</sup>, manifestamente non tutti allineati (data l'irriducibilità di  $\Gamma$ ).

6. Veniamo infine alla dimostrazione del teorema enunciato al termine del n. 1.

(6) Cfr. ENRIQUES e CHISINI, loc. cit., vol. II, p. 138.

Supponiamo dunque che i piani di una stella — il cui centro  $O$  non appartenga alla rigata delle rette trisecanti  $\Gamma$  e non sia vertice di un cono di bisecanti — taglino  $\Gamma$  secondo gruppi  $G$  aventi ognuno 6 punti su una conica, e proviamo che la curva  $\Gamma$  appartiene ad una quadrica.

Poiché  $O$  non è vertice di un cono di bisecanti, una proiezione piana di  $\Gamma$  — eseguita da  $O$  — è semplice, e quindi la  $g_n^1$  tagliata su  $\Gamma$  da un generico fascio di piani della stella non è composta (vedi la nota (5) del paragrafo 4). Segue allora, dal lemma 2, che ognuno dei gruppi  $G$  giace per intero su una conica.

Infine — essendo  $O$  esterno alla rigata delle trisecanti — dal lemma 3 si deduce che  $\Gamma$  appartiene ad una quadrica.

**Geometria algebrica.** — *Surfaces algébriques à système canonique dégénéré.* Nota di POL BURNIAT, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

I. Si  $F_i$  est une surface algébrique irréductible dotée d'une involution  $I$  identique à une surface  $F$ , convenons de désigner par  $X^i$  l'être de  $F_i$  composé avec  $I$ , qui possède l'image  $X$  sur  $F$ .

Etablissons rapidement quelques points de la théorie des surfaces quadruples abéliennes. Commençons par un rappel.

I. Prenons  $F_i = F_0$  et  $I$  d'ordre 2. La surface  $F_0$  correspond à un champ de rationalité  $\{x, \sqrt[2]{f(x)}\}$ , si  $f(x)$  est un polynome convenable d'ordre pair  $2n$  d'un point  $x$  de  $F$ .

Soit  $E + 2A$  la courbe des zéros de  $f(x)$  sur  $F$ , la courbe  $E$  étant supposée dénuée de composantes multiples.  $E$  est la courbe de diramation effective d'une surface double  $2F(E)$  birationnellement identique à  $F_0$ , ce que nous noterons  $F_0 = 2F(E)$ . La courbe des points unis de  $I$  sur  $F$  satisfait à la relation  $2U = E^\circ$ .

Soit  $c$  la section hyperplane de l'infini de  $F$ . Les fonctions  $f(x)$  et  $\sqrt[2]{f(x)}$  sont rationnelles sur  $F$  et  $F_0$  respectivement. Elles induisent sur ces surfaces les équivalences linéaires  $E + 2A \equiv 2nc$  et  $U + A^\circ \equiv nc^\circ$  ou

$$E \equiv 2(nc - A) \text{ et } U \equiv (nc - A)^\circ.$$

Il s'ensuit que toute courbe  $e \equiv nc - A$  de  $F$  donne lieu aux relations

$$2e \equiv E, \quad e^\circ \equiv U.$$

Nous dirons  $e$  moitié (linéaire) de  $E$  pour  $F_0$ .

II. Prenons  $F_0$  dotée d'une involution  $I_0$  d'ordre 4, abélienne, composée avec trois involutions  $I_r$  d'ordre 2,  $r = 1, 2, 3$ , deux à deux permutable, identiques respectivement à des surfaces  $F_r$ . Soit  $F$  une surface image de  $I_0$ .

(\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.



La courbe  $U_r$  des points unis de  $I_r$  est composée avec  $I_s$  et  $I_t$ ,  $r \neq s \neq t = 1, 2, 3$ . La courbe  $2 U_r$  est donc composée avec  $I_0$ . Soit  $E_r$  son image sur  $F$ . Nous avons  $E_r^\circ = 2 U_r$ .

L'involution  $I_0$  induit sur  $F_1$  une involution  $I_1^*$  d'ordre 2 identique à  $F$ . La courbe des points unis de  $I_1^*$  est l'image  $U_2^* + U_3^*$  sur  $F_1$  de la courbe  $U_2 + U_3$  de  $F_0$ . Comme  $E_r^\circ = 2 U_r$ , on a  $2 U_2^* = E_2^i$ ,  $2 U_3^* = E_3^i$  et  $F_1$  est birationnellement une surface double  $2 F (E_2 + E_3)$  dotée de la courbe de diramation effective  $E_2 + E_3$ . Plus généralement,  $F_r$  est birationnellement une surface double  $2 F (E_s + E_t)$ ,  $r \neq s \neq t$ . Nous noterons  $e_r$  une moitié de  $E_s + E_t$  pour  $F_r$ .

$F_0$  est évidemment une surface double  $2 F_1 (E_1^i)$  et la courbe  $U_1$  de la surface quadruple  $4 F = F_0$  coïncide avec la courbe  $E_1^i$  de la surface double  $F_1 = 2 F (E_2 + E_3)$ . Nous écrirons parfois  $U_1 = E_1^i$ .

III. Les courbes  $U_r$  ne sont pas composées avec  $I_0$ , mais  $U_s + U_t \equiv e_r^\circ$ .

D'autre part, avec  $|k_0|$  et  $|k|$  systèmes canoniques impurs virtuels de  $F_0$  et  $F$ , on a, d'après un théorème classique d'Enriques-Castelnuovo <sup>(1)</sup>,  $k_0 \equiv k^\circ + \Sigma U_r$ .

Partant de là, compte tenu de ce qui précède, on peut écrire

$$k_0 \equiv k^\circ + U_1 + U_2 + U_3 \equiv U_r + (k + e_r)^\circ \equiv U_r + (e_r')^\circ$$

et le système canonique impur  $|k_0|$  de  $F_0$  est la combinaison linéaire de ceux des systèmes linéaires de courbes

$$U_1 + U_2 + U_3 + |k|^\circ \text{ et } U_r + |e_r'|^\circ, \quad r = 1, 2, 3,$$

qui sont effectifs.

IV.  $U_s + U_t$  n'est pas courbe composée avec  $I_0$  mais  $U_s + 2 U_r + U_t \equiv (e_s + e_t)^\circ$ .

De là

$$2 k_0 \equiv 2 k^\circ + 2 (U_1 + U_2 + U_3) \equiv (2 k + e_1 + e_2 + e_3)^\circ \equiv U_s + U_k + (2 k + e_s + e_k)^\circ \equiv [(e_1 + e_2 + e_3)']^\circ \equiv U_s + U_k + [(e_s + e_t)']^\circ.$$

et, par suite, le système bicanonique de  $F_0$  est la combinaison linéaire de ceux des systèmes linéaires de courbes

$$|(e_1 + e_2 + e_3)'|^\circ \text{ et } U_s + U_k + |(e_s + e_t)''|^\circ, \quad t \neq s = 1, 2, 3,$$

qui sont effectifs.

2. Il y a lieu de ne pas perdre de vue que les courbes  $E_r$  doivent être entendues dans leurs sens birationnel sur  $F$ . En particulier, considérant que les courbes  $E_s + E_t$  sont de diramation pour les plans doubles  $2 F (E_s + E_t)$ ,

(1) *Ricerche di geometria sulle superfici algebriche*. « Mem. della Acc. di Torino » 1893. Voir aussi F. SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*. « Rend. Ist. Lombardo », pp. 95-511 (1903).

on notera qu'un point multiple d'ordre impair pour  $E_r$  seulement ou pour  $E_s$  et  $E_t$  seulement, est, entendu comme courbe exceptionnelle de première espèce, birationnellement composante de  $E_r$ .

Il est clair qu'un point générique de  $E_r$  correspond à deux points de  $F_0$ .

3. Examinons d'abord le plan quadruple abélien <sup>(2)</sup>  $F_0 = 4 F(E_1, E_2, E_3)$  doté des courbes de diramation

$$E_1 = C_2, \quad E_2 = C_4(A^4), \quad E_3 = C_{2r+2}(O^{2r+2}), \quad r \geq 3,$$

la notation  $C_n(\sum_i B_i^{m_i})$  représentant une courbe d'ordre  $n$  de  $F$ , dotée des points base  $m_i$ -uples assignés  $B_i$ .

Ces courbes  $E_r$ , (n. I, II), donnent lieu aux courbes moitiés de  $E_s + E_t$  pour  $F_r$ ,  $r = 1, 2, 3$ ,

$$(2) \quad e_1 \equiv C_{r+3}(O^{r+1} + A^2), \quad e_2 \equiv C_{r+2}(O^{r+1}), \quad e_3 \equiv C_3(A^2).$$

Les systèmes  $|k|$ ,  $|e'_1|$ ,  $|e'_3|$  sont manquants. Le système canonique  $k_0$  de  $F_0$  se réduit donc, (n. I, III), au système (car  $U_1 = E_1^1$ , n. I, II)

$$|k_0| = U_1 + |e'_1|^0 = C_2^1 + |C_r(O^r + A)|^0 = C_2^1 + C_1^0(O + A) + \\ + |(r-1)C_1(O)|^0.$$

et, par suite,  $F_0$  possède le genre géométrique  $p_g = r$ . De plus, la droite quadruple  $4C_1(O)$  porte  $2C_1(O) \cdot (E_1 + E_2 + E_3) = 12$  points de diramation. La courbe  $C_1^0(O)$  a donc le genre 3 et  $|k_0|$ , dans sa partie variable, est composé avec les courbes de genre 3 du faisceau linéaire  $|C_1(O)|^0$ .

On vérifie que  $C_2 \cdot (E_2 + E_3) = 4r + 12$ , que  $C_1(O + A) \cdot (E_1 + E_2 + E_3) = 2$ . Par suite, la courbe  $U_1 = E_1^1 = C_2^1$  de la surface  $F_1 = 2 F(E_2 + E_3)$  et la courbe  $C_1^0(O + A)$  de la surface  $F_0$  ont les genres virtuels respectifs  $2r + 5$  et  $-1$ .

D'autre part, sur  $F_0$  on a

$$U_1 \cdot C_1^0(O + A) = 2C_2 \cdot C_1(O + A) = 4, \quad U_1 \cdot C_1^0(O) = 2C_2 \cdot C_1(O) = 4,$$

et, d'après une formule classique de Noether, la courbe générique  $k_0 \equiv U_1 + C_1^0(O + A) + (r-1)C_1^0(O)$  possède le genre virtuel (genre linéaire de  $F_0$ )

$$p^{(1)} = (2r + 4) + (-1 - 1) + (r-1)(3-1) + 4 + 4(r-1) + 1 = \\ = 8r + 1 = 8p_g + 1.$$

A partir des (2), on constate encore que le système  $|(e_1 + e_2)''|$  n'est pas effectif. Le système  $|2k_0|$  se réduit donc, (n. I, IV), à la combinaison linéaire des systèmes de courbes dont les parties variables ont, sur  $F$ , les images  $|(e_1 + e_2 + e_3)''|$ ,  $|(e_1 + e_3)''|$ ,  $|(e_2 + e_3)''|$  qui, d'après les (2), s'écrivent

$$|C_{2r+2}(O^{2r} + A^2)|, \quad |C_r(O^{r-1} + A^2)|, \quad |C_{r-1}(O^{r-1})|.$$

(2) Pour les plans quadruples, voir par exemple, LIBOIS, *Sur une classe de plans quadruples*, thèse d'agrégation, 1935, Bruxelles.

Ces systèmes possédant les dimensions respectives  $6r + 2$ ,  $2r - 3$  et  $r - 1$ , le système bicanonique  $|2k_0|$  de  $F_0$  possède lui-même la dimension

$$(6r + 2) + (2r - 3) + (r - 1) + 2 = 9r = 9p_g.$$

Autant dire que  $F_0$  possède le bigenre  $P_2 = 9p_g + 1$ .

On a, avec  $a$  droite générique de  $F$ ,  $a \cdot (E_1 + E_2 + E_3) = 2r + 8$ . La courbe  $a^\circ$  a donc le genre  $2r + 5$ . Par ailleurs, en raisonnant comme au n. 1, III, on trouve que l'adjoint  $|k_0 + a^\circ|$  d'une courbe  $a^\circ$  est la combinaison linéaire de ceux des systèmes de courbes  $U_r + |e'_r + a|^\circ$ ,  $r = 1, 2, 3$ , qui sont effectifs. Les images des parties variables de ces systèmes

$$|C_{r+1}(O^r + A)|, \quad |C_r(O^r)|, \quad |C_1(A)|$$

sont  $\infty^{2r+1}$ ,  $\infty^r$  et  $\infty^1$ . L'adjoint de  $a^\circ$  est donc  $\infty^{3r+4}$  et découpe sur  $a^\circ$  une série linéaire de dimension  $3r + 4 - p_g = 2r + 4$ , c'est-à-dire la série canonique complète. En vertu d'un théorème bien connu de Picard,  $F_0$  est régulière et son genre arithmétique vaut  $p_a = p_g = r$ .

En résumé, le plan quadruple  $F_0 = 4F$  considéré possède les genres et bigenre  $p_a = p_g = r$ ,  $p^{(1)} = 8p_g + 1$  et  $P_2 = 9p_g + 1$ . De plus, son système canonique, en dehors d'une courbe fixe formée à l'aide d'une courbe de genre  $2p_g + 5$  et d'une courbe de genre virtuel  $-1$ , est composée avec  $p_g - 1$  courbes de genre 3 variables dans un faisceau linéaire.

4. Particularisant les courbes  $E_r$ , nous pouvons, sans modifier le genre  $p_g$  de la surface  $F_0$ , abaisser les valeurs de  $p^{(1)}$  et  $P_2$ .

En effet, par l'un des 8 points simples de l'intersection  $(E_1, E_2) = [C_2, C_4(A)]$ , faisons passer l'une des droites  $C_r(O)$  composant la courbe  $E_3 = C_{2r+2}(O^{2r+2})$ . Les courbes de diramation de la surface quadruple  $4F = F_0$  deviennent, si  $M$  désigne ce point,

$$E_1 = C_2(M), \quad E_2 = C_4(A^4 + M), \quad E_3 = C_{2r+2}(O^{2r+2} + M).$$

De ce fait, les nouvelles courbes  $e_r$  sont celles qui ont été obtenues plus haut mais avec point-base simple assigné en  $M$ . Ce point devient triple pour la courbe  $e_1 + e_2 + e_3$  et double seulement pour les courbes  $e_r + e_s$ . Par conséquent, les nouveaux systèmes  $|e'_r|$  restent inchangés, de même que les nouveaux systèmes  $|(e_r + e_s)''|$  mais le système  $|(e_1 + e_2 + e_3)''|$  acquiert un point-base simple en  $M$  et voit sa dimension diminuer d'une unité. Le bigenre de la nouvelle surface  $F_0$  subit évidemment la même diminution.

On voit en même temps que le point  $M$  absorbe deux anciens points de diramation de la courbe  $C_2^1 = 2C_2$  du plan double  $2F(E_2 + E_3)$ . Le genre de  $C_2^1(M)$  diminue donc d'une unité, celui d'une courbe  $k_0$  également.

Comme  $C_2$  et  $C_4(A^4)$  ont 8 points simples en commun, on voit que: *Le plan quadruple abélien  $F_0 = 4F$  doté des courbes de diramation*

$$E_1 = C_2(M_1 + \dots + M_i), \quad E_2 = C_4(A^4 + M_1 + \dots + M_i),$$

$$E_3 = C_{2r+2}(O^{2r+2} + M_1 \dots + M_i), \quad r > 2,$$

les points  $M$  étant  $i$  des 8 points simples communs aux courbes  $E_1 = C_2$  et  $E_2 = C_4(A^4)$ , possède les genres et bigenre

$$p_a = p_g = r, \quad p^{(1)} = 8p_g - i + 1, \quad P_2 = 9p_g - i + 1, \quad 0 \leq i \leq 8.$$

Son système canonique est composé à l'aide d'une courbe fixe de genre  $2p_g + 5 - i$ , d'une courbe fixe de genre virtuel  $-1$  et de courbes de genre 3 d'un faisceau linéaire.

5. Considerons rapidement un second plan quadruple abélien  $F_0 = 4F$  doté des courbes de diramation

$$E_1 = C_2(A^2), \quad E_2 = C_4(A^2), \quad E_3 = C_{2r}(O^{2r}), \quad r > 2.$$

Nous obtenons actuellement

$$(3) \quad e_1 \equiv C_{r+2}(O^r + A), \quad e_2 \equiv C_{r+1}(O^r + A), \quad e_3 \equiv C_3(A^2) \\ |k_0| = C_2^1(A^2) + (r-1)|C_1(O)|^0.$$

La surface  $F_0$  a donc le genre  $p_g = r$ . Comme plus haut, on voit que les courbes  $C_i^0(O)$  ont le genre trois, que la courbe  $C_2^1(A^2)$ , dont le support a le genre virtuel  $-1$  et porte  $4r + 2$  points de diramation, a le genre virtuel  $2r - 1$  (autrement,  $C_2^1(A^2)$  est la somme de deux courbes disjointes de genre  $r$ ).

On a

$$U_1 \cdot C_1^0(O) = 2C_2(A^2) \cdot C_1(O) = 4.$$

Avec la formule de Noether aux genres virtuels, on trouve que les courbes  $k_0$  ont le genre

$$p^{(1)} = (2r - 2) + (r - 1)(3 - 1) + 4(r - 1) + 1 = 8r - 7 = 8p_g - 7.$$

Le système bicanonique  $2|k_0|$  de  $F_0$ , d'après les (3) et le n. 1, IV, est la combinaison linéaire de 3 systèmes de courbes dont les parties variables ont les images.

$$|C_{2r}(O^{2r-2} + A^2)|, \quad |C_{r-1}(O^{r-2} + A)|, \quad |C_{r-2}(O^{r-2} + A)|^0.$$

Celles-ci ayant les dimensions  $6r - 4$ ,  $2r - 3$  et  $r - 3$ , le bigenre  $P_2$  de  $F_0$  vaut

$$P_2 = (6r - 4) + (2r - 3) + (r - 3) + 3 = 9r - 7 = 9p_g - 7.$$

Si  $a$  est droite générique de  $F$ , la courbe  $a^0$  possède le genre  $2r + 3$ , car la droite quadruple  $4a$  de  $4F = F_0$  porte  $2a \cdot (E_1 + E_2 + E_3) = 4r + 12$  points de diramation. L'adjoint  $|k_0 + a^0|$  de  $a^0$  est la combinaison linéaire de trois systèmes de courbes (n. 3) dont les parties variables  $|e'_r + a^0|$ , à savoir  $|C_r(O^{r-1})|^0$ ,  $|C_{r-1}(O^{r-1})|^0$ ,  $|C_1(A)|^0$  sont  $\infty^{2r}$ ,  $\infty^{r-1}$  et  $\infty^1$ . Cet adjoint est  $\infty^{3r+2}$  et découpe sur  $a^0$  la série canonique complète.  $F_0$  est régulière.

Enfin, si l'on oblige  $i$  des  $2r$  droites de la courbe  $E_3 = C_{2r}(O^{2r})$  à passer par  $i$  des quatre points simples communs aux courbes  $E_1 = C_2(A^2)$  et  $E_2 =$



$= C_4(A^2)$ , on trouve, comme plus haut, que le bigenre et le genre linéaire de  $F_0$  diminuent chacun de  $i$  unités.

En somme:

*Le plan quadruple abélien  $F_0 = 4 F$  doté des courbes de diramation*

$$E_1 = C_2(A^2 + M_1 + \dots + M_i) \quad , \quad E_2 = C_4(A^2 + M_1 + \dots + M_i),$$

$$E_3 = C_{2r}(O^{2r} + M_1 + \dots + M_i) \quad , \quad r > 2,$$

*les points  $M$  étant  $i$  des quatre points simples communs aux deux courbes  $C_2(A^2)$  et  $C_4(A^2)$  est de genres et bigenre*

$$p_a = p_g = r \quad , \quad p^{(1)} = 8p_g - 7 - i \quad , \quad P_2 = 9p_g - 7 - i \quad , \quad 0 \leq i \leq 4.$$

*Ses courbes canoniques dégènèrent en une courbe fixe de genre virtuel  $2p_g - 1 - i$  et en une partie variable composée avec les courbes de genre 3 d'un faisceau linéaire.*

6. Pour toute valeur de  $p_g$ , il est des surfaces  $F_0 = 4 F$  du type étudié qui sont irrégulières. La place nous fait défaut pour pousser ici la question. Nous nous contenterons d'en indiquer un exemple.

*Le plan quadruple abélien  $F_0 = 4 F$  doté des courbes de diramation*

$$E_1 = C_2(A^2) \quad , \quad E_2 = C_4(A^4) \quad , \quad E_3 = C_{2r+2}(O^{2r+2}) \quad , \quad r > 2$$

*possède le genre géométrique  $p_g = r$ , le genre linéaire  $p^{(1)} = 8p_g - 7$ , le bigenre  $P_2 = 9p_g - 7$  et l'irrégularité 2. Son système canonique, dans sa partie variable, est composé avec les courbes de genre trois d'un faisceau linéaire.*

Cette nouvelle assertion se justifie aisément par les procédés plus haut utilisés.

L'irrégularité de  $F_0$  était facilement prévisible. En effet,  $F_0$  est une surface double  $F_0 = 2 F_3(E_3^3)$ ,  $F_3 = 2 F(E_1 + E_2)$ . Or la courbe de diramation de la surface double  $F_3$  est la courbe  $E_1 + E_2 = C_6(A^6)$ , laquelle est composée avec six droites du faisceau  $|C_1(A)|$ . Il s'ensuit que  $F_3$  est une réglée de genre deux. A cette réglée correspond sur  $F_0$  un faisceau de genre deux de courbes de genre  $r$ , ainsi qu'on le vérifie aisément <sup>(3)</sup>.

7. Ce qui précède permet de formuler le théorème d'existence:

*Pour toute valeur du genre géométrique, il est des surfaces irréductibles algébriques, régulières et irrégulières, dont le système canonique, en dehors d'une partie fixe, est composé avec les courbes de genre trois d'un faisceau linéaire.*

*Le genre linéaire de celles de ces surfaces qui sont régulières peut prendre au moins toute valeur entière*

$$8p_g - 11 \leq p^{(1)} \leq 8p_g + 1.$$

(3) Une droite quadruple  $C_1^0(A) = 4C_1(A)$  porte  $2C_1(A) \cdot (E_1 + E_2 + E_4) = 4r + 4$  points de diramation. Une courbe  $C_1^0(A)$  est donc de genre virtuel  $2r - 1$ . Comme cette courbe est somme de deux courbes de  $H$ , ces courbes sont de genre  $r$ .

**Astronomia.** — *Sulla distribuzione di equilibrio della materia gassosa negli ammassi globulari.* Nota di MASSIMO CIMINO, presentata (\*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Nella presente Nota dimostro che, se in un ammasso globulare è presente del gas compenetrante l'ammasso, di massa trascurabile rispetto a quella stellare ed in equilibrio adiabatico, allora basta che la temperatura centrale del gas raggiunga valori assai piccoli (non superiori ai 150 *gradi assoluti*, ma generalmente assai minori) perché la sfera gassosa tenda ad assumere un raggio infinito; vale a dire il gas tenda ad abbandonare l'ammasso, disperdendosi nello spazio circostante.

Questo fatto potrebbe spiegare, in maniera assai semplice e senza bisogno di ricorrere ad ipotesi particolari, l'assenza — quale sembra rivelata dalle osservazioni — di gas interstellare negli ammassi globulari. Infatti, anche a causa della concentrazione centrale delle stelle dell'ammasso, non sembra difficile ammettere che il gas interstellare, anche se originariamente presente dopo la formazione dell'ammasso, abbia finito col raggiungere le modeste temperature centrali dell'ordine sopradetto e abbia perciò abbandonato il sistema. Negli sviluppi che seguono ho supposto che si tratti di idrogeno molecolare; per l'idrogeno atomico si avrebbero valori della temperatura centrale di fuga del gas anche minori. Per quanto riguarda poi gli ammassi aperti — nei quali l'osservazione rivela quasi sempre la presenza del gas interstellare — non bisogna dimenticare che essi appartengono alle braccia della nebulosa galattica, onde la persistenza del gas nell'ammasso va senza dubbio collegata ai fenomeni assai più complessi, dinamici ed evolutivi, delle braccia stesse.

2. Sia un ammasso stellare con distribuzione sferica della densità *stellare*  $\rho(r)$ ,  $r$  essendo la distanza di un punto generico dal centro dell'ammasso. Supporremo  $\rho(r)$  assegnata a piacere e indipendente dal tempo; essa potrà assumere valori positivi o nulli, ma nel caso in cui fosse nulla all'origine, noi supporremo che essa sia diversa da zero in tutto un suo intorno; chiameremo inoltre con  $M$  ed  $R$  la massa totale ed il raggio dell'ammasso. Assimilando l'ammasso ad una distribuzione continua, il suo potenziale newtoniano  $u$  in funzione di  $r$  sarà:

$$(1) \quad u(r) = \begin{cases} 4\pi f \left[ \frac{1}{r} \int_0^r \rho(r) r^2 dr + \int_r^R \rho(r) r dr \right] & \text{per } r \leq R \\ 4\pi f \frac{1}{r} \int_0^R \rho(r) r^2 dr = f \frac{M}{r} & \text{per } r \geq R \end{cases}$$

$f$  essendo il coefficiente attrattivo.

(\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

Ciò posto, supponiamo ora che nell'ammasso sia presente del gas interstellare, compenetrante l'ammasso e di massa totale  $m$  assegnata a piacere, *ma trascurabile rispetto a quella totale  $M$  delle stelle dell'ammasso*, talché possa ritenersi nullo il suo contributo alle forze attrattive. Questo gas assumerà una certa configurazione di equilibrio, sotto l'azione delle forze generate dal potenziale (1). Ammettendo che il gas si comporti come un gas perfetto in equilibrio convettivo politropico (per esempio adiabatico), e chiamando con  $p(r)$ ,  $\mu(r)$ ,  $T(r)$  la sua pressione, densità e temperatura, sussistono notoriamente le relazioni che ne caratterizzano lo stato di equilibrio:

$$(2) \quad \frac{dp}{dr} = \mu \frac{du}{dr}$$

$$(2') \quad p = h \mu^\gamma$$

$$(2'') \quad p = \frac{C}{q} \mu T,$$

[ $h$  = costante adiabatica;  $\gamma$  = costante  $> 1$ ;  $C$  = costante dei gas;  $q$  = peso molecolare]. Indicheremo inoltre con l'indice *zero* le quantità calcolate al centro dell'ammasso ( $r=0$ ), e con l'indice *uno* quelle calcolate sulla sfera di raggio  $r=r_1$  che limita il gas (da non confondere col raggio  $R$  dell'ammasso stellare). Dovrà essere:

$$(3) \quad p_1 = 0 \quad ; \quad \mu_1 = 0 \quad ; \quad T_1 = 0.$$

Infine, la massa totale *del gas* sarà:

$$(4) \quad m = 4\pi \int_0^{r_1} \mu(r) r^2 dr,$$

che, come si è detto, deve supporre assegnata, benché trascurabile di fronte alla massa  $M$  dell'ammasso stellare.

3. Invece di assumere come variabile indipendente la distanza  $r$ , conviene prendere il potenziale  $u$ , che, nelle ipotesi ammesse per la  $\rho(r)$ , è funzione di  $r$  continua e *decescente*; per gli estremi abbiamo:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u = u_0 = 4\pi f \int_0^R \rho(r) r dr & \text{per } r=0 \\ u = 0 & \text{per } r=\infty. \end{array} \right.$$

Dalle (2), (2') eliminando  $p$  ed integrando si ha facilmente:

$$(6) \quad \mu = \left[ \frac{\gamma-1}{h\gamma} (u - u_0) + \mu_0^{\gamma-1} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

che dà la densità del gas in funzione del potenziale  $u$ . Le (2'), (2'') daranno allora:

$$(6') \quad p = h \left[ \frac{\gamma-1}{h\gamma} (u - u_0) + \mu_0^{\gamma-1} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$(6'') \quad T = h \frac{q}{C} \left[ \frac{\gamma-1}{h\gamma} (u - u_0) + \mu_0^{\gamma-1} \right].$$

Ora, per la seconda delle condizioni (3), la (6) darà sulla superficie esterna della sfera *gassosa*:

$$(7) \quad u_0 - u_1 = \frac{h\gamma}{\gamma-1} \mu_0^{\gamma-1};$$

assegnando a piacere  $\mu_0$  [oltre che  $m$  già supposta assegnata], questa equazione permetterà di eliminare  $h$  dalla (6), e infine attraverso le (1) (4) di ricavare  $r_1$ . Per tale valore di  $r$  anche le altre condizioni (3) sono ovviamente soddisfatte, mentre anche  $T_0$  e  $\mu_0$  risultano determinate dalle (2') (2''). Il problema è così completamente risolto.

Da quanto precede, si vede che *la distribuzione di equilibrio del gas nell'ammasso dipende da  $m$  e da un altro parametro* [oltre che da  $\gamma$  e  $q$ ]. Questo può essere, come ora si è visto, la densità centrale  $\mu_0$ ; ma a noi conviene scegliere, al suo posto, la temperatura centrale  $T_0$ , che è legata a  $\mu_0$  dalla relazione [immediatamente ricavabile, eliminando  $p$  tra le (2'), (2'')]:

$$(8) \quad \mu_0 = \left[ \frac{C}{h\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} T_0^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

La (7) diventa allora:

$$(9) \quad u_0 - u_1 = \frac{C\gamma}{q(\gamma-1)} T_0;$$

in essa *non* compare la costante adiabatica  $h$ .

Osserviamo che, qualunque sia la distribuzione sferica della densità stellare  $\rho(r)$ , il potenziale  $u_R$  sul contorno dell'ammasso è sempre:

$$(10) \quad u_R = f \frac{M}{R}.$$

Poiché  $u$  è funzione sempre decrescente di  $r$ , si ottiene subito la condizione affinché il raggio  $r_1$  della sfera gassosa compenetrante l'ammasso sia minore, uguale o maggiore del raggio  $R$  dell'ammasso stesso. Si ha infatti:

$$r_1 \leq R \quad \text{secondo che è: } u_1 \geq u_R$$

e quindi per la (9)

$$(11) \quad r_1 \leq R \quad \text{secondo che è: } T_0 \leq \frac{q(\gamma-1)}{C\gamma} (u_0 - u_R).$$

Se poi nella (9) poniamo  $u_1 = 0$ , allora è:  $r_1 = \infty$ ; cioè la sfera gassosa tende a disperdersi in tutto lo spazio, abbandonando l'ammasso. In corrispondenza avremo la temperatura centrale:

$$(12) \quad T_0^{(f)} = \frac{q(\gamma-1)}{C\gamma} u_0,$$

che chiameremo *temperatura centrale di fuga (del gas)*.



Sia  $T_o^{(f)}$ , che  $T_o$  nella limitazione (11), dipendono dal valore  $u_o$  del potenziale dell'ammasso stellare *al suo centro*. Dalla (1) si ha:

$$(13) \quad u_o = 4\pi f \int_0^R \rho(r) r dr.$$

4. Per applicare ai problemi astronomici le considerazioni teoretiche dei numeri precedenti, è necessaria la conoscenza della funzione  $\rho(r)$ , cioè della densità dell'ammasso stellare. Si tratta di una questione che, a sua volta, non è stata ancora completamente risolta<sup>(1)</sup>. In questa sede mi limiterò, a titolo di orientamento, a trattare solamente due casi: *a)* supporre l'ammasso stellare omogeneo; *b)* supporre, per l'ammasso stellare, la legge di densità dello Schuster<sup>(2)</sup>:

$$(14) \quad \rho(r) = \frac{B}{(a^2 + r^2)^{5/2}},$$

$a$  e  $B$  essendo delle costanti<sup>(3)</sup>.

Cominciamo col caso *a)*. Si ha subito:

$$(15) \quad u_o = \frac{3}{2} f \frac{M}{R},$$

e per la temperatura centrale di fuga (12):

$$(16) \quad T_o^{(f)} = \frac{3}{2} \frac{g(\gamma-1)}{\gamma} \frac{f}{C} \frac{M}{R}.$$

Supponiamo allora - a titolo di esempio - che il gas sia idrogeno molecolare, in equilibrio adiabatico; si ha allora<sup>(4)</sup>:

$$\frac{g(\gamma-1)}{\gamma} \frac{f}{C} = 4.6 \times 10^{-16} \quad [\text{C.G.S.}],$$

e, assumendo come unità di massa quella solare [ $1.9 \times 10^{33}$  gr] e per unità di lunghezza il *parsec* [ $3.083 \times 10^{18}$  cm], avremo infine per la (16):

$$(17) \quad T_o^{(f)} = 0.42 \frac{M}{R}; \quad [M \text{ in masse solari}; R \text{ in parsec}].$$

(1) Cfr. per esempio W. M. SMART, *Stellar dynamics*, Cambridge, pp. 297-308 (1938).

(2) Come è noto, questa legge fu suggerita da considerazioni teoretiche, partendo dall'ipotesi che l'attuale ammasso globulare derivi da una nebulosa già in istato di equilibrio convettivo politropico. In seguito, questa interpretazione si dimostrò insostenibile [cfr. T. J. J. SEE, in « Proceedings of the American Phylos. Soc. », vol. LI (1912), n. 204], talché il von Zeipel e l'Eddington proposero di assumere la legge di Schuster come una ipotesi indipendente, che è quasi sempre sufficientemente verificata dalle osservazioni.

(3) Poiché la massa totale dell'ammasso stellare è data dalla (18) che segue, si vede subito che la costante  $a$  rappresenta il raggio di un ammasso equivalente *omogeneo*, avente lo stesso numero di stelle (cioè eguale massa) e densità eguale a quella centrale  $B/a^5$  dell'ammasso reale.

(4) Ponendo:  $g = 2$  ;  $\gamma = \frac{7}{5}$  ;  $C = 8.31 \times 10^7$  ;  $f = 6.7 \times 10^{-8}$ .

Poiché per un ammasso globulare si può assumere una massa *media* dell'ordine di  $10^4 \odot$  ed un raggio *medio* dell'ordine di 40–60 *parsec*, si ha dunque per la temperatura centrale di fuga del gas di un ammasso globulare *medio*:

$$(17') \quad T_o^{(f)} \sim 70\text{--}100 \text{ gradi assoluti.}$$

Veniamo ora all'ipotesi *b*). Per la (13) avremo subito:

$$u_o = 4\pi f B \int_0^\infty \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{5/2}} = \frac{4\pi}{3} f \frac{B}{a^3}.$$

Ma la massa totale *M* dell'ammasso stellare è:

$$(18) \quad M = 4\pi B \int_0^\infty \frac{r^2 dr}{(a^2 + r^2)^{5/2}} = \frac{4\pi}{3} \frac{B}{a^2},$$

e quindi:

$$(19) \quad u_o = f \frac{M}{a}.$$

Avremo allora per la temperatura centrale di fuga:

$$(20) \quad T_o^{(f)} = \frac{q(\gamma - 1)}{\gamma} \cdot \frac{f}{C} \cdot \frac{M}{a}$$

e cioè, nelle ipotesi ammesse nel caso precedente sulla natura e sul comportamento termodinamico del gas:

$$(21) \quad T_o^{(f)} = 0.28 \frac{M}{a}; \quad [M \text{ in masse solari; } a \text{ in parsec.}]$$

I valori di *M* e di *a* possono ricavarsi dalle osservazioni mediante conti di stelle<sup>(5)</sup>.

(5) Supponendo che, in media, l'ordine di grandezza della massa di una stella dell'ammasso sia quella del Sole, *M* è dato allora dal numero totale delle stelle dell'ammasso. Per quanto riguarda *a*, si possono seguire diversi procedimenti [cfr. per esempio, W. M. SMART, loc. cit., pp. 306–307]; uno di questi è dovuto al VON ZEIPPEL [in *Recherches sur la constitution des amas globulaires*. «Kung. Svenska Vet. Akademia, Handinger», Bd. 51, n. 5], e consiste nel contare sulle lastre fotografiche il numero  $\sigma(r)$  di stelle dell'ammasso che appaiono contenute in cerchi concentrici di raggio crescente. Assumendo sulla lastra un'unità arbitraria di lunghezza (per esempio quella che corrisponde ad un secondo di arco in cielo), è facile esprimere la distribuzione *apparente*  $\sigma(r)$  partendo dalla legge di densità (14). Si ha allora:

$$\sigma(r) = M \frac{r^2}{a^2 + r^2}.$$

Poiché *M* è noto, si ricava *a* in unità di *r* (nel nostro caso, in secondi di arco). Se è nota anche la distanza dell'ammasso, facilmente si otterrà il valore di *a* in *parsec* da introdurre nella (21).

A titolo di esempio riportiamo nella tabella che segue i valori di  $M$  e di  $a$  (in secondi di arco) calcolati dal Plummer<sup>(6)</sup> sulla base di conti di stelle eseguiti da S. I. Bailay ed altri. Nelle altre colonne della tabella sono date la *classe* secondo Shapley, - che indica il grado di concentrazione centrale dell'ammasso da I a XII, la classe I rappresentando la più alta concentrazione -, la *distanza*  $d$  in Kiloparsec<sup>(7)</sup>, la *temperatura centrale di fuga del gas*  $T_0^{(f)}$  calcolata dalla (21) ed infine un giudizio sul grado di concordanza delle densità stellari osservate con quelle calcolate sulla base della (14).

TABELLA

Ammasso N.G.C.		Classe	M [in $\odot$ ]	$a$	$d$ [kpc]	$T_0^{(f)}$ [gradi as- soluti].	Cfr. con la (14)
104	47 Tuc	III	5859	347''	7.6	128	Molto buono
362		III	1015	93	10.0	63	» »
5139	$\omega$ Cen	VIII	7080	428	6.8	140	» »
5272	M 3	VI	1122	113	12.2	47	Povero
5986		VII	481	64	16.9	26	Molto buono
6205	M 13	V	2074	146	9.5	86	Debole
6266 (*)	M 62	IV	1246	125	18.6	31	Buono
6809	M 55	XI	1172	155	5.8	75	Eccellente
7078	M 15	IV	926	103	11.5	45	»
7089	M 2	II	1140	87	13.8	55	Buono
7099	M 30	V	438	91	14.6	19	Eccellente

(\*) Molto asimmetrico.

5. Come risulta dagli esempi ora trattati, la temperatura centrale di fuga del gas è sempre molto piccola, - dell'ordine di quella già data dalla (17') nell'ipotesi degli ammassi omogenei medi -, qualunque sia la ricchezza in stelle dell'ammasso e la sua concentrazione centrale. Donde la conclusione del n. 1, che gli ammassi globulari non sono in grado di trattenere le residue tracce di gas interstellare eventualmente presenti all'epoca della loro formazione.

(6) H. C. PLUMMER, *The distribution of Stars in Globular Clusters*, «Monthly Notices», V, 76, p. 119 (1915).

(7) H. SHAPLEY, *Stellar Clusters*, «Hand. d. Astrophysics», Bd. 5/2, p. 762; e i valori aggiornati in: *A half century in Globular Clusters*, «Pop. Astr.», vol. LVII, p. 204 (1949).

Volendo invece applicare la nostra teoria ai nuclei delle nebulose extra galattiche (prescindendo naturalmente dal loro schiacciamento), si arriverebbe alla conclusione che le temperature centrali necessarie per la fuga del gas sarebbero dell'ordine di  $10^6$  gradi assoluti<sup>(8)</sup>. Questo risultato tenderebbe a confermare l'idea, — coltivata fino ad oggi —, della presenza di gas interstellare nei nuclei delle galassie. Senonché le recenti osservazioni del Baade sembrano portare ad una conclusione del tutto opposta, cioè che anche i nuclei delle galassie sono privi di gas interstellare. Conclusione questa che merita tuttavia una conferma, poiché qualche dubbio rimane specialmente per i nuclei delle spirali. Comunque, è qui necessario tener presente che il problema della distribuzione della materia interstellare in una nebulosa extra galattica (comprendendo anche le braccia) è certamente assai più complesso che non quello che riguarda gli ammassi globulari; e non si può certo pretendere di esaurirlo con la semplice teoria che abbiamo esposto nella presente Nota.

### Astronomia. — *Sul satellite oscuro nel sistema di $\zeta$ Aquarî.*

Nota I di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata<sup>(\*)</sup> dal Socio G. ARMELLINI.

1. In un suo lavoro pubblicato nel 1941<sup>(1)</sup>, K. A. Strand, ha affacciato l'ipotesi che il satellite luminoso della  $\zeta$  Aquarî (A.D.S. 15971;  $\alpha = 22^h 26^m$ ;  $\delta = -0^\circ 17'$ ; eq. 1950) sia accompagnato da un piccolo satellite oscuro, che gli ruoterebbe intorno in 25 anni. A questa conclusione l'autore è stato condotto dall'esame degli scarti che il satellite ha dalla sua orbita, intorno alla stella principale, scarti variabili sistematicamente appunto in 25 anni circa.

D'altra parte la  $\zeta$  Aquarî è una binaria a lungo periodo e poichè l'arco utilizzato da Strand, copre meno della metà dell'ellisse, può sorgere il dubbio che la sua determinazione non sia esatta. Ho ripreso quindi, in questa Nota, lo stesso problema con metodo diverso e con nuove osservazioni e sono giunta alla medesima conclusione.

2. Le osservazioni, di cui ho fatto uso, sono riportate nella tabella I e sono raccolte oltre che dai cataloghi di Aitken (A.D.S.) e di Burnham (B.G.C.) dai periodici « Astronomische Nachrichten », « Astronomical Journal », « Monthly Notices », e dalle pubblicazioni degli Osservatori di Monaco, Parigi, Uccle, Lick e Roma (Monte Mario).

(8) Si ponga, per esempio,  $M = 19^\circ \odot$ ,  $R \approx 600 \text{ a.l.} \approx 180 \text{ parsec}$ ; la (17) dà allora:  $T_0^{(f)} \approx 2.5 \times 10^6 \text{ gradi assoluti}$ .

(\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) Cfr. « Astronomical Journal », vol. XLIX, p. 165.



TABELLA I.

$t$	$\vartheta$	$\rho$	Osservatore	$t$	$\vartheta$	$\rho$	Osservatore
1781.28	18.03	4.56	Herschel	1903.54	319.17	3.11	Doberck, Biesbroeck, ecc.
1825.73	359.53	3.60	Struve	1905.54	316.90	2.95	Burnham
1832.81	355.04	3.46	»	1906.83	316.41	3.21	Doberck, ecc.
1839.77	349.86	3.73	Dawes	1909.71	312.31	3.05	» Uran. Obs.
1842.39	350.06	3.67	Challis, Glaisher	1909.73	314.31	3.16	Guillaume
1846.95	347.27	3.48	Dawes	1912.95	309.52	2.98	Doberck, Phillips ecc
1853.94	345.39	3.61	Morton	1916.09	307.13	2.91	» Rabe, ecc
1858.15	341.30	3.57	Dembowski	1920.06	305.83	2.90	Chandon, ecc.
1863.14	338.81	3.52	»	1921.25	307.49	2.98	Giacobini
1867.53	336.72	3.34	»	1922.30	303.64	2.90	Labitzke
1872.15	335.13	3.41	»	1922.96	301.98	2.86	Peck, Zo-sè Obs, ecc.
1876.40	334.24	3.31	»	1925.53	302.45	2.82	Doberck, Rabe, ecc.
1878.12	333.84	3.56	Hall	1925.58	302.21	2.82	Berman, Leavenworth, ecc.
1882.68	330.95	3.33	»	1927.38	301.30	2.78	Baize, Phillips, ecc.
1886.30	328.16	3.30	»	1929.97	298.70	2.57	Aller, Bonnet, Luplau-Jansen, ecc.
1887.50	328.76	3.51	Grandon ecc.	1932.32	296.57	2.63	Phillips, Aller, Giacobini, ecc.
1888.34	325.66	3.29	Hall	1935.39	292.24	2.57	Phillips, Rabe
1890.08	324.47	3.15	Schiaparelli ecc.	1937.40	290.09	2.50	Armellini, Rabe
1890.24	324.77	3.36	Hall	1939.21	287.38	2.34	Strand, Schmeidler
1893.78	323.08	3.14	Maw	1941.27	285.28	2.39	Arend
1895.76	322.32	3.17	See, Comstok	1942.73	284.15	2.40	Wirtanen
1897.72	321.59	3.31	Hussey	1945.60	281.01	2.39	Jeffers, Hirst
1900.12	317.99	3.26	Doolittle	1947.02	281.84	2.57	Armellini, Neven
1901.02	320.19	3.22	Schiaparelli, ecc.				

Ho raggruppato in luoghi normali le numerose osservazioni degli ultimi anni, assegnando a ciascuna di esse, per il calcolo suddetto, un peso proporzionale alle notti di osservazione. Infine ho ridotto tutti gli angoli  $\vartheta$  all'equinozio del 1950, apportando a ciascuno di essi la correzione  $\Delta\vartheta = -0^{\circ}.00221 (1950-t)$ .

Secondo l'uso,  $t$  indica il tempo,  $\vartheta$  l'angolo di posizione del satellite,  $\rho$  il raggio vettore.

Una prima orbita, che ho determinata col metodo di Glasenapp-Kowalsky <sup>(2)</sup>, mi ha dato i seguenti elementi orbitali:

$$\Omega = 121^{\circ} 0 \quad i = 130^{\circ} 5 \quad \omega = 247^{\circ} 3 \quad e = 0,492$$

$$a'' = 4'',386 \quad P = 601^a,26 \quad \tau = 1965,04$$

rappresentando i simboli rispettivamente, la posizione del nodo, l'inclinazione dell'orbita, la posizione del periastro, l'eccentricità, il semiasse maggiore, il periodo di rivoluzione in anni, e il tempo del passaggio al periastro.

Calcolati con questi elementi, le posizioni del satellite per le date di osservazione e confrontate con quelle della tabella I, gli scarti  $O - C$ , per le anomalie  $\vartheta$ , che ho riportate in un grafico, mostrano una oscillazione persistente appunto di 25 anni. Tale risultato preliminare è dunque in accordo con le conclusioni di Strand. Nulla invece posso dire per gli scarti nei raggi vettori, che appaiono distribuiti casualmente.

3. Ho quindi scelto 18 luoghi normali; di essi 13 sono le posizioni riportate dall'A.D.S. e che essendo la media di numerose misure di diversi astronomi, possono considerarsi come le posizioni più certe; le altre e cioè quelle per gli anni 1865, 1930-35-40-45 sono state determinate accuratamente, servendomi di un grafico che approssimava l'andamento degli angoli di posizione e dei raggi osservati, in funzione del tempo.

Per l'assegnazione del peso a ciascuna equazione, ho seguito il seguente criterio: se la posizione è stata determinata da un solo osservatore, avrà peso 1; se dovuta a due osservatori, 2; se dovuta a due osservatori con grandissimo numero di osservazioni, o a tre osservatori, 3; se si basa sulle misure di più astronomi, 4; infine se è dovuta a più osservatori, per un totale di misure superiore alle 50, peso 5. Seguendo analogo criterio per i luoghi normali scelti graficamente, ho dato peso 1 alla posizione del 1865, peso 3 rispettivamente alle posizioni del 1930-35-40, peso 2 alla posizione del 1945.

I luoghi normali sono raccolti nella tabella II, dove i  $\Delta\vartheta$  sono gli scarti tra le posizioni osservate e quelle calcolate con l'orbita preliminare.

Per migliorare l'orbita, mi sono servita del metodo di Hellerich <sup>(3)</sup> e delle tavole dello Schelesinger <sup>(4)</sup>, pervenendo a 18 equazioni di condizione del tipo:

$$A_k \Delta\Omega + B_k \Delta i + C_k \Delta\omega - \beta_k C_k \Delta T' + \beta_k C_k (t_k - \tau) \Delta n' + \alpha_k C_k \Delta e' = \Delta\vartheta_k$$

dove con i simboli ben noti,  $\Delta\Omega, \Delta i \dots$  ecc., sono indicate le correzioni infinitesime da apportare agli elementi e  $\Delta T', \Delta n', \Delta e'$  sono legate rispettivamente a  $\Delta T, \Delta n, \Delta e$  da note sostituzioni. Infine i  $\Delta\vartheta$  rappresentano gli scarti in angolo di posizione dati.

(2) Cfr. ARMELLINI, *Astronomia Siderale*, vol. II, p. 420 e sg.

(3) Cfr. ARMELLINI, opera citata.

(4) Cfr. *Pubbl. of the Allegheny Obs.*, vol. I, n. 6.

TABELLA II.

$t$	$\vartheta$	$\rho$	peso	$\Delta\vartheta$	$t$	$\vartheta$	$\rho$	peso	$\Delta\vartheta$
1781.28	18.03	4.56	1	— 1° ,93	1912.95	309.52	2.98	5	— 1° ,23
1825.73	359.53	3.60	1	+ 0 ,52	1916.09	307.13	2.91	5	— 1 ,40
1842.39	350.06	3.67	2	— 0 ,65	1920.06	305.83	2.90	4	+ 0 ,25
1865.00	337.81	3.48	1	+ 0 ,37	1922.30	303.64	2.90	5	— 0 ,18
1887.50	328.76	3.51	3	+ 2 ,00	1925.53	302.45	2.84	5	+ 1 ,18
1890.08	324.47	3.15	3	— 0 ,67	1930.00	298.10	2.65	3	+ 0 ,01
1901.02	320.19	3.22	4	+ 1 ,62	1935.00	292.10	2.50	3	0 ,00
1906.83	316.41	3.21	4	+ 1 ,53	1940.00	286.00	2.40	3	— 0 ,07
1909.71	312.31	3.05	4	— 0 ,65	1945.00	281.30	2.35	2	— 0 ,25

Dalle 18 equazioni di condizione, servendomi del metodo dei minimi quadrati, sono pervenuta al seguente sistema normale, dove i coefficienti del  $\Delta n'$  e tutti quelli della quinta equazione sono stati moltiplicati per  $10^{-3}$ , per comodità di calcolo:

$$\begin{array}{rclclclclcl}
 58 \Delta\Omega + 8,750 \Delta i & - & 42,889 \Delta\omega & + & 21,648 \Delta T' & - & 11,923 \Delta n' & + & 35,730 \Delta e' & = & -0,10582 \\
 & + & 4,461 & & & - & 1,047 & + & 5,978 & = & +0,02095 \\
 & & & + & 33,310 & & 8,525 & - & 26,546 & = & +0,11196 \\
 & & & & & + & 8,566 & - & 4,760 & = & -0,04933 \\
 & & & & & & & + & 2650,619 & - & 7,213 & = & +0,02705 \\
 & & & & & & & & & + & 22,136 & = & -0,05455
 \end{array}$$

Risolto il sistema normale e passato dai valori di  $\Delta T'$ ,  $\Delta n'$ ,  $\Delta e'$  a  $\Delta T$ ,  $\Delta n$ ,  $\Delta e$ , ridotti gli angoli in gradi, ho trovato che le correzioni da apportare agli elementi sono:

$$\Delta\Omega = -0^{\circ},5 \quad \Delta i = 2^{\circ},8 \quad \Delta\omega = 2^{\circ},2 \quad \Delta T = 1,93^a \quad \Delta n = 0,000 \quad \Delta e = 0,001$$

e quindi applicando tali correzioni agli elementi precedentemente determinati, ho avuto gli elementi migliorati eccetto  $a$ .

Per avere la correzione da applicare al semiasse, sono partita dalla nota equazione, che ci dà il raggio apparente  $\rho$  e da cui derivando rispetto ad  $a$ , si ottiene subito:

$$\Delta a = \frac{a \Delta \rho}{\rho}.$$

Calcolati con gli elementi orbitali migliorati, i valori di  $\rho$ , e paragonati con quelli osservati, otteniamo i  $\Delta \rho$ , e quindi per ogni misura un valore per  $\Delta a$ . Eseguendo tale calcolo per tutti i luoghi normali, — tenendo sempre conto del loro peso — ho avuto una serie di valori, la cui media mi ha dato infine:

$$\Delta a = -0'',097.$$

In definitiva gli elementi orbitali migliorati per la  $\zeta$  Aquarí sono:

$$\begin{array}{llll} \Omega = 120^\circ 5 & i = \pm 133^\circ 4 & \omega = 249^\circ 5 & e = 0,493 \\ a = 4''289 & P = 601,26 & \tau = 1966,97 & \end{array}$$

Come si vede, essi sono rimasti pressoché inalterati dopo il miglioramento; variano poco anche gli scarti  $O - C$  per le anomalie, che riportati in grafico ancora una volta, sono rappresentati — soprattutto quelli dei luoghi normali — da una curva periodica, con periodo di 25 anni. Gli scarti per i raggi vettori conservano invece andamento irregolare. Si può a ragione ammettere che gli errori di osservazione, molto sensibili nella determinazione dei  $\rho$ , mascherino l'oscillazione in essi contenuta.

Mi sembra perciò che anche la mia orbita migliorata confermi la presenza di un terzo corpo oscuro nel sistema della  $\zeta$  Aquarí.

In una prossima Nota, cercherò di determinare il moto dell'astro secondario, intorno al baricentro del sistema composto da questo stesso astro e dal satellite oscuro; confronterò le posizioni osservate rispetto alla stella principale con quelle calcolate, una volta trascurando la presenza del satellite ed una volta tenendone conto.

**Fisica matematica.** — *Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica.* Nota I di RENATO NARDINI, presentata (\*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. PREMESSE. — In un precedente lavoro <sup>(1)</sup> si è considerato, in presenza di un campo magnetico, un fluido ideale, incompressibile, omogeneo ed elettricamente conduttore che occupi, con riferimento ad una terna trirettangola, il semispazio  $z > 0$ . Al riguardo si sono considerati moti dipendenti solo dal tempo  $t$  e dalla coordinata  $z$  e si sono introdotte le seguenti condizioni iniziali e al contorno: per  $t = 0$  si è supposto che in tutto il fluido la velocità  $\mathbf{v}$  sia nulla e che il campo magnetico  $\mathbf{H}$  sia costante e parallelo all'asse  $z$ ; sul piano  $z = 0$  per ogni  $t > 0$  si suppongono assegnate le componenti  $H_x$  ed  $H_y$  del campo magnetico, mentre si suppone nulla la componente  $v_z$  della velocità.

Si è poi dimostrato che la componente  $v_z$  di  $\mathbf{v}$  rimane sempre nulla in tutto il liquido, che la componente lungo l'asse  $z$  di  $\mathbf{H}$  coincide sempre con il valore iniziale assegnato  $H_z$  e che le componenti  $H_x$  ed  $H_y$  di  $\mathbf{H}$  si ricavano da due identici problemi al contorno, matematicamente separati, espressi dall'equazione

$$(I) \quad \frac{\partial^2 H_i(t, z)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^3 H_i(t, z)}{\partial t \partial z^2} + V^2 \frac{\partial^2 H_i(t, z)}{\partial z^2} \quad (i=x, y; a^2 = \frac{1}{\mu\gamma}; V^2 = \frac{\mu H_z^2}{8}),$$

(\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) R. NARDINI, *Soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica.* « Ann. Mat. pura e appl. », (4), 35, 269-290 (1953).



- dove  $\mu$ ,  $\delta$  e  $\gamma$  rappresentano rispettivamente la permeabilità magnetica, la densità e la conducibilità del liquido - e dalle condizioni

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow +0} H_i(t, z) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial H_i(t, z)}{\partial t} = 0 \quad (0 < z < +\infty) \\ (3) \quad \lim_{z \rightarrow +0} H_i(t, z) = G_i(t) \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} H_i(t, z) = 0 \quad (0 < t). \quad (i=x, y)$$

Si è inoltre accennato al fatto che il problema costituito dalle (1), (2) e (3) rappresenta anche le vibrazioni longitudinali di una corda elastica illimitata da una parte, eccitata all'estremo, qualora si tenga conto della resistenza interna.

Nell'ipotesi che le funzioni assegnate  $G_i(t)$  siano nulle per  $t < 0$ , definite almeno per ogni  $t > 0$ , integrabili in senso proprio in ogni intervallo  $0 < t_1 \leq t \leq t_2$  e assolutamente integrabili fra zero e un certo  $T$ , che può essere preso grande quanto si vuole, si è mostrato che la soluzione del detto problema è espressa da

$$(4) \quad H_i(t, z) = \int_0^t G_i(t - \tau) H_0(\tau, z) d\tau \quad (i=x, y)$$

con

$$(5) \quad H_0(\tau, z) = e^{-\frac{V^2}{a^2}\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^{2n} z^n}{n! a^{3n}} B_n\left(\frac{z}{a}, \tau\right)$$

dove

$$(6) \quad B_0(\eta, \tau) = \psi(\eta, \tau) \quad , \quad B_1(\eta, \tau) = \chi(\eta, \tau) \quad (2) \quad ,$$

$$B_{2h+1}(\eta, \tau) = \int_0^\tau \chi(\eta, \sigma) \frac{(\tau - \sigma)^{h-1}}{(h-1)!} d\sigma \quad , \quad B_{2h}(\eta, \tau) = \int_0^\tau \psi(\eta, \sigma) \frac{(\tau - \sigma)^{h-1}}{(h-1)!} d\sigma \\ (h=1, 2, 3 \dots).$$

Ricordiamo ancora che, se la  $G(t)$  ammette la funzione  $g(s)$  quale trasformata secondo Laplace, si è provato che la trasformata di  $H(t, z)$  rispetto a  $t$  è data dalla formula

$$(7) \quad h(\ddot{s}, z) = g(s) e^{-\frac{zs}{\sqrt{a^2 s + V^4}}};$$

infine ciascuna componente  $v_i(t, z)$  ( $i=x, y$ ) della velocità si esprime mediante la corrispondente  $H_i(t, z)$  <sup>(3)</sup>.

(2)  $\psi$  e  $\chi$  sono le note funzioni che si incontrano nella teoria della propagazione del calore e precisamente

$$\psi(\eta, \tau) = \frac{\eta}{2\sqrt{\pi}\tau^{3/2}} e^{-\frac{\eta^2}{4\tau}} \quad , \quad \chi(\eta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{\eta^2}{4\tau}}.$$

(3) Precisamente vale la formula

$$v_i(t, z) = \frac{\mu H_i}{\delta} \int_0^t \frac{\partial H_i(\tau, z)}{\partial z} d\tau.$$

Nel lavoro citato in (1) si è dimostrato anche (n. 4) che se, ferme restando le condizioni iniziali, in luogo di  $H_x$  ed  $H_y$  si assegnano al contorno le componenti  $v_x$  e  $v_y$  ( $v_z$  è sempre supposta nulla), ciascuna  $v_i(t, z)$ , con  $i=x, y$ , soddisfa all'equazione (1) e a condizioni identiche alle (2) e (3).

Per semplicità d'ora innanzi sottintenderemo l'indice  $i$  come, del resto, si è già fatto nella (7).

2. ENUNCIAZIONE DEI RISULTATI. — Se nella (1) si pone  $a = 0$ , e ciò corrisponde al fatto di considerare infinita la conducibilità  $\gamma$  <sup>(4)</sup>, si ottiene l'equazione

$$(8) \quad \frac{\partial^2 H(t, z)}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 H(t, z)}{\partial z^2}$$

che, sempre supposto  $G(t) \equiv 0$  per  $t < 0$ , con le (2) e (3) fornisce la soluzione  $G(t - z/V)$ : dal punto di vista fisico si hanno così le onde magneto-idrodinamiche, scoperte teoricamente da Alfvén <sup>(5)</sup> ed sperimentate la prima volta in laboratorio da Lundquist <sup>(6)</sup>.

Sorge allora spontanea l'idea di esaminare il comportamento della soluzione  $H(t, z, a)$ , fornita dalla (4), quando il coefficiente  $a$  tende a zero <sup>(7)</sup> e, in secondo luogo, valutare fino a quale punto la  $H(t, z, a)$  per  $a \neq 0$  differisca da  $G(t - z/V)$  quando  $a$  è molto piccolo.

A tale riguardo si dimostrano qui i due teoremi seguenti:

I TEOREMA. — *Condizione sufficiente affinché*

$$(9) \quad \lim_{a \rightarrow 0} H(t, z, a) = G\left(t - \frac{z}{V}\right) \quad [\text{con } G(\tau) \equiv 0 \text{ per } \tau < 0],$$

*è che l'assegnata funzione  $G(t)$  sia trasformabile secondo Laplace e la sua trasformata  $g(s)$  soddisfi in un semipiano  $R(s) \geq \alpha$  alla relazione*

$$(10) \quad |g(s)| \leq \frac{M}{|s|^k} \quad (k > 1)$$

*essendo  $M$  una costante positiva.*

La (10) può anche essere espressa dicendo che  $g(s)$  nel detto semipiano è dell'ordine  $O(s^{-k})$ .

Notiamo che la (10) implica <sup>(8)</sup> che  $G(t)$  sia per ogni  $t \geq 0$  continua e in modulo minore di  $Le^{\beta t}$  essendo  $L$  e  $\beta$  costanti positive, e risulti  $G(0) = 0$ .

II TEOREMA. — *La  $G(t)$ , che per  $t < 0$  è nulla assieme alle sue derivate, abbia per  $t > 0$  derivata almeno fino al terz'ordine: sia  $\lim_{t \rightarrow 0} G(t) = 0$  ed esi-*

(4) Nel caso delle vibrazioni di una corda elastica, fare  $a = 0$  significa trascurare la resistenza interna.

(5) H. ALFVÉN, *On the Existence of Elektromagnetic—hydrodynamic Waves*. « Ark. f. mat. o fysik », 29 B, n. 2, 1942.

(6) S. LUNDQUIST, *Experimental Demonstration of Magneto—hydrodynamic Waves*. « Nature », 164, 145-146 (1949).

(7) Si tratta perciò di passare dalla soluzione di un'equazione di tipo parabolico a quella di un'equazione di tipo iperbolico.

(8) Si veda ad esempio R. V. CHURCHILL, *Modern Operational Mathematics in Engineering*. McGraw-Hill, 1944, New York, Cap. VI, Teor. 5.

stano finiti i  $\lim_{t \rightarrow +0} G'(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow +0} G''(t)$ ; inoltre  $G'''(t)$  abbia trasformata di Laplace la quale in un semipiano  $R(s) \cong \delta$  sia dell'ordine  $O(s^{-h})$  con  $h > 0$ . È allora

$$H(t, z, a) = G\left(t - \frac{z}{V}\right) + R_1(t, z, a) \cdot a^2$$

dove  $R_1$  risulta limitato per qualunque valore di  $a$ .

Rileviamo che dalle ipotesi fatte segue che <sup>(9)</sup> anche  $G(t)$ ,  $G'(t)$  e  $G''(t)$  sono L-trasformabili e che  $g(s)$ , L-trasformata di  $G(t)$ , è in un semipiano  $R(s) \cong \sigma \cong \delta$  dell'ordine  $O(s^{-2})$ . L'ipotesi del teorema II contiene perciò la condizione sufficiente (10) per la validità del teorema I.

La funzione  $R_1$  può essere specificata come segue:

$$(11) \quad R_1(t, z, a) = \frac{z}{2V^3} G''\left(t - \frac{z}{V}\right) + R_2(t, z, a) \cdot a^2$$

se si aggiungono le ipotesi che la  $G(t)$  abbia per  $t > 0$  derivata almeno fino al quinto ordine, sia  $\lim_{t \rightarrow 0} G'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} G''(t) = 0$ , esistano finiti  $\lim_{t \rightarrow +0} G'''(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow +0} G^{IV}(t)$ , mentre la  $G^V(t)$  abbia le proprietà enunciate precedentemente per la  $G'''(t)$ .

Ne segue che  $G'''(t)$  e  $G^{IV}(t)$  sono L-trasformabili e che la  $L\{G'''(t)\}$ , trasformata di  $G'''(t)$ , è dell'ordine  $O(s^{-2})$  in un opportuno semipiano.

Se si possono introdurre ipotesi analoghe alle precedenti sulle derivate di  $G(t)$  fino al settimo ordine si ha

$$(12) \quad R_1(t, z, a) = \frac{z}{2V^3} G''\left(t - \frac{z}{V}\right) + \\ + \frac{z}{8V^5} \left[ \frac{z}{V} G^{IV}\left(t - \frac{z}{V}\right) - 3G'''\left(t - \frac{z}{V}\right) \right] a^2 + R_3(t, z, a) \cdot a^4;$$

nelle (11) e (12)  $R_2$  ed  $R_3$  sono limitati per ogni valore di  $a$ .

Se poi si possono estendere le dette ipotesi a derivate di ordine ancora più elevato,  $R_1$  può essere maggiormente specificato.

La dimostrazione dei due teoremi è esposta nell'ordine nei nn. 4 e 5; al n. 3 si accenna invece al significato fisico di quanto è stato enunciato.

Al n. 6 si considera la soluzione (4) nelle ipotesi più generali formulate sulla  $G(t)$  per ricavarla e, mediante una opportuna valutazione della  $H_0(t, z)$ , si ottiene un modo di semplificare la (4) stessa quando  $a$  sia molto piccolo.

Al numero 7 si confronta la (4) con la (9) in un caso particolare.

3. SIGNIFICATO FISICO. - Dal punto di vista fisico i risultati enunciati traducono il fatto che le componenti  $H_x$  ed  $H_y$  del campo magnetico, le quali, quando la conducibilità  $\gamma$  è finita, risultano in genere, per  $t > 0$ , diverse

(9) Si veda G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, Springer Berlin 1937, p. 153 per l'esistenza delle trasformate e op. cit. in (8), p. 155, per la proprietà della  $g(s)$ .

da zero per ogni valore di  $z$ , se soddisfano sul piano  $z = 0$  a proprietà di regolarità non molto restrittive nei casi concreti, al tendere all'infinito di  $\gamma$  tendono ad essere nulle per  $z > Vt$  e a propagarsi con velocità di propagazione finita  $V$  a partire dal piano  $z = 0$ . Se poi, per maggiore aderenza ai casi concreti, si considera  $\gamma$  molto grande ma finito, si riscontra che praticamente, con un'approssimazione tanto maggiore quanto più regolari sono i valori al contorno, sussiste ancora la propagazione ondosa ottenuta come caso limite.

Le componenti  $v_x$  e  $v_y$  della velocità che, come si è detto al n. 1, si ottengono dalle corrispondenti componenti del campo magnetico, soddisfano alle stesse proprietà di  $H_x$  ed  $H_y$ .

Nel caso in cui il problema in questione riguardi le vibrazioni longitudinali di una corda disposta, in condizioni di equilibrio, lungo la parte positiva dell'asse  $z$ , le condizioni al contorno forniscono lo spostamento longitudinale assegnato all'estremo  $z = 0$ : allora le proprietà ricavate precedentemente per  $H_x$  ed  $H_y$  si riferiscono qui allo spostamento longitudinale a partire dalla configurazione di equilibrio che, quando la resistenza interna risulta molto piccola, praticamente si propaga con velocità  $V$  a partire dall'estremo eccitato, anziché estendersi immediatamente a tutta la corda, come avviene se la resistenza interna è sensibile.

4. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA I. — Consideriamo la trasformata di  $H(t, z, a)$  espressa dalla (7). Posto  $|s| = r$ , presa  $R(s) > \alpha$  e supposto  $\alpha > 0$ , ciò che non è affatto restrittivo, si può facilmente ricavare che <sup>(10)</sup>, per ogni valore di  $a$ , è

$$(13) \quad \left| e^{-\frac{zs}{\sqrt{a^2s + V^2}}} \right| \leq e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{zr}{\sqrt{a^2r + V^2}}} \leq 1.$$

Dalla (10) risulta perciò che è, per ogni valore di  $a$  (ivi compreso il valore zero),

$$(14) \quad |h(s, z, a)| \leq \frac{M}{|s|^k} \quad (k > 1)$$

e perciò, in base ad un noto teorema <sup>(11)</sup>, ad  $h(s, z, a)$  è applicabile la formula di inversione alla Fourier che dà

$$(15) \quad H(t, z, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} e^{ts} h(s, z, a) ds$$

(10) Si veda R. NARDINI, *Completamento della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica*. « Ann. Univ. Ferrara », sez. VII, vol. 2, 1953, 17-33, in particolare p. 28; si vi ponga  $u = z/a$ ,  $c = V^2/a^2$ .

(11) Loc. cit. in nota <sup>(8)</sup>.



dove è  $\beta \geq \alpha$ . Facendo  $s = \beta + iy$  si ha

$$H(t, z, a) = \frac{e^{\beta t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} h(\beta + iy, z, a) dy$$

e perciò

$$H(t, z, a) = \frac{e^{\beta t}}{2\pi} \left\{ \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ity} h(\beta + iy, z, a) dy + \int_{\lambda}^{+\infty} e^{ity} h(\beta + iy, z, a) dy + \int_{-\infty}^{-\lambda} e^{ity} h(\beta + iy, z, a) dy \right\}$$

da cui, con qualche immediata modifica,

$$(16) \quad H(t, z, a) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} e^{ts} h(s, z, 0) ds = \frac{e^{\beta t}}{2\pi} \left\{ \int_0^{\lambda} [e^{ity} h(\beta + iy, z, a) + e^{-ity} h(\beta - iy, z, a) - e^{ity} h(\beta + iy, z, 0) - e^{-ity} h(\beta - iy, z, 0)] dy + \right. \\ \left. + \int_{\lambda}^{+\infty} [e^{ity} h(\beta + iy, z, a) + e^{-ity} h(\beta - iy, z, a) - e^{ity} h(\beta + iy, z, 0) - e^{-ity} h(\beta - iy, z, 0)] dy \right\}^{(12)}.$$

Per la (14) l'ultimo integrale a secondo membro di (16) risulta in modulo minore o uguale di

$$4M \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{dy}{|y^2 + \beta^2|^k} \leq \frac{4M}{(k-1)\lambda^{k-1}} \quad (k > 1).$$

e quindi, dato un  $\varepsilon > 0$  arbitrario, per un'opportuna scelta di  $\lambda$  il detto integrale si può ridurre in modulo minore di  $\varepsilon$  indipendentemente da  $a$ . Il primo integrale che compare a secondo membro di (16) tende a zero quando vi tende  $a$ , potendosi effettuare l'operazione di limite sotto il segno di integrazione dato che, fissato  $\lambda$ , la tendenza al limite della funzione integranda è uniforme per  $0 \leq y \leq \lambda$ .

(12) Le funzioni integrande che compaiono nella (16) sono reali per la nota proprietà

$$f(\bar{s}) = \overline{f(s)}$$

dove con  $f(s)$  si intende una trasformata di Laplace e si indica col soprassegno il numero coniugato.

Ricavando dalla (7) l'espressione esplicita di  $h(s, z, 0)$ , si conclude con la relazione

$$(17) \quad \lim_{a \rightarrow 0} H(t, z, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} e^{ts} e^{-\frac{zs}{V}} g(s) ds.$$

Ma per la (10), in base a cose note, il secondo membro della (17) dà la funzione  $G(t - z/V)$  [ $G(\tau) \equiv 0$  per  $\tau < 0$ ], che è proprio la soluzione del problema determinato dalla (8) e dalle (2) e (3).

**Chimica fisica.** — *Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano* (\*). Nota III di GIORGIO PEYRONEL, presentata (\*\*) dal Socio L. CAMBI.

Nei precedenti <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup> calcoli dei fattori di struttura si usarono i fattori atomici dati nelle Tabelle Internazionali (1936) per Si, O, N. La curva dell'azoto riproduce assai bene, per  $\sin \theta/\lambda > 0,2$  la curva ottenuta sommando punto a punto alla curva del carbonio tre volte i corrispondenti valori della curva dell'idrogeno, cioè può essere assunta con buona approssimazione come curva del gruppo metilico. La curva del fluoro adottata da Roth e Harker <sup>(3)</sup> per il gruppo metilico è, anche nella regione di  $\sin \theta/\lambda > 0,2$  molto più alta di quella dell'azoto e nella determinazione di questa struttura diede un fattore di disaccordo peggiore. È indifferente usare le curve  $f$  per  $O^{--}$  e  $Si^{++}$  o quelle per O e Si, poiché eccetto che per piccoli valori di  $\sin \theta/\lambda$  esse coincidono.

In base all'ultima serie di fattori di struttura calcolati (Tabella I) si determinò, col metodo di Cruickshank <sup>(4)</sup> lo scarto quadratico medio (standard deviation)  $\sigma$  delle posizioni dei tre massimi Si, O, (3C), ottenendo i seguenti valori:

Si	O	(3C)
s.q.m. $\sigma = 0,0073$	$0,0173$	$0,0202 \text{ \AA.}$

Dato il tipo delle sezioni Fourier calcolate, l'errore di arrotondamento dei coefficienti delle serie fu sempre dell'ordine della seconda cifra decimale per le sezioni  $\rho(x\bar{x}0)$  e della prima cifra decimale per le sezioni  $\rho(xy0)$  e  $\rho(x\bar{x}5/60)$ , cioè molto piccolo.

(\*) Lavoro eseguito presso il POLYTECHNIC INSTITUTE OF BROOKLYN, N. Y., nel primo semestre 1953, con borsa di studio del Consiglio Nazionale delle Ricerche e borsa di viaggio Fulbright. L'Autore sentitamente ringrazia il prof. P. P. EWALD, il prof. I. FANKUCHEN e il dott. B. POST per la collaborazione avuta nel corso del lavoro, il prof. D. HARKER e il dott. V. LUZZATI per i loro consigli.

(\*\*) Nella seduta del 14 novembre 1953.

(1) G. PEYRONEL, questi « Rendiconti », vol. XV, fasc. 6, pp. 402-408 (1953).

(2) G. PEYRONEL, questi « Rendiconti », vol. XVI, fasc. 1, pp. 78-83 (1954).

(3) W. L. ROTH, D. HARKER, « Acta Cryst. », 1, 34 (1948).

(4) D. W. J. CRUICKSHANK, « Acta Cryst. », 2, 65 (1949).

TABELLA I.

*Esametilciclotrisilossano: fattori di struttura osservati e calcolati.*

<i>hkl</i>	$F_o$	$F_c$	<i>hkl</i>	$F_o$	$F_c$	<i>hkl</i>	$F_o$	$F_c$
003	57,50	54,70	20 $\bar{1}$	15,00	17,40	211	4,28	7,12
6	15,30	15,37	2	10,64	13,78	$\bar{2}$	5,43	7,75
9	22,70	23,00	$\bar{4}$	—	9,08	4	9,64	10,17
12	18,44	19,24	5	2,76	9,50	$\bar{5}$	9,57	10,20
15	7,40	6,45	$\bar{7}$	2,67	7,80	7	8,80	8,71
18	3,24	1,51	8	2,45	6,18	$\bar{8}$	6,15	5,20
21	2,86	1,50	$\bar{10}$	2,83	5,43	10	3,74	3,49
			11	2,65	5,23	$\bar{11}$	—	2,66
110	8,90	11,18	$\bar{13}$	2,65	3,51	13	—	1,72
3	3,50	3,26	14	—	2,37			
6	10,72	12,22	$\bar{16}$	—	1,29	31 $\bar{1}$	—	2,96
9	2,60	1,74				2	—	3,12
12	2,24	2,45	300	5,00	6,75	$\bar{4}$	1,92	3,70
15	—	0,36	3	8,13	8,49	5	2,99	3,77
			6	8,78	8,98	$\bar{7}$	2,03	3,11
220	3,90	4,25	9	5,29	4,73	8	2,00	2,50
3	2,83	2,28	12	2,83	2,80	$\bar{10}$	—	1,42
6	—	0,47	15	2,83	1,44	11	—	1,10
9	—	1,18						
12	—	1,25	401	—	1,11	410	—	0,24
			$\bar{2}$	—	1,30	3	—	0,22
330	2,40	1,17	4	—	1,83	6	—	0,51
3	1,93	1,13	$\bar{5}$	—	1,96	9	—	0,16
6	1,67	0,93	7	—	1,64			
9	0,90	0,63	$\bar{8}$	—	1,26	321	2,38	1,81
			10	—	0,60	$\bar{2}$	2,43	1,63
101	37,10	34,10	$\bar{11}$	—	0,42	4	1,97	1,18
$\bar{2}$	26,10	23,10				$\bar{5}$	1,74	1,00
4	2,00	2,07	50 $\bar{1}$	—	1,70	7	1,54	0,82
$\bar{5}$	8,95	8,70	2	—	1,53	$\bar{8}$	1,25	0,80
7	4,59	5,96	$\bar{4}$	—	1,11			
$\bar{8}$	—	0,30	5	—	0,94			
10	8,72	8,30	$\bar{7}$	—	0,76			
$\bar{11}$	8,78	9,25	8	—	0,77			
13	7,62	6,08						
$\bar{14}$	5,57	3,72						
16	2,83	0,48						

Le posizioni e i parametri finali degli atomi sono:

Si ( $x\bar{x}0$ )	$x = 0,780$	
O ( $x\bar{x}0$ )	$x = 0,187$	
C ( $x\bar{x}z$ )	$x = 0,628$	$z = \pm 0,083$

e le corrispondenti distanze interatomiche e angoli di valenza sono dati dalla Tabella II.

Gli scarti quadratici medi per le distanze interatomiche e per gli angoli di valenza furono calcolati col metodo di Ahmed e Cruickshank <sup>(5)</sup>. I valori relativi a Si—C e C—Si—C sono posti tra parentesi e hanno solo valore indicativo perché, per il loro calcolo, si è dovuto far uso dello scarto quadratico medio della posizione del massimo (3C), non essendo determinabile quello di un singolo atomo di carbonio.

Tutti gli scarti quadratici medi delle distanze interatomiche e degli angoli di valenza sono stati moltiplicati per due poiché nelle strutture non-centrosimmetriche l'errore è da considerarsi doppio di quello delle strutture centrosimmetriche, come hanno dimostrato Cruickshank <sup>(6)</sup>, Luzzati <sup>(7)</sup> e Cochran <sup>(8)</sup>.

CONCLUSIONI. — La lenta convergenza delle correzioni che caratterizza le strutture non-centrosimmetriche, la sovrapposizione « statistica » dei tre massimi del carbonio che ne impedisce una risoluzione anche con sintesi Fourier tridimensionali e il disordine statistico, ma anche in parte sistematico, in quanto è disordine « per piani molecolari » in sé ordinati, rendono difficile il raggiungimento di una maggiore precisione nelle misure di distanze e di angoli. La precisione raggiunta può tuttavia essere considerata soddisfacente se si considerano lo scarto percentuale medio delle intensità osservate e gli scarti quadratici medi delle posizioni dei massimi, delle distanze interatomiche e degli angoli di valenza, che sono dell'ordine di grandezza di quelli di molti recenti lavori. Anche le correzioni per interruzione di serie date dalle sintesi ( $F_c$ ) è per tutti i massimi dell'ordine di 0,02 Å come in altre strutture organiche molto accurate <sup>(9)</sup>. Le fluttuazioni più alte delle sintesi di differenza furono osservate nelle sezioni  $\rho_d(x\bar{x}0)$  che contengono gli atomi di silicio e di ossigeno. Ciò può essere dovuto al particolare tipo di disordine di questa struttura o alla non sferica distribuzione elettronica degli atomi, implicita invece nelle curve  $f$  del fattore atomico di forma adottato. L'atomo di silicio è infatti molto polarizzabile <sup>(10)</sup>. Alle stesse cause si potrebbe attribuire l'accordo relativamente povero tra i valori di  $F_o$  e  $F_c$  della famiglia di piani 20  $l$ .

(5) F. R. AHMED, D. W. J. CRUICKSHANK, « Acta Cryst. », 6, 385 (1953).

(6) D. W. J. CRUICKSHANK, « Acta Cryst. », 3, 10 (1950).

(7) V. LUZZATI, « Acta Cryst. », 4, 367 (1951).

(8) W. COCHRAN, « Acta Cryst. », 4, 408 (1951).

(9) G. A. JEFFREY, J. S. ROLLETT, « Proc. Roy. Soc. », A, 213, 86 (1952).

(10) H. FREISER, R. CHARLES, J. SPEIER, M. EAGLE, « J. Am. Chem. Soc. », 73, 5229 (1951).



TABELLA II.

*Esametilciclotrisilossano: distanze interatomiche e angoli di valenza.*

	$\sigma$	$2\sigma$	R. e H. (3)
Si—O = 1,61 <sub>4</sub> Å	0,02 Å	0,04 Å	1,64 Å
Si—Met. = 1,99 <sub>2</sub> »	(0,02) »	(0,04) »	
Si—C = 1,93 »	(0,02) »	(0,04) »	1,88 »
M <sub>1</sub> —M <sub>2</sub> = 4,29 »			
M <sub>1</sub> —M <sub>3</sub> = 4,14 <sub>4</sub> »			
M <sub>1</sub> —M <sub>4</sub> = 4,46 »			
M <sub>2</sub> —M <sub>3</sub> = 4,18 »			
(M—M) <sub>media</sub> = 4,26 <sub>8</sub> »			4,20 »
O—Si—O = 104°	0° 57'	1° 54'	108°
Si—O—Si = 136°	0° 25'	0° 50'	130°
C—Si—C = 106° 36'	(0° 48')	(1° 36')	106°

Come mostra il confronto della Tabella II alcuni dei valori di distanze interatomiche e di angoli di valenza trovati in questa ricerca sono in buon accordo con quelli di Roth e Harker per l'octometilspiro [5,5] pentasilossano <sup>(3)</sup>. Non verranno presi in considerazione, nella discussione che segue i valori di Aggarwal e Bauer ottenuti per il vapore dell'esametilciclotrisilossano <sup>(11)</sup> con diffrazione di raggi di elettroni, dato il diverso stato fisico in cui fu indagata la molecola e le ben note difficoltà nell'ottenere informazioni precise con questo metodo.

La distanza Si—O=1,61 Å, inferiore alla somma 1,83 Å dei raggi covalenti del silicio e dell'ossigeno, ma prossima ai valori 1,60 trovato per molti silicati <sup>(12)</sup> e 1,63 per la cristobalite <sup>(13)</sup>, come pure l'angolo di legame Si—O—Si=136°, superiore sia al valore teorico 90° per un legame covalente  $\rho$  dell'ossigeno sia ai valori 100°–115° trovati per altri angoli di valenza dell'ossigeno <sup>(14)</sup>, sono una conferma del carattere fortemente ionico del legame

(11) E. H. (WELLER) AGGARWAL, S. H. BAUER, « J. Chem. Phys. », 18, 42 (1950).

(12) L. PAULING, *Nature of the chemical bond*, II ed., Cornell Univ. Press, Ithaca, 1948, p. 240.(13) A. F. WELLS, *Structural inorganic chemistry*, Clarendon Press, Oxford, 1946, p. 465.

(14) L. PAULING, loc. cit., p. 79.

silicio-ossigeno, valutato a 50 % da Pauling <sup>(15)</sup> e 37 % da Sauer e Mead <sup>(16)</sup> in base ad una nuova relazione tra carattere ionico ed elettronegatività data da Hannay e Smith <sup>(17)</sup>. L'angolo di legame dell'ossigeno può assumere valori anche maggiori: circa 150° nella cristobalite secondo Nieuwenkamp <sup>(18)</sup>, e, in base a misure di momenti dipolari, 160° ± 15° nei polisilossani lineari secondo Sauer e Mead <sup>(16)</sup> e 131° nell'esametildisilossano secondo Freiser, Eagle e Speier <sup>(19)</sup>. Per l'esametildisilossano, Yamasaki e Coll. <sup>(20)</sup> hanno pure trovato, con raggi elettronici, il valore 130° ± 10°. La determinazione roentgenografica di quest'angolo di valenza nei silossani lineari potrebbe stabilire, più esattamente di quanto lo consentano gli altri metodi finora usati per la valutazione di questo angolo, se l'anello trisilossanico sia o non sotto tensione. Il fatto che sia nell'octometilspiro [5,5] penta-silossano sia nell'esametilciclotrisilossano quest'anello è perfettamente planare dimostra comunque che l'angolo Si—O—Si non sotto tensione non può essere di molto inferiore a 136° perché altrimenti esso sarebbe raggrinzato.

La distanza Si—C = 1,99 Å è più vicina alla somma 1,94 dei raggi covalenti del silicio e del carbonio che non al valore 1,88 dato da Roth e Harker e da essi interpretato come dovuto al carattere parzialmente ionico di questo legame, valutabile a 12 % con Pauling <sup>(21)</sup> e a 13 % con la nuova espressione di Hannay e Smith <sup>(17)</sup>. Per quanto lo scarto quadratico medio di questo legame non sia direttamente calcolabile in questa struttura a causa della sovrapposizione dei tre massimi di carbonio, e quello valutato sia stato dato solo come indicativo, numerose altre prove sono concordi nel far considerare il valore 1,99 Å come altamente attendibile: *a*) la decomposizione del massimo (3C) (F<sub>o</sub>) precedentemente discussa, *b*) lo spostamento relativo dei due massimi (3C) (F<sub>o</sub>) e (3C) (F<sub>c</sub>), *c*) la pendenza della curva  $\rho_d$  nella sintesi di differenza, *d*) il sensibile miglioramento del fattore di disaccordo dei fattori di struttura da 19,18 a 18,58 aumentando la distanza Si—C da 1,97 Å ( $x_C = 0,633$ ) a 1,99 Å ( $x_C = 0,628$ ).

La distanza 1,99 Å è stata fin qui considerata come distanza Si—C, trascurando la posizione dei tre atomi di idrogeno del gruppo metilico, i quali sono situati in un piano normale all'asse del legame Si—C, esternamente a questo, a una distanza di 0,36 Å dall'atomo di carbonio. Conseguentemente a ciò il *baricentro elettronico* del gruppo CH<sub>3</sub> non è al centro dell'atomo di carbonio (anche se questo viene assunto come perfettamente sferico) ma si trova spostato, esternamente al legame Si—C, di 0,06 Å rispetto al centro del carbonio.

(15) L. PAULING, loc. cit., p. 74.

(16) R. O. SAUER, D. J. MEAD, « J. Am. Chem. Soc. », 68, 1794 (1946).

(17) N. B. HANNAY, C. P. SMITH, « J. Am. Chem. Soc. », 68, 171 (1946).

(18) W. NIEUWENKAMP, « Z. Krist. », 92, 82 (1935).

(19) H. FREISER, M. V. EAGLE, J. SPEIER, « J. Am. Chem. Soc. », 75, 2824 (1953).

(20) YAMASAKI, KOTERA, YOKOI, UEDA, « J. Chem. Phys. », 18, 1414 (1950).

(21) L. PAULING, loc. cit., p. 70.

Sottraendo questo valore dalla distanza silicio-metile (considerato quest'ultimo nel suo baricentro elettronico) si ha il nuovo valore di

$$\text{Si}-\text{C} = 1,99 - 0,06 = 1,93 \text{ \AA}$$

che corrisponde alla somma dei raggi covalenti dei due atomi ma è ancora superiore ai valori 1,88 - 1,90 dati <sup>(22)</sup> per altri composti.

Il valore più accurato della distanza tra due gruppi metilici appartenenti a molecole diverse è dato dalla distanza  $M_1-M_3=4,14 \text{ \AA}$  (Tabella II e fig. 1). Esso è infatti calcolabile per questa coppia di atomi dall'espressione:

$$M_1-M_3 = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - 2z_C\right)^2}$$

che dipende solo dal parametro  $z_C$  che fu accuratamente determinato dalle intensità calcolate per i riflessi  $00l$ , e dalle costanti  $a$  e  $c$  della cella, pure accuratamente determinate col metodo di Straumanis. Il valore  $4,14 \text{ \AA}$  come pure il valore medio  $4,27 \text{ \AA}$  sono in buon accordo col valore medio

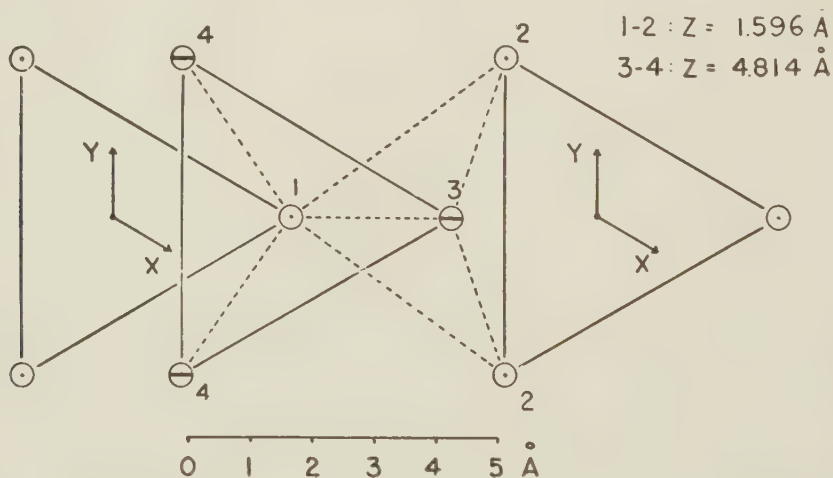


Fig. 1. - Relazioni spaziali tra i gruppi metilici  $M_1, M_2, M_3, M_4$  di due strati reali sovrapposti di molecole a  $z=0$  e  $z=1/3$ .

(ved. Tabella II)

4,20 di Roth e Harker. Questo valore leggermente più grande del valore medio 4,00 trovato in altri cristalli, è stato interpretato da Roth e Harker come dovuto al maggior ingombro spaziale che il gruppo metilico avrebbe per effetto della sua rotazione in un'orbita di precessione del legame Si-C intorno alla sua posizione di equilibrio. Tale precessione causerebbe un'anisotropia del fattore termico. L'effetto di questa possibile precessione non è stato separatamente introdotto qui nel calcolo dei fattori di struttura perché già incluso, insieme ad altri fattori, nel « fattore termico » anisotropo ricavato per questa struttura.

(22) W. F. SHEEHAN, V. SCHOMAKER, « J. Am. Chem. Soc. », 74, 3956 (1952).

**Chimica fisica.** — *La suscettività magnetica del gruppo metilene negli alcoli alifatici misurata con un'apparecchiatura di alta precisione* (\*). Nota di LUIGI SACCONI e RENATO CINI, presentata (\*\*) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

La misura della suscettività magnetica del gruppo  $>\text{CH}_2$ , in quanto costituisce il punto di partenza per la determinazione di tutte le suscettività atomiche, è stata effettuata più volte da numerosi ricercatori. Tuttavia la precisione ottenuta nella determinazione di questa grandezza è risultata sempre piuttosto bassa. Infatti, siccome il valore di  $\chi_{\text{CH}_2}$  si ottiene per differenza fra i valori delle suscettività molari di due termini omologhi, una cifra significativa viene perduta nell'operazione; e poiché le misure di diamagnetismo su liquidi organici fin qui eseguite risultano in generale affette da un errore non inferiore all'1 ‰, l'errore nel valore di  $\chi_{\text{CH}_2}$  risulta in genere dell'ordine dell'1 ‰, cioè a dire esso cade nella prima cifra decimale di questa grandezza, come si può verificare dalla tabella I, riportata da Klemm [1].

TABELLA I.  
*Diamagnetismo del gruppo  $\text{CH}_2$ .*

AUTORE	$\text{HC}_2$	errore %
1910 Pascal [2] . . . . .	11,86	1,5
1927 Vaidyanathan [3] . . . . .	11,2	—
1929 Bitter [4] . . . . .	14,5	7,3
1934 Cabrera e Fahlenbach [5]. . . . .	11,48	2,3
1934 Bhatnagar, Mitra e Tuli [6] . . . . .	11,36	0,9
1935 Gray e Cruickshank [7] . . . . .	11,86	—
1935 Woodbridge [8] . . . . .	11,67	2,1
1936 Bhatnagar e Mitra [9] . . . . .	11,68	2,1
1937 Farquharson e Sastri [10] . . . . .	11,64	1,6
1943 Angus e Hill [11] . . . . .	11,68	1,4
1947 Broersma [12] . . . . .	11,37	—

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università di Firenze col contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.



Disponendo noi di un'apparecchiatura di alta precisione, capace di permettere misure del diamagnetismo di liquidi con un errore pari a 1-2 per 10.000, ci siamo proposti di eseguire la determinazione dell'incremento diamagnetico del gruppo  $>\text{CH}_2$  con una precisione circa 10 volte superiore a quanto ottenuto fino ad ora, in modo da ottenere un valore di  $\chi_{\text{CH}_2}$  colla prima cifra decimale sicura.

#### PARTE SPERIMENTALE.

*Bilancia magnetica.* - L'apparecchio impiegato utilizza il metodo di Faraday in quanto che esso ha il vantaggio di richiedere solo piccole quantità di sostanza, della quale, inoltre, non è necessario misurare la densità.

La parte essenziale dell'apparecchiatura, già descritta estesamente altrove [13] e illustrata nella figura 1, consiste di una bilancia di torsione monofilare verticale che misura direttamente la forza agente sulla sostanza in esame, immersa in un campo magnetico inhomogeneo a gradiente lineare.

Le misure vengono eseguite con metodo di zero, ruotando cioè la fibra di quarzo mediante una testa di torsione meccanica fino a riportare il giogo della bilancia, e quindi il flaconcino colla sostanza sottoposta all'azione del campo magnetico, nella posizione primitiva, a meno di 0,005 mm. La testa di torsione è costruita in modo da poter apprezzare la rotazione di 1/20.000 di angolo giro. La lettura di zero si effettua per mezzo di un normale sistema ottico di Poggendorf, con cannocchiale e specchietto a buona superficie ottica, fissato al giogo in maniera da permettere anche il controllo del riequilibrio del giogo stesso (a meno di 0,005 mm), riequilibrio sempre necessario a causa del diverso peso delle varie sostanze su cui si effettua la misura.

Il giogo di quarzo della bilancia può essere agevolmente bloccato in posizione di riposo ed è fornito di una pesiera a ruota dentata con movimento semiautomatico per il riequilibrio. Il giogo termina in una forcella di quarzo opportunamente lavorata, su cui poggia il flaconcino di vetro contenente la sostanza, in modo da realizzare il classico sistema rigido su tre punti che garantisce l'identità della posizione del recipiente a meno di 0,002 mm. Lo smorzamento del giogo è ottenuto con un sistema elettromagnetico col quale si regola anche la sensibilità.

Il campo magnetico, ottenuto mediante un magnete permanente di alnico, ha il valore di 2000 gauss in un intraferro di aria di  $1 \times 1 \times 4$  cm, ed una costanza superiore all'1 per 100.000 per un lungo periodo. Tutto l'apparecchio, e in particolare il giogo della bilancia, è protetto contro l'eventualità di sbalzi, anche minimi, di temperatura e la formazione di moti convettivi, da una spessa campana esterna di alluminio e da una serie di pesanti schermi di ottone che racchiudono le parti mobili. L'apparecchio è installato in una stanza con pareti coibenti la cui temperatura, grazie al funzionamento di un dispositivo termostatico, può rimanere costante entro  $\pm 0,05^\circ$ . Per evitare nocive influenze termiche dell'operatore sull'apparecchio, tutte

le manovre vengono eseguite mediante un impianto di servomotori comandati a distanza su di un quadro di manovra situato in un locale adiacente. I vari movimenti vengono trasmessi all'apparecchio, con esclusione di con-

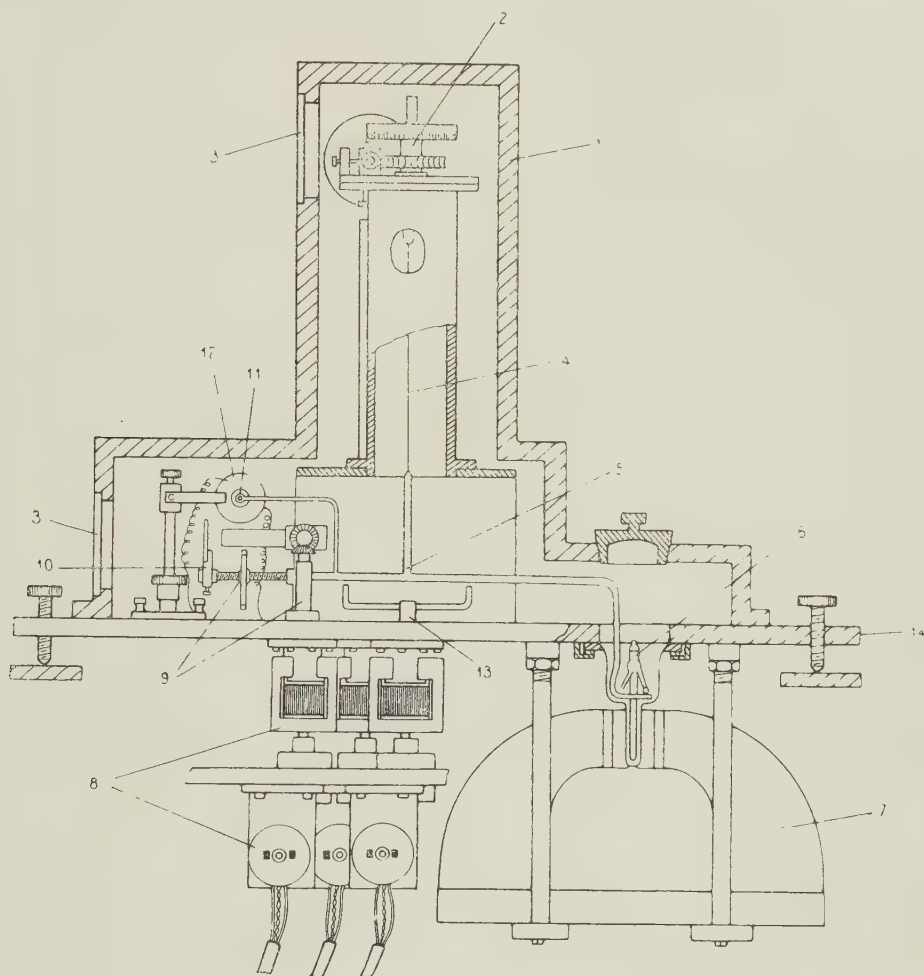


Fig. 1.

1. Campana protettiva di alluminio; 2. testa di torsione; 3. finestre; 4-5. fibra di torsione di quarzo; 6. flaconcino di vetro; 7. magnete permanente; 8. gruppo di servomotori e trasmissioni elettromagnetiche; 9. sistema per il riequilibrio del giogo; 10. specchietto; 11. ancorotta di ferro dolce per l'azzeramento e lo smorzamento elettromagnetici; 12. avvolgimento per detto; 13. sistema di bloccaggio del giogo; 14. lastra protettiva di ferro.

tatti meccanici, mediante giunti elettromagnetici schermati da una spessa lastra di ferro.

Impiegando fibre di quarzo del diametro di  $60\mu$  e della lunghezza di 16 cm, la sensibilità di questo apparecchio è di  $1,2 \cdot 10^{-5}$  dine per 1 divisione della testa di torsione, pari a  $1/10.000$  di angolo giro. La riproducibilità della lettura è dell'ordine di 0,2 per 10.000; la precisione delle misure è di 1-2 per 10.000 per liquidi diamagnetici.

*Purificazione delle sostanze.* — Le sostanze sono state purificate secondo i metodi « standard » [14] e ripetutamente rettificate con una colonna di Todd corrispondente a 40 piatti, fino a valori costanti del punto di ebollizione, della densità e dell'indice di rifrazione. La tabella II elenca i valori di tali grandezze per gli alcoli purificati, accanto ai dati più recenti della letteratura.

TABELLA II.

Alcoli	P. E. (°C./mm. Hg)		$\rho_{40}^{20}$		$n_D^{20}$	
	sper.	letter.	sper.	letter.	sper.	letter.
Metilico . . . . .	64,42/757,2	64,75/760 [15]	0,7917	0,7915 [22]	1,3289	1,3290 [22]
Etilico . . . . .	78,27/760	78,33/760 [16]	0,7909	0,78922 [23]	1,3615	1,3614 [23]
<i>n</i> -Propilico . . . .	96,9 /756,8	96,6 /756 [17]	0,8041	0,80355 [24]	1,3858	1,3854 [24]
<i>iso</i> -Propilico . . .	82,35/756,8	82,2 /760 [18]	0,7863	0,78556 [25]	1,3773	1,3775 [25]
<i>n</i> -Butilico . . . . .	117,25/757,7	117,8 /760 [19]	0,8099	0,8097 [26]	1,3994	1,3994 [26]
<i>iso</i> -Butilico . . . .	108,0 /757,5	108,05/758 [20]	0,8019	0,80186 [27]	1,3962	1,3959 [27]
<i>sec</i> -Butilico . . . .	99,0 /759,9	99,0 /760 [21]	0,8063	0,8063 [28]	1,3974	1,3973 [28]

*Misura della suscettività.* — La precisione nella misura di  $\chi_g$ , il cui valore è funzione del rapporto *massa/rotazione* della testa di torsione per la sostanza in esame e per il liquido campione (acqua), è mostrata nella tabella III che si riferisce all'alcol metilico.

TABELLA III.

*Dati per la misura di  $\chi_g$  per l'alcol metilico.*

$m$ (grammi)	$r$ (divis.)	$r/m$	$-\chi_g \cdot 10^6$	$\Delta$
0,44510	30110	67648	0,67414	+ 0,00002
0,44319	29981	67648	0,67414	+ 0,00002
0,44429	30051	67638	0,67404	— 0,00008
0,44625	30190	67652	0,67418	+ 0,00006

Il valore di  $\chi_g$  fu determinato almeno 4 volte per ogni sostanza, effettuando, per ogni misura, un riempimento diverso del flaconcino. L'errore

percentuale non fu mai superiore a 2 per 10.000. I dati ottenuti sono raccolti nella tabella IV in cui  $\Delta$  indica l'errore medio  $\sqrt{\sum \Delta^2 / n(n-1)}$ .

TABELLA IV.

Alcooli	$t^\circ$	$-\chi_g \cdot 10^6$	$\Delta$	$-\chi_M \cdot 10^6$	$\Delta$
Metilico . . . . .	20	0,67412	$\pm 0,00003$	21,600	$\pm 0,001$
Etilico . . . . .	20	0,72831	$\pm 0,00003$	33,552	$\pm 0,003$
<i>n</i> -Propilico . . . . .	20	0,75175	$\pm 0,00002$	45,176	$\pm 0,001$
<i>iso</i> -Propilico . . . . .	20	0,76203	$\pm 0,00001$	45,794	$\pm 0,001$
<i>n</i> -Butilico . . . . .	20	0,76276	$\pm 0,0001$	56,536	$\pm 0,006$
<i>iso</i> -Butilico . . . . .	20	0,77853	$\pm 0,0001$	57,704	$\pm 0,006$
<i>sec</i> -Butilico . . . . .	20	0,77824	$\pm 0,00003$	57,683	$\pm 0,002$

DISCUSSIONE. — Per ricavare il valore di  $\chi_{CH_2}$  dai valori di  $\chi_M$  si possono impiegare due metodi, quello di Pascal [36] e quello di Farquharson e Sastri [10], che, senza dubbio, risulta più preciso.

Infatti, impiegando il metodo di Pascal, i valori dei singoli  $\chi_{CH_2}$  si ottengono sottraendo il valore di  $\chi_M$  di un composto dal valore di  $\chi_M$  dell'omologo immediatamente seguente. Da questi valori si calcola poi il valore medio di  $\chi_{CH_2}$  per tutta la serie. In pratica, però, questo valore coincide con quello che si ottiene eseguendo la differenza fra le suscettività molari dell'ultimo termine e del primo, e dividendo quindi per il numero degli omologhi intermedi. In questo modo le suscettività di tutti gli altri termini rimangono completamente esclusi e quindi la precisione nel calcolo di  $\chi_{CH_2}$  dipende solo dalla precisione nel valore di  $\chi_M$  del primo e dell'ultimo termine della serie. Nel nostro caso il valor medio così ottenuto per  $\chi_{CH_2}$  è uguale a  $-11,64 \cdot 10^{-6}$ .

Secondo il metodo di Farquharson e Sastri, invece, tutti i valori di  $\chi_M$  vengono adoperati per il computo di  $\chi_{CH_2}$ . Infatti ogni valore di  $\chi_M$  viene riportato sulle ordinate di un diagramma, mentre sulle ascisse si segna il numero  $n$  dei gruppi  $CH_2$  presenti nella molecola. Per interpolazione si ottiene così una linea retta che può essere rappresentata dall'equazione  $\chi_M = n\chi_{CH_2} - b$ , dove  $b$  ordinata all'origine, rappresenta la suscettività del termine della serie corrispondente a  $n = 0$ . Sottraendo questo valore di  $b$  da ogni  $\chi_M$  si ottiene il contributo dovuto a  $n\chi_{CH_2}$ , da cui, dividendo per  $n$ , si ricava l'incremento diamagnetico del gruppo  $CH_2$ .

Nel nostro caso il valore di  $b$  risulta pari a  $-10,10$ . Il valore di  $\chi_{CH_2}$  è uguale quindi a  $-11,63 \cdot 10^{-6}$ .

La tabella V riporta i dati relativi a questa determinazione.



TABELLA V.

*Alcooli normali con formula generale  $(\text{CH}_2)_n\text{HOH}$* 

$n$	$-\chi_M$	$-b$	$-n\chi_{\text{CH}_2}$	$-\chi_{\text{CH}_2}$
1	21,60	10,10	11,50	11,50
2	33,55	10,10	23,45	11,72
3	45,17	10,10	35,07	11,69
4	56,53	10,10	46,43	11,61
Valor medio $-\chi_{\text{CH}_2} \cdot 10^6 = 11,63$				

La correttezza del valore così ottenuto può anche essere confermata dal confronto coi valori della stessa grandezza per  $n$  uguale a 3 e 4. Sono questi infatti i valori di  $\chi_{\text{CH}_2}$  più vicini al valore vero in quanto che, nei termini con numero di  $\text{CH}_2$  elevato, l'influenza degli atomi e dei gruppi terminali H e OH si diluisce su di un numero maggiore di gruppi metilenici.

Le misure confermano che il diamagnetismo degli *iso*-alcooli è maggiore di quello degli alcooli *normali*. Per l'alcool butilico *secondario*, mentre le misure eseguite fino ad ora, comportanti incertezza nella terza cifra significativa, non rivelavano differenza nella suscettività rispetto all'alcool *iso*-butilico, le presenti misure, che forniscono sicura la terza cifra significativa, hanno indicato che il diamagnetismo di questo alcool è minore di quello dell'alcool *iso*-butilico. In questo modo, anche per questo termine della serie degli alcooli isomeri, si riscontra che il diamagnetismo aumenta col diminuire della densità e dell'indice di rifrazione.

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] LANDOLT-BOERNSTEIN, *Zahlenwerte und Functionen*, Springer-Verlag, Berlino 1951, I Band, Atom- und Molekularphysik, 3 Teil, Molekeln II, p. 532.
- [2] P. PASCAL, «Ann. Chim. Phys.», 19, 5 (1910).
- [3] V. VAIDYANATHAN, «Phys. Rev.», 30, 512 (1927).
- [4] F. BITTER, «Phys. Rev.», 33, 389 (1929).
- [5] B. CABRERA e H. FAHLENBRACH, «Z. Physik», 85, 568 (1933).
- [6] S. S. BHATNAGAR, N. G. MITRA e G. D. TULI, «Phil. Mag.», 18, 449 (1934).
- [7] F. W. GRAY e J. H. CRUICKSHANK, «Trans. Faraday Soc.», 31, 1491 (1935).
- [8] D. B. WOODBRIDGE, «Phys. Rev.» (2), 48, 672 (1935).
- [9] S. S. BHATNAGAR e N. G. MITRA, «J. Indian Chem. Soc.», 13, 329 (1936).
- [10] J. FARQUHARSON e M. V. C. SASTRI, «Trans. Faraday Soc.», 33, 1472 (1937).
- [11] W. R. ANGUS e W. K. HILL, «Trans. Faraday Soc.», 39, 185 (1943).
- [12] S. BROERSMA, *Magnetic Measurements on Organic Compounds*, M. Nijoff, Hague 1947.
- [13] R. CINI e L. SACCONI, «J. Sci. Instr.», 31, 56 (1954).

- [14] Cfr. J. TIMMERMANS, *Physico-chemical constants of pure organic compounds*, Elsevier Publ. Co. Inc., New York 1950.
- [15] H. T. BRISCOE e W. T. RINCHART, « J. Phys. Chem. », **46**, 387 (1942).
- [16] C. B. KRETSCHMER e R. WIEBE, « J. Am. Chem. Soc. », **71**, 1793, 3176 (1949).
- [17] A. ARBUSOW, « Z. Phys. Chem. », **131**, 55 (1928).
- [18] GINNINGS e R. J. CORRUCINI, « Ind. Eng. Chem. », **40**, 1990 (1948).
- [19] A. S. BRUNJES e M. J. P. BOGART, « Ind. Eng. Chem. », **35**, 256 (1943).
- [20] HIROBE, « Chem. Zentr. », **II**, 1383 (1926).
- [21] D. F. HOUSTON, « J. Am. Chem. Soc. », **55**, 4131 (1933).
- [22] H. H. LOWRY, « J. Chem. Soc. », **105**, 91 (1914).
- [23] T. W. RICHARDS e H. M. CHADWELL, « J. Am. Chem. Soc. », **47**, 2287 (1925).
- [24] E. BERNER, « Z. Phys. Chem. », (A) **141**, 107 (1929).
- [25] LEBO, « J. Am. Chem. Soc. », **43**, 1005 (1921).
- [26] G. W. A. KAHLBAUM, « Z. Phys. Chem. », **26**, 646 (1898).
- [27] T. BYLEWSKY, « Roczniki Chem. », **12**, 311 (1932).
- [28] W. W. CLOUGH e C. O. JONES, « Ind. Eng. Chem. », **15**, 1031 (1923).
- [29] JAHN, « Wied. Ann. », **43**, 301 (1891).
- [30] D. L. POLLOCK, A. R. COLLETT e C. L. LAZZELL, « J. Phys. Chem. », **50**, 23 (1946).
- [31] J. W. BRUEHL, « Ann. », **200**, 174 (1880).
- [32] BENNET e GARRAT, « Parfum. essent. Oil. Rac. », **16**, 18 (1925); cfr. « Beilstein », **I**, 376 (1941).
- [33] ENGEL, « J. Am. Chem. Soc. », **51**, 2651 (1929).
- [34] W. LONGINOW e A. PRJANISCHNIKOW, « Trans. Inst. Pure Chem. Reagents » of Moscow, **12**, 48 (1931); cfr. TIMMERMANS, *ibid.*, p. 322.
- [35] A. FAILLEBIN, « Ann. Chim. », (10), **4**, 170 (1925); cfr. « Beilstein », **I**, 401 (1941).
- [36] P. PASCAL, « Ann. Chim. », **19**, 5 (1911).

### Chimica. — *Spettro Raman e ultrarosso dell' $\alpha$ -acetiltiofene* (\*).

Nota di PAOLO CHIORBOLI e PAOLO MIRONE, presentata (\*\*) dal Socio G. B. BONINO.

Proseguendo in una serie di ricerche sui derivati degli eterocicli pentaatomici pirrolo, tiofene e furano, presentiamo in questa Nota i risultati ottenuti da uno studio comparativo degli spettri Raman e ultrarossi dell' $\alpha$ -acetiltiofene.

L'esame, eseguito da Bonino e collaboratori, di alcuni derivati carbonilici di queste classi di composti ( $\alpha$ -pirroldeide <sup>(1)</sup>,  $\alpha$ -acetilpirrolo <sup>(2)</sup>, aldeide furilica <sup>(3)</sup>,  $\alpha$ -acetilfurano <sup>(4)</sup>,  $\alpha$ -tiofenaldeide <sup>(5)</sup>) aveva rivelato, special-

(\*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi di Chimica fisica del C.N.R. nell'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) P. CHIORBOLI e F. MORELLI EMILIANI, *Spettro Raman*. « Gazz. Chim. Ital. », **81**, 906 (1951); P. MIRONE, *Spettro u.r.* Lavoro in corso di pubblicazione.

(2) G. B. BONINO e P. CHIORBOLI, *Spettro Raman*. « Rend. Accad. Lincei », **VIII**, 10, 104 (1951); P. MIRONE, *Spettro u.r.* Lavoro in corso di pubblicazione.

(3) M. ROLLA e P. CHIORBOLI, *Spettro Raman*. « Gazz. Chim. Ital. », **79**, 513 (1949); P. MIRONE, *Spettro u.r.* Lavoro in corso di pubblicazione.

(4) P. CHIORBOLI, *Spettro Raman*. « Rend. Accad. Lincei », **VIII**, **11**, 375 (1951).

(5) P. CHIORBOLI e A. M. DRUSIANI, *Spettro Raman*. « Rend. Accad. Lincei », **VIII**, **12**, 309 (1952).

mente riguardo alla oscillazione del carbonile, talune caratteristiche, che potevano indurre a pensare, almeno in certi casi, a un'interazione di natura associativa impegnante il gruppo carbonilico, e accompagnante naturalmente la perturbazione interna dovuta alla coniugazione tra il gruppo carbonilico stesso e il nucleo pentaatomico. Le perturbazioni dell'uno e dell'altro tipo si sono potute in genere discernere studiando gli spettri Raman e ultra-

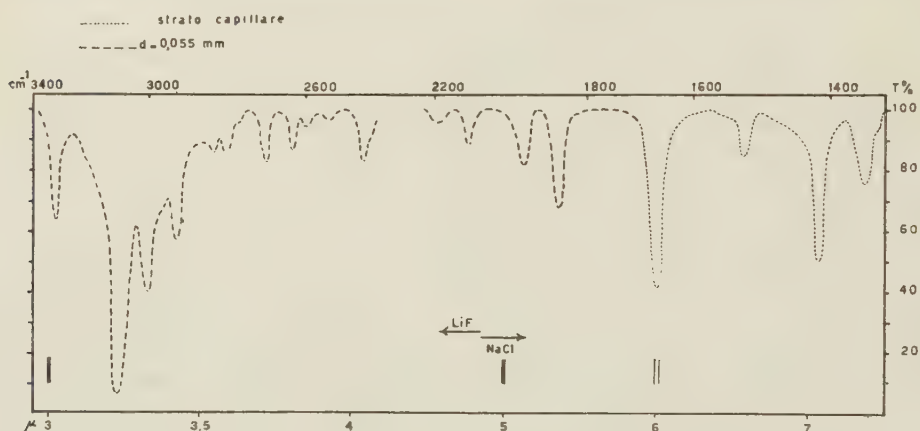


Fig. 1. - Spettro ultrarosso dell' $\alpha$ -acetiltiofene puro.

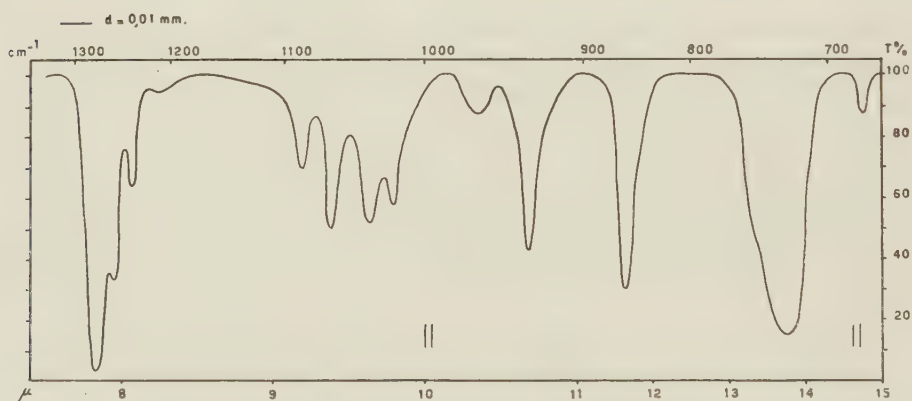


Fig. 1. - Spettro ultrarosso dell' $\alpha$ -acetiltiofene puro.

rossi dei varî composti in soluzioni a diverse concentrazioni in solventi «inerti», che consentissero cioè di eliminare via via le prime, lasciando verosimilmente inalterate le seconde.

Abbiamo ottenuto spettri Raman dell'acetiltiofene sia puro, sia in miscela con benzolo e con fenolo, e spettri ultrarossi dell'acetiltiofene puro e in soluzione di tetracloruro di carbonio. L'acetiltiofene impiegato è stato preparato, secondo il metodo descritto da «Organic Syntheses», vol. 28, p. 1, (seguendo le proposte di Alvin I. Kosak e Howard D. Hartough) basato sull'azione dell'anidride acetica sul tiofene in presenza di acido fosforico

all'85 %. Questo composto è stato preparato nel Laboratorio di Chimica Organica di questo Istituto dalla sig.na prof. Elisa Ghigi, che ringraziamo vivamente. Il composto è stato purificato prima di ogni esperienza per ripetute distillazioni a pressione ridotta. Gli spettri Raman sono stati ripresi con uno spettrografo ARL a tre prismi con apertura  $f/3$  e dispersione media di  $20 \text{ \AA/mm}$  nel campo spettrale che interessa l'eccitazione mediante la riga a  $4358 \text{ \AA}$  del mercurio. Detto spettrografo è fornito di una sorgente luminosa di grande intensità, costituita da una lampada elicoidale a vapori di mercurio a pressione ridotta, che dà uno spettro molto puro ed esente da fondo.

Gli spettri ultrarossi sono stati ripresi con uno spettrofotometro Beckman I R 2 a registrazione diretta, con ottiche in fluoruro di litio e in sal-

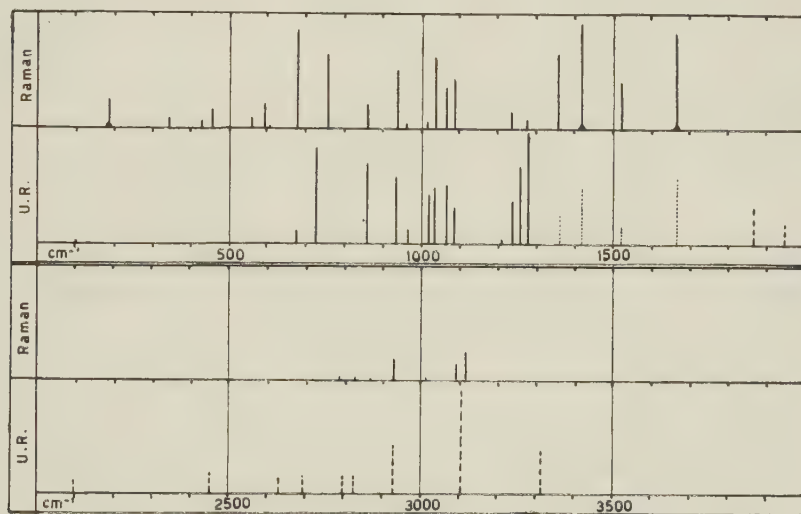


Fig. 2. - Spettro Raman e u.r. dell' $\alpha$ -acetiltiofene puro.

gemma. I risultati sono riportati nelle tabelle I e II, insieme con gli spettri del tiofene, e in fig. 1 e 2.

Da un esame anche sommario si rileva facilmente che tutte le principali righe caratteristiche del nucleo tiofenico sono presenti, con intensità assai notevole o addirittura dominante, negli spettri Raman e ultrarossi dell' $\alpha$ -acetiltiofene, senza manifestare sensibili variazioni nella loro posizione rispetto alle corrispondenti righe proprie del nucleo del tiofene.

Ma in modo particolare ci interessa fissare ora la nostra attenzione sulla riga caratteristica del gruppo  $C=O$ , per la sua sensibilità ai fenomeni di perturbazione di cui si diceva in principio. Questa riga cade per l' $\alpha$ -acetiltiofene a  $1660 \text{ cm}^{-1}$  in Raman e  $1661 \text{ cm}^{-1}$  in u.r., in una posizione cioè già notevolmente bassa, che rivela una notevole perturbazione del carbonile, indotta dalla coniugazione del nucleo tiofenico, così come nell'acetofenone la frequenza carbonilica è depressa dalla coniugazione col nucleo benzenico ( $1680 \text{ cm}^{-1}$ ).



TABELLA I.

Tiofene (Raman) <sup>(1)</sup>	$\alpha$ -Acetiltiofene (Raman)	$\alpha$ -Acetiltiofene (U. R.)	Tiofene (U. R.) <sup>(2)</sup>
—	185 (4 dif)		
—	341 ( $1 \frac{1}{2}$ )		
—	426 (1)		
452 (1)	454 ( $2 \frac{1}{2}$ )		
566 (0)	556 ( $1 \frac{1}{2}$ )		
606 (4)	592 ( $3 \frac{1}{2}$ )		
—	604 (0?)		605 (d)
692 (0)	677 (13)	675	—
—	—	—	710 (ff)
749 (2)	753 (10)	726 (9)	—
832 (10)	—	—	836 (f)
867 ( $\frac{1}{2}$ )	857 ( $3 \frac{1}{2}$ )	859 (7)	870 (d)
898 (0)	—	—	904 (d)
—	936 (8)	935 (6)	—
—	961 (1)	964 ( $1 \frac{1}{2}$ )	—
—	1014 (1)	1020 (4)	—
1031 (8)	1035 ( $9 \frac{1}{2}$ )	1036 (5)	1035 (f)
—	1062 ( $5 \frac{1}{2}$ )	1064 (5)	—
1079 (8)	1085 (7)	1087 (3)	1080 (f)
1131 (0)	—	—	—
—	—	1209 ( $\frac{1}{2}$ )	—
—	1235 ( $2 \frac{1}{2}$ )	1238 (4)	—
—	—	1258 (7)	1255 (f)
—	1273 ( $1 \frac{1}{2}$ )	1277 (10)	1290 (d)
1357 (8)	1356 (10)	1359 (2)	—
1405 (8)	1415 (14 dif)	1416 (5)	1405 (f)
—	1516 ( $6 \frac{1}{2}$ )	1520 ( $1 \frac{1}{2}$ )	
—	1660 (13 dif)	1661 (6)	
—	—	1866 (3)	
—	—	1949 (2)	
—	—	2092 (1)	
—	—	2448 (2)	
—	—	2628 ( $1 \frac{1}{2}$ )	
—	—	2690 (2)	
—	2784 ( $\frac{1}{2}$ ?; + Hg)	2792 ( $1 \frac{1}{2}$ )	
—	2823 ( $\frac{1}{2}$ )	2820 ( $1 \frac{1}{2}$ )	
—	2862 (0?)	—	
2920 (0 dif)	2923 (3)	2924 (4)	
3003 ( $1 \frac{1}{2}$ )	3008 ( $\frac{1}{2}$ )	3006 (6)	
3085 (4)	3088 ( $2 \frac{1}{2}$ dif)	—	
3113 (8)	3105 (4 dif)	3100 (9)	3110 (f)
—	—	3309 (4)	—

(1) G. B. BONINO e R. MANZONI, «Ricerca Sci.», [II], 7, I, 315 (1936).

(2) H. W. THOMPSON e R. B. TEMPLE, «Trans. Faraday Soc.», 41, 27 (1945).

(3) Zona mancante di corrispondenze.

TABELLA II.

 $\alpha$ -Acetiltiofene.

in benzolo ( $\gamma = 0,106$ ) Raman	in benzolo ( $\gamma = 0,058$ ) Raman	in fenolo ( $\gamma = 0,51$ ) Raman	in fenolo ( $\gamma = 0,25$ ) Raman	in CCl <sub>4</sub> ( $\gamma = 0,12$ ) U.R.
188 (3)	186 (1)	189 (4)	187 (3 $\frac{1}{2}$ )	
345 (1)	—	345 (1 $\frac{1}{2}$ )	345 (1 $\frac{1}{2}$ )	
423 ( $\frac{1}{2}$ )	—	424 (1)	424 (1)	
455 (1 $\frac{1}{2}$ )	455 (1)	456 (2)	455 (1)	
558 ( $\frac{1}{2}$ )	—	560 (2)	560 (1 $\frac{1}{2}$ )	
595 (5) (1)	596 (4) (1)	595 (2)	595 (1 $\frac{1}{2}$ )	
680 (3 $\frac{1}{2}$ )	679 (1)	680 (9)	680 (6)	
753 (1 $\frac{1}{2}$ )	751 (1)	752 (8 $\frac{1}{2}$ )	755 (5 $\frac{1}{2}$ )	
860 (1 $\frac{1}{2}$ )	860 (1)	860 (2)	860 (1)	
937 (2 $\frac{1}{2}$ )	937 (2)	940 (7)	938 (4)	
1038 (1 $\frac{1}{2}$ )	1038 (1)	1036 (8)	1037 (6 $\frac{1}{2}$ )	
1062 ( $\frac{1}{2}$ )	1065 ( $\frac{1}{2}$ )	1065 (4 $\frac{1}{2}$ )	1063 (2 $\frac{1}{2}$ )	
1089 (1 $\frac{1}{2}$ )	1086 (1)	1088 (6)	1086 (3)	
1237 (1 $\frac{1}{2}$ )	—	1235 (3)	1237 (2)	
1357 (3)	1357 (2)	1359 (8 $\frac{1}{2}$ )	1357 (6 $\frac{1}{2}$ )	
1418 (10)	1416 (7)	1416 (13)	1418 (12)	
1517 (2)	1516 (1 $\frac{1}{2}$ )	1518 (4)	1518 (3)	
1668 (5 $\frac{1}{2}$ )	1668 (4 $\frac{1}{2}$ )	1645 (10)	1647 (8 $\frac{1}{2}$ )	
—	—	—	—	2625 ( $\frac{1}{2}$ )
—	—	—	—	2684 ( $\frac{1}{2}$ )
—	—	2864 (0 ?)	—	—
2925 (2)	2925 (2)	2925 (3)	2925 (2)	2923 (1 $\frac{1}{2}$ )
—	—	—	—	2964 (1)
—	—	3010 (0)	—	3005 (1 $\frac{1}{2}$ )
3088 (1 $\frac{1}{2}$ )	—	3086 (1)	—	3088 (2 $\frac{1}{2}$ )
3106 (1 $\frac{1}{2}$ )	3108 (1 $\frac{1}{2}$ )	3105 (2 $\frac{1}{2}$ )	3108 (2 $\frac{1}{2}$ )	—
—	—	—	—	3320 (1)

 $\gamma$  = frazione molecolare dell' $\alpha$ -acetiltiofene.(1) Riga dell' $\alpha$ -acetiltiofene e del benzolo (intensità esaltata).

A differenza di quanto avviene nelle aldeidi tiofenica e furilica, la riga carbonilica si presenta semplice sia in Raman che in u.r., come avviene anche per l' $\alpha$ -acetilfurano.

Abbiamo ripreso anche gli spettri Raman di alcune soluzioni benzeniche a diverse concentrazioni, per vedere se la bassa frequenza del carbonile fosse

dovuta in parte a interazioni di carattere intermolecolare, le quali, se presenti, verrebbero gradualmente eliminate diluendo l'acetiltiofene in un solvente inerte. Come si può rilevare dalla tabella II, anche in soluzioni a bassa concentrazione la riga carbonilica rimane semplice e si sposta di soli  $7\text{ cm}^{-1}$  circa verso le alte frequenze. Ciò è confermato anche dallo spettro u.r. di una soluzione in tetracloruro di carbonio, dove la prima armonica della banda carbonilica, che si trova a  $3309\text{ cm}^{-1}$  nell'acetiltiofene puro, passa a  $3320\text{ cm}^{-1}$ . Uno spostamento di entità così lieve si è osservato anche in altri casi, tra cui quello dell'acetofenone <sup>(6)</sup>, in cui sono da escludersi sensibili fenomeni di interazione associativa.

La riga in questione si sposta invece di una quindicina di numeri di onda verso le basse frequenze negli spettri Raman di miscele acetiltiofene-fenolo (fig. 3), nelle quali si verificano probabilmente delle associazioni a ponte a idrogeno tra l'ossidrile fenolico e il carbonile dell'acetiltiofene.

Ringraziamo vivamente il prof. G. B. Bonino per averci suggerito l'argomento di questa ricerca, e per averci fornito utili consigli durante lo svolgimento di essa.

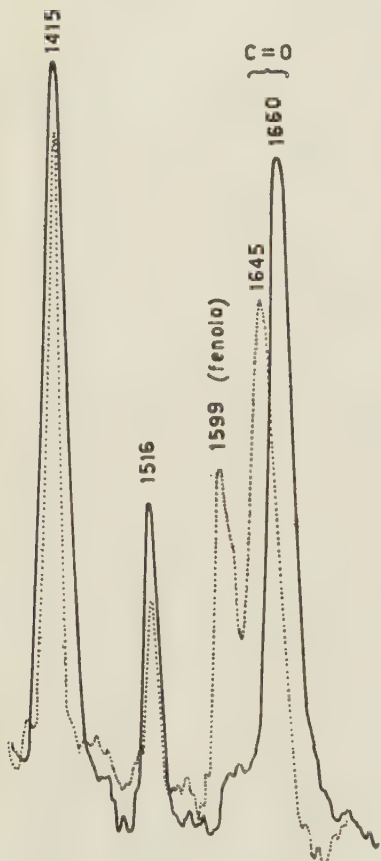


Fig. 3.

—  $\alpha$ -acetiltiofene puro  
 ....  $\alpha$ -acetiltiofene in miscela con fenolo

(6) G. B. BONINO e P. CHIORBOLI, «Memorie Accad. Sci. Bologna», X, 7, 113 (1949-1950).

**Chimica.** — *Ricerche sull'equilibrio tra il dicobalto ottacarbonile e il tricarbonile di cobalto* (\*). Nota di RAFFAELE ERCOLI e FRANCO BARBIERI-HERMITTE, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. NATTA.

È noto che nella reazione di ossosintesi (idroformilazione) vengono soprattutto impiegati come catalizzatori cobalto metallico o composti di cobalto in condizioni tali da rendere possibile la formazione di composti carbonilici di cobalto.

Poiché questi ultimi sono di per sé i migliori catalizzatori per tale reazione, può apparire giustificata l'ipotesi che il vero processo catalitico sia legato alla presenza di uno o di alcuni di essi. I diversi Autori non sono concordi sul meccanismo della catalisi, e cioè se il vero catalizzatore della reazione sia il dicobalto ottacarbonile  $[\text{Co}(\text{CO})_4]_2$  oppure l'idrocarbonile di cobalto  $\text{HCo}(\text{CO})_4$ , mentre il tetracobalto dodecacarbonile, comunemente detto tricarbonile di cobalto,  $[\text{Co}(\text{CO})_3]_4$  è stato talvolta <sup>(1)</sup> considerato come il prodotto finale del ciclo catalitico, capace di ritrasformarsi in uno dei due composti precedentemente citati.

È stato recentemente osservato in questo Istituto <sup>(2)</sup> che la reazione di ossosintesi procede con sorprendente rapidità anche sotto pressioni di ossido di carbonio dell'ordine di 5-15 at, molto inferiori a quelle comunemente adottate, abbiamo quindi ritenuto opportuno eseguire alcune ricerche sui campi di esistenza dell'ottacarbonile e del tricarbonile di cobalto, poiché, in base alle scarse informazioni disponibili sull'argomento, l'esistenza del dicobalto ottacarbonile alle temperature dell'ossosintesi (100-120°C) potrebbe apparire incompatibile con le basse pressioni di ossido di carbonio alle quali si può realizzare l'ossosintesi con alte velocità di reazione.

In un recente lavoro di A. I. M. Keulemans <sup>(3)</sup> sono state pubblicate alcune considerazioni sull'equilibrio tra ottacarbonile, tricarbonile e idrocarbonile di cobalto in presenza di ossido di carbonio e idrogeno. Facendo passare correnti di CO e H<sub>2</sub> sotto pressione su un letto di cobalto supportato, l'Autore ha osservato che per una data pressione di H<sub>2</sub> la concentrazione di idrocarbonile di cobalto nella fase gassosa è massima a temperature e pressioni di CO ben determinate. L'Autore ritiene che il dicobalto ottacarbonile e il tricarbonile di cobalto possano essere considerati come costituenti due fasi distinte e interpreta su questa base i risultati sperimentali ottenuti.

(\*) Lavoro eseguito presso il Centro studi del C. N. R. nell'Istituto di Chimica industriale del Politecnico di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 16 gennaio 1954.

(1) H. ADKINS, G. KRSEK, « Journ. Am. Chem. Soc. », 70, 383 (1948).

(2) G. NATTA, R. ERCOLI, S. CASTELLANO, F. BARBIERI H. (lavori in corso).

(3) A. I. M. KEULEMANS, « Chemisch Weekblad », 47, 500 (1951).



CONSIDERAZIONI GENERALI. - L'equilibrio tra i due carbonili di cobalto sopra citati e l'ossido di carbonio si può rappresentare con la reazione:



L'esistenza di altri composti definiti intermedi tra i due carbonili e l'ossido di carbonio, esclusa da Mond <sup>(4)</sup> nel 1910, non è mai stata finora provata da nessun elemento sperimentale.

Poiché finora non sono stati descritti altri composti carbonilici del cobalto provenienti dall'ulteriore decomposizione del cobalto tricarbonile, abbiamo ammesso che la sua successiva decomposizione porti alla formazione di una fase solida distinta. Anche se tale fase non fosse costituita da cobalto metallico, come normalmente si suppone, ma da un carbonile inferiore, è sufficiente ai nostri fini ammettere la sua insolubilità nella fase liquida perché in un diagramma di stato il campo di esistenza del tricarbonile di cobalto + CO sia separato dal campo di esistenza dei prodotti di decomposizione del tricarbonile da un'unica curva.

D'altra parte esiste un campo di temperature e di pressioni di CO nel quale la decomposizione del tricarbonile di cobalto non può avvenire, ma sussiste invece l'equilibrio tra questo composto e il dicobalto ottacarbonile. In tale campo l'equilibrio I può essere rappresentato da una sola curva come ha ammesso Keulemans, solo nel caso che non esista solubilità del tricarbonile di cobalto nel dicobalto ottacarbonile che, come è noto, fonde a una temperatura compresa tra 51 e 53°C.

Il fatto che il tricarbonile di cobalto sia poco solubile nei comuni solventi organici non è sufficiente per escludere una sua eventuale solubilità nel «solvente» del tutto eccezionale costituito dal dicobalto ottacarbonile alla stato fuso. Poiché il ferro pentacarbonile ha azione solvente sul tricarbonile di cobalto <sup>(5)</sup> è verosimile che anche il dicobalto ottacarbonile possieda questa proprietà.

Riassumendo possiamo trattare l'equilibrio sopra indicato secondo i due casi seguenti:

a) il tricarbonile di cobalto è almeno parzialmente solubile nel dicobalto ottacarbonile fuso.

In tale caso il sistema risulta bivalente finché esistono una fase gassosa e una fase liquida (soluzione del tricarbonile nell'ottacarbonile di cobalto), per cui la pressione di CO e la temperatura potranno essere variate entro determinati limiti senza modificare il numero delle fasi presenti. Alla comparsa di una fase solida (Co elementare o tricarbonile di cobalto) il sistema, divenuto monovariante, sarebbe definito da una sola pressione di CO per ogni temperatura indipendentemente dalle masse dei composti presenti. L'invarianza sarebbe raggiunta alla precipitazione di due fasi solide, evidentemente possibile solo in un punto singolare.

(4) L. MOND, H. HIRTZ e M. DALTON COWAP, «Zeit. Anorg. Chem.», 68, 207 (1910).

(5) W. HIEBER, F. MUHLBAUER, E. A. EHMANN, «Ber.», 65, 1090 (1932).

b) Il tricarbonile di cobalto è insolubile nella massa fusa: risultano presenti una fase gassosa, una fase liquida  $[\text{Co}(\text{CO})_4]_2$  e una fase solida (tricarbonile di cobalto). Il sistema a due componenti (Co e CO) possiede un solo grado di libertà, per cui ad ogni temperatura l'applicazione di pressioni di CO diverse da quella di equilibrio provoca la scomparsa di una fase. La coesistenza del cobalto elementare in equilibrio con gli altri composti è possibile solo in un punto singolare.

Poiché il campo di temperature e pressioni che ci interessava di esaminare comprendeva temperature fino a  $150^\circ\text{C}$  e pressioni fino alle 100 at una misura diretta di solubilità presentava notevoli difficoltà sperimentali.

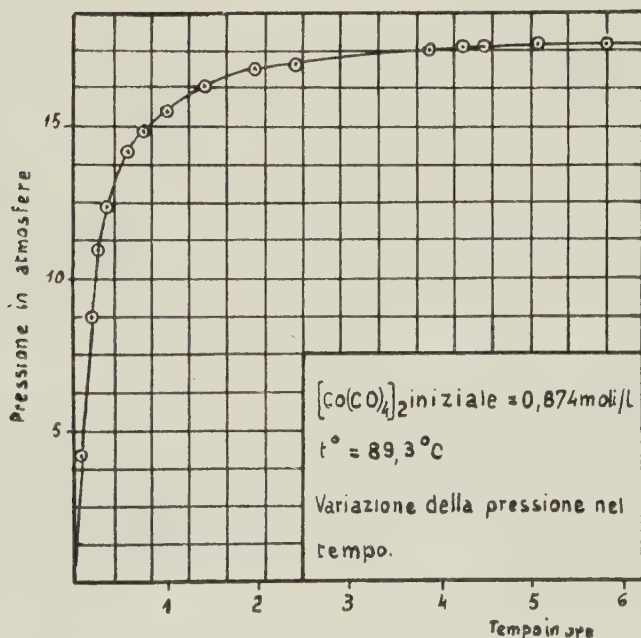


Fig. 1.

Si è affrontato perciò il problema mediante lo studio delle variazioni della pressione del sistema con la temperatura.

RISULTATI SPERIMENTALI. — Allo scopo di chiarire se fosse possibile la coesistenza del dicobalto ottacarbonile con il tricarbonile di cobalto alla stessa temperatura con diverse pressioni di CO (bivarianza del sistema) sono state eseguite due serie di determinazioni della curva temperatura/pressione riscaldando quantità diverse di dicobalto ottacarbonile in uno stesso recipiente chiuso resistente ad alte pressioni. Si è impiegata un'autoclave di acciaio inossidabile della capacità di  $67\text{ cm}^3$  provvista di manometro a grande quadrante per la lettura di pressioni da 0 a 100 at e munita di un dispositivo per l'agitazione ad oscillazione. Il manometro è stato tarato con bilancia idraulica e controllato durante le prove.

Nell'autoclave si introducevano le quantità volute di dicobalto ottacarbonile (rispettivamente gr. 12,67 per la prima prova e gr. 20,03 per la seconda prova), si allontanava l'aria sostituendola con CO a pressione atmosferica e si scaldava alla temperatura voluta immergendo l'autoclave in bagno termostattizzato entro  $\pm 0,2^\circ\text{C}$ . Si registravano quindi le variazioni di pressione in funzione del tempo dovute alla reazione:



In via preliminare è stato accertato che anche a temperature non troppo elevate si raggiungevano valori di pressione sufficientemente costanti in tempi relativamente brevi (fig. 1).

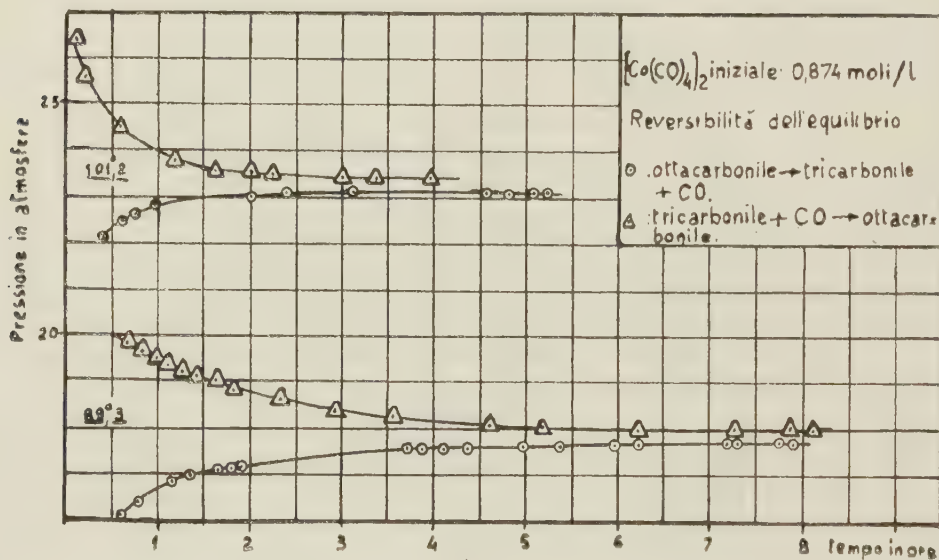


Fig. 2.

Si è inoltre dimostrato che le pressioni di equilibrio registrate per una data temperatura assumevano valori concordi entro i limiti degli errori sperimentali, sia che l'equilibrio venisse raggiunto da destra verso sinistra che nel caso opposto (fig. 2).

Come verrà precisato in seguito lo scarto di 0,3 at nella pressione totale, osservato nelle esperienze sulla riproducibilità dell'equilibrio nei due sensi, si può attribuire almeno in parte al fatto che ad alte temperature si manifesta lentamente una piccola formazione di  $\text{CO}_2$ .

Le pressioni di equilibrio sono indicate nella tabella I e rappresentate nella fig. 3 in funzione di  $1/T$ .

Dall'esame della fig. 3 e dei valori in tabella risulta che per una data temperatura si raggiungono pressioni di equilibrio diverse a seconda della quantità di dicobalto ottacarbonile impiegato e pertanto il sistema deve essere considerato bivalente. Esiste quindi un campo di temperature e pres-

sioni di CO in cui il dicobalto ottacarbonile e il tricarbonile di cobalto costituiscono un'unica fase liquida nella quale i rapporti tra le concentrazioni dei due composti sono regolati dalla legge generale dell'equilibrio chimico.

È verosimile che nel corso dell'esperienza eseguita con 12,67 gr. di dicobalto ottacarbonile (0,552 moli/litro) si sia verificata la formazione di una

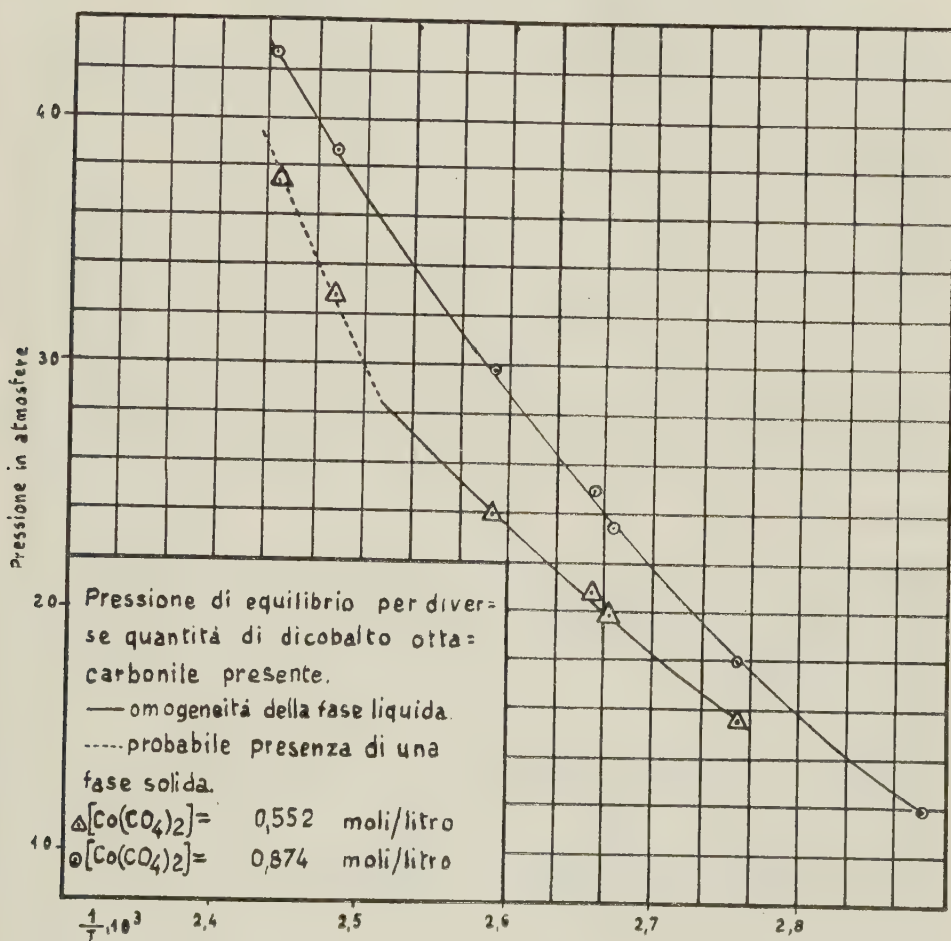


Fig. 3.

fase solida (tricarbonile di cobalto) a temperature al disopra dei 120°C, sia perché dai valori di pressione registrati a 130–137°C si può calcolare che la maggior parte del dicobalto ottacarbonile era decomposto, sia perché la curva temperatura/pressione della prima prova presenta un cambiamento di inclinazione verso i 120°C con un maggiore incremento della pressione.

Ciò non esclude affatto la validità delle nostre constatazioni sperimentali sulla esistenza di un largo campo di bivarianza del sistema. Infatti la possibilità di raggiungere pressioni diverse alla stessa temperatura è stata dimostrata direttamente introducendo CO nell'autoclave mantenuta a 137°C,



in modo da portare la pressione da 37,2 at a 52,2. La pressione iniziale è venuta diminuendo nel corso di un'ora e dieci minuti fino al valore di 41 at (fig. 4), nettamente diverso da quello precedentemente raggiunto. Ciò si

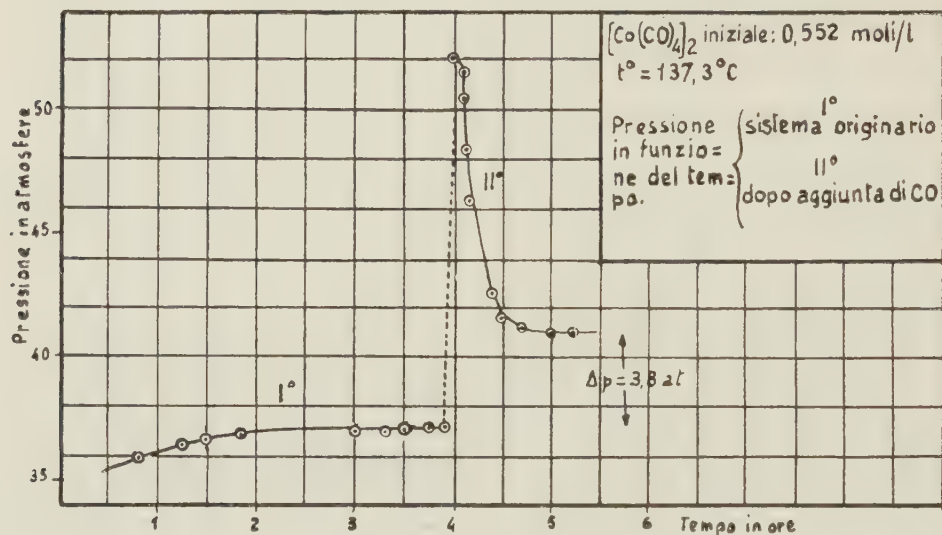


Fig. 4.

spiega agevolmente col fatto che la ricostituzione di una parte del dicobalto ottacarbonile a spese del tricarbonile di cobalto indisciolto deve aver ristabilita le condizioni di bivarianza del sistema, cioè l'esistenza di una sola fase liquida.

TABELLA I.

*Pressioni di equilibrio nella decomposizione  
del dicobalto ottacarbonile.*

[Co(CO) <sub>4</sub> ] <sub>2</sub> iniz. : 0,552 moli/l		[Co(CO) <sub>4</sub> ] <sub>2</sub> iniz. : 0,874 moli/l	
Temperatura	Pressione	Temperatura	Pressione
—	—	73,3	11,9
89,3	15,5	89,3	17,9
101,5	19,8	101,1	23,3
104,3	20,7	104,3	24,8
113,6	23,9	113,2	29,7
130,0	32,7	130,1	38,7
137,2	37,4	137,3	42,6

Nel corso della stessa esperienza è stato inoltre verificato che a  $100,2^{\circ}\text{C}$  se si abbassa la pressione al disotto di 16,3 at asportando  $\text{CO}$ , si ha decomposizione di ottacarbonile di cobalto fino a quando la pressione non raggiunge nuovamente lo stesso valore sopra indicato (sistema monovariante). È infine da osservare che i valori registrati alle temperature più elevate sono affetti da piccoli errori dovuti alla lenta formazione di  $\text{CO}_2$  riscontrata nel gas in equilibrio a  $137,3^{\circ}\text{C}$  nella misura dell'1,8 %. A tale fatto si possono attribuire le lievi discrepanze nei valori delle pressioni di equilibrio (fig. 2) che possono non essere dovute soltanto a fattori cinetici, in quanto le curve pressione/tempo per la reazione:  $\text{tricarbonile} + \text{CO} \rightarrow \text{ottacarbonile}$  a  $101,2^{\circ}\text{C}$  e a  $89,3^{\circ}\text{C}$  sono state ottenute nel raffreddamento dell'autoclave da  $137^{\circ}\text{C}$ .

Resta pertanto acquisito che il dicobalto ottacarbonile può esistere alle temperature più comunemente impiegate nella reazione di idroformilazione anche sotto pressioni di  $\text{CO}$  relativamente basse.

VALUTAZIONE APPROSSIMATIVA DEL CALORE DI REAZIONE. — Sebbene le condizioni sperimentali del lavoro sotto pressione non rendano agevole la acquisizione di dati esatti sulle pressioni di equilibrio, tuttavia è possibile stabilire un primo approssimato calcolo delle costanti di equilibrio alle varie temperature sperimentate e quindi della tonalità termica della reazione.

Nel caso della prova effettuata con una minore quantità di dicobalto ottacarbonile sono state realizzate condizioni di monovarianza del sistema a  $100,2^{\circ}\text{C}$  e alle più alte temperature, per cui a determinate pressioni di  $\text{CO}$  coesistono una fase solida ed una fase liquida. Solo nel caso che si ammetta che nel campo di temperature considerato vari di poco la composizione della fase liquida (piccola variazione di solubilità del tricarbonile con la temperatura) si potrebbe calcolare, sia pure approssimativamente, il calore di reazione dalle pressioni di equilibrio. Esso risulterebbe in tale caso di 27.000 cal. (ossia di 6.600 cal. per mole di  $\text{CO}$ ). Tale valore dovrebbe risultare inferiore al valore reale per un aumento di solubilità del tricarbonile di cobalto nella fase liquida con l'aumentare della temperatura.

Nel caso della presenza di un'unica fase liquida, è necessario conoscere, oltre alla pressione di equilibrio, anche il numero di moli di ottacarbonile e tricarbonile presenti nella soluzione. Il calcolo può essere fondato sul volume di  $\text{CO}$  sviluppato nella reazione qualora si conosca il volume della fase liquida presente e si trascuri il volume di  $\text{CO}$  fisicamente disciolto in essa.

Il volume della fase liquida è stato da noi valutato assumendo le densità di 1,8 per il tricarbonile di cobalto in soluzione e di 1,6 per il dicobalto ottacarbonile allo stato fuso. La valutazione della densità del  $[\text{Co}(\text{CO})_4]_2$  è fondata sul fatto che il solido ha  $d^{20} = 1,87^{(6)}$  e che il  $\text{Ni}(\text{CO})_4$  presenta

(6) L. CAVALCA, I. W. BASSI, « Ric. Sci. », 23, 1377 (1953).

$d^{-55} = 1,78$  (solido) <sup>(7)</sup> e  $d^{20} = 1,31$  (liquido). D'altra parte anche un errore del 10 % nella valutazione della densità non porterebbe a notevoli scarti nel calcolo del volume libero occupato dal CO gassoso dato l'alto rapporto tra il volume della fase gassosa e quello della fase liquida. Considerando come attività unitaria dell'ossido di carbonio quella che corrisponde alla pressione di 1 at e come attività unitaria del dicobalto ottacarbonile quella che corrisponde al liquido puro nelle condizioni dell'esperienza e supponendo, in mancanza di altri dati, che l'attività di ogni singola specie nella miscela liquida corrisponda alla sua frazione molare, risulta:

$$K = \frac{p_{\text{CO}}^4 \cdot \frac{q}{q+r}}{\left(\frac{r}{q+r}\right)^2}$$

dove:  $q$  ed  $r$  sono rispettivamente il numero di moli di tricarbonile e di ottacarbonile di cobalto presenti.

Si calcolano così i valori di  $K$  riportati nella tabella II.

TABELLA II.

*Costanti di equilibrio sperimentali.*

[Co(CO) <sub>4</sub> ] <sub>2</sub> iniziale : 0,552 moli/litro				[Co(CO) <sub>4</sub> ] <sub>2</sub> iniziale : 0,874 moli/litro			
Temper.	Numero di moli		K · 10 <sup>-4</sup>	Temper.	Numero di moli		K · 10 <sup>-4</sup>
	tricarbon.	ottacarb.			tricarbon.	ottacarb.	
—	—	—	—	73,3	5,20 · 10 <sup>-3</sup>	4,820 · 10 <sup>-2</sup>	0,241
89,3	7,21 · 10 <sup>-3</sup>	2,298 · 10 <sup>-2</sup>	2,35	89,3	7,74 »	4,312 »	2,16
101,5	9,02 »	1,896 »	10,79	101,1	9,95 »	3,870 »	9,51
104,3	9,40 »	1,870 »	14,40	104,3	10,55 »	3,750 »	13,67
113,6	10,70 »	1,560 »	37,7	113,2	12,48 »	3,360 »	40,8
—	—	—	—	130,1	15,79 »	2,702 »	208,0
—	—	—	—	137,3	17,20 »	2,420 »	402,0

Dai valori della prova eseguita con 0,874 moli/litro per la quale si ha un maggior numero di misure in assenza di fase solida, si desumono i valori di  $\Delta H$  elencati nella tabella III.

(7) Tale valore è dedotto dai dati röntgenografici riportati da J. LADELL, B. POST e I. FANKUCHEN, « Acta Cryst. », 5, 795 (1952).

TABELLA III.  
*Calore di reazione.*

Intervallo di temperatura	$\Delta H$
73,3-89,3	34.100 cal.
89,3-101,1	33.800 »
101,1-113,2	34.500 »
113,2-130,1	29.700 »
130,1-137,3	30.000 »

Il valore medio del calore di reazione risulta di circa 33.000 cal. e corrisponde a 8.250 cal/mole di ossido di carbonio.

**Fisiologia.** — *Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili.* — I. *Qualche rilievo a giustificazione di una ipotesi di lavoro* <sup>(\*)</sup>. Nota di AMALIA AMICI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. G. AMANTEA.

In una precedente Nota <sup>(1)</sup> sono stati riferiti i primi risultati di una serie di ricerche sperimentali eseguite iniettando a *Mus musculus*, contemporaneamente, dosi letali di stricnina e quantità determinate di adrenalina o varie sostanze adrenalinosimili.

Il trattamento veniva eseguito aspirando nella stessa siringa le dosi volute di stricnina e dell'altra sostanza a volta a volta adoperata, ed iniettando immediatamente il tutto sotto la cute del dorso dell'animale.

Delle sostanze usate, alcune ( $\alpha$ -metilammino- $\beta$ -diidrossi-3-4-fenoletanolo;  $\alpha$ -metilammino- $\beta$ -ossi-4-fenoletanolo;  $\beta$ -fenilisopropilammina; isopropiladrenalina), singolarmente associate a dosi letali di stricnina, hanno evitato, *nelle condizioni sperimentali suddette*, non solo la morte degli animali così trattati, ma altresì anche la comparsa del tetano stricnico, ritardandola nei rari casi in cui esso si manifestò. Altre invece, alle prime vicinissime

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Perugia.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) A. AMICI, *Sul comportamento di « Mus musculus » trattati con iniezione contemporanea di dosi letali di stricnina e varie sostanze adrenalinosimili.* In corso di stampa, in « Rivista di Biologia ».



per struttura chimica e per azione fisiologica ( $\alpha$ -metilammino- $\beta$ -ossi-3-fenoletanolo; paraidrossifeniletilammina; fenil-1-metilammino-2-propanolo (rac.)) hanno mostrato un comportamento assolutamente diverso.

I risultati su accennati appaiono evidentissimi nella tabella I.

TABELLA I.

Sostanze adoperate	Mortalità	Tempo medio di comparsa tetano stricnico in minuti
Stricnina nitrato (STR.) . . . . .	96	16' 49''
Str. + Isopropiladrenalina (Aleudrina) . . . . .	12,5	48' 25''
Str. + $\alpha$ -metilammino- $\beta$ -diidrossi-3-4 fenoletanolo (Adrenalina) . . . . .	0	—
Str. + $\alpha$ -metilammino- $\beta$ -ossi-4-fenoletanolo (Sympatol)	0	—
Str. + $\alpha$ -metilammino- $\beta$ -ossi-3-fenoletanolo (Adrianol)	100	135' 45''
Str. + paraidrossifenil-etilammina (Tiramina) . . . . .	100	12' 40''
Str. + fenil-1-metilammino-2-propanolo (Rac.) (Efe-tonina) . . . . .	100	45' 30''
Str. + fenil-isopropilammina (Simpamina) . . . . .	25	40'

Nella stessa precedente Nota è stato fatto rilevare che il fattore vaso-costrizione, e di conseguenza il fattore velocità di assorbimento della stricnina, non poteva in alcun modo essere chiamato in gioco per spiegare i risultati ottenuti. Basta infatti guardare, ad esempio, il comportamento del tutto opposto del sympatol e dell'adrianol, entrambi noti vasocostrittori, o quello pressoché uguale dell'adrenalina e dell'aleudrina, vasocostrittore rispettivamente e vasodilatatore, per scartarlo subito.

Altri meccanismi d'azione, dunque, bisogna ricercare; perché, è chiaro, una spiegazione deve pur esservi. E a tal fine occorrerà sperimentare nelle diverse direzioni, che questi primi risultati consigliano.

Tuttavia, prima di proseguire nell'indagine sperimentale, è opportuno soffermarsi un po' a discutere la questione, sia pure da un punto di vista strettamente teorico, al fine di porre una ipotesi di lavoro, la quale giustifichi le ulteriori ricerche.

La questione non può, a mio parere, essere risolta che seguendo tre direttrici fondamentali:

1° presenza o meno, nella configurazione chimica delle sostanze adoperate, di —OH fenolici;

2° intervento di meccanismi nervosi aventi origine in sede più alta che non il midollo spinale;

3° formazione di eventuali composti di addizione tra l'alcaloide stricnina e l'adrenalina o le sostanze adrenalinosimili adoperate.

È stato fatto rilevare nella Nota precedente, che per la scelta delle sostanze adrenalinosimili da adoperare mi ero lasciata guidare anzitutto dalla presenza, nel nucleo aromatico, di due, uno o nessun —OH fenolico, prescindendo momentaneamente dalla costituzione della catena laterale. Ciò in conseguenza delle antiche e belle osservazioni di Barger e Dale <sup>(2)</sup> e di Tiffenau <sup>(3)</sup> i quali, in una lunga ed esauriente serie di ricerche, avevano potuto mettere in evidenza tutta la importanza che spetta alle funzioni fenoliche, al loro numero, alla loro reciproca posizione, al gruppo alcoolico della catena laterale, alla lunghezza di questa, alla funzione amminica, alla reciproca posizione di queste due ultime funzioni.

Ben è vero che gli Autori succitati avevano esclusivamente scelto come test il fattore ipertensivo, e soltanto in funzione di questo avevano sperimentato. Considerando però, la reattività degli ossidrili fenolici, le differenze d'azione che il loro numero, la loro posizione, singola o reciproca, apportano nei vari composti adrenalinosimili in confronto con il simpaticomimetico classico e tipico, l'adrenalina, non è esagerato pensare che anche in altri settori, oltre a quello vascolare, essi possano svolgere eventuali azioni. E per questo le sostanze adoperate nelle precedenti ricerche e riportate nella tabella I furono scelte, ripeto, secondo il criterio di ripartizione accennato; cioè presenza e numero di —OH fenolici nell'anello aromatico.

Ai fini dell'associazione con dosi letali di stricnina, dovendosi, come si è visto, scartare il fattore *vasocostrizione*, quale spiegazione dei fatti osservati, può una tale spiegazione trovare origine nella differente costituzione dell'anello aromatico?

Difficile dirlo.

L'unita tabella II mostra sinteticamente le differenze accennate delle sostanze di cui ci si è serviti nell'esperimento.

Confrontandola con la tabella I appare subito evidente che, nei casi in cui l'effetto letale stricnico non si manifestò, o quasi, nel caso cioè della associazione della stricnina con l'aleudrina, l'adrenalina o il sympatol, prendendo quale rappresentante dell'altro gruppo l'adrianol, il più vicino alle sostanze precedenti, la diversità strutturale più importante, è la presenza dell'—OH in meta e l'assenza di quello in para dell'adrianol.

Se ci si fermasse a questo punto, sarebbe lecito concludere che l'azione, diciamo così, protettiva o antistricnica, manifestata dalle sostanze in esame, dovrebbe essere attribuita all'—OH in para. —OH in para che si ritrova, altresì,

(2) G. BARGER e H. H. DALE, *Chemical structure and sympathomimetic action of amines*. « Journ. Physiol. », 41, 19 (1910).

(3) M. TIFFENEAU, *L'adrénaline et ses groupements physiologiques actives*. « Paris medical », pp. 390-394 (1920).

nella tiramina, ma in assenza del gruppo alcoolico secondario in  $\alpha$ , la cui presenza e posizione, come risulta evidente dalle ricerche di Dakin, di Loewi e Meyer, di Barger e Dale, di Mannich e Jacobsohn, di Kobert <sup>(4)</sup>, è uno dei fattori condizionanti l'attività fisiologica dei composti adrenalinosimili.

TABELLA II.

Sostanze adoperate	—OH fenolici		—OH alcoolico	Metile (*)
	in para	in meta		
Aleudrina . . . . .	sì	sì	sì	sì
Adrenalina . . . . .	sì	sì	sì	sì
Sympatol . . . . .	sì	no	sì	sì
Adrianol . . . . .	no	sì	sì	sì
Tiramina . . . . .	sì	no	no	no
Efetonina . . . . .	no	no	sì	sì
Simpamina . . . . .	no	no	no	sì

(\*) Al termine metile si vuol dare qui solo il suo significato letterale di gruppo  $-\text{CH}_3$ , indipendentemente dall'elemento cui è legato. È ovvio infatti che ben diverso è il significato del  $-\text{CH}_3$  legato all'N da quello dei  $-\text{CH}_3$  dell'isopropile.

Ancora, nessun —OH fenolico è presente nell'efetonina, ma lo stesso può dirsi anche della simpamina: sola differenza tra le due che mentre la prima porta il gruppo alcoolico secondario in  $\alpha$ , questo non si ritrova invece nella simpamina.

Altri rilievi, al di fuori dei pochi ma obbiettivi già fatti, non credo sarebbe possibile utilmente trarre.

Ma, in conclusione, non sembra che la ricercata spiegazione possa trovarsi nel gioco degli ossidril, pur non potendo disconoscere l'importanza che ad essi spetta in genere, e che anche nel caso particolare potrebbe ad essi spettare, specie a quello in para.

Il comportamento generale degli animali trattati con l'associazione: dosi letali stricnina = sostanze adrenalinosimili, nei casi in cui l'effetto stricnico classico non si rivelò, ha mostrato l'entrata in gioco di altre sezioni del sistema nervoso centrale, al di fuori di quella puramente spinale.

(4) DAKIN, LOEWI e MEYER, MANNICH e JACOBSON, KOBERT, citati da A. TOURNADE, in *Traité de Physiologie normale et pathologique*, sotto la direzione di Roger, vol. IV, p. 507. Masson ed.

Anche se la tachipnea può essere considerata manifestazione stricnica, essa è tuttavia legata anche ad altre sostanze adoperate, quale manifestazione diretta o indiretta della loro azione sull'encefalo.

Così l'eccitamento motorio, i continui movimenti di fiuto, i giri di maneggio, i fatti spastici a volta, a volta atonici, l'adinamia, richiamano subito l'attenzione su zone nervose a sede alta.

È in particolare il diencefalo quello che appare maggiormente sollecitato dall'azione di queste sostanze.

L'osservazione è tutt'altro che nuova. Partendo dalle basi teoriche poste dai lavori di Barger e Dale, numerosi Autori cominciarono, già dal 1913, a tentare di sfruttare in terapia nervosa le proprietà fisiologiche dei simpaticomimetici e, qualcuno addirittura studiò comparativamente in clinica l'azione delle ammine e degli ammino-fenoli, seguendo gli stessi criteri direttivi che avevano guidato i due Autori inglesi nelle loro ricerche.

Si venivano a precisare, così, le azioni centrali di dette sostanze, e se ne faceva addirittura una graduatoria di attività biologica.

In sintesi, si precisava che il punto di attacco di tale azione centrale, per esprimersi con le parole di Hauschild <sup>(5)</sup>, « appartiene alle regioni più elevate del sistema nervoso centrale, più particolarmente la corteccia e le regioni sottocorticali ». Ed altri (Wulf <sup>(5)</sup>), precisava che di fronte a tale azione possente sulla zona dei gangli della base e prossimiore, molte di queste sostanze avevano azione praticamente nulla sul midollo spinale.

Tornando in particolare al comportamento generale dei nostri animali, è stato detto che esso mostra come specialmente il diencefalo appaia maggiormente sollecitato dall'azione di molte delle sostanze adrenalinosimili adoperate.

Le modificazioni infatti dell'attività respiratoria, e manifestantesi specialmente, con tachipnea, ampiamente studiate per la simpamina da Chistoni e Beccari <sup>(6)</sup>, è noto oggi, dalle belle ricerche di Hess <sup>(7)</sup>, che possono essere indotte anche da stimolazione della zona immediatamente laterale alla connessura posteriore o del nucleo perifornicale; i movimenti continui di fiuto da stimolazione dell'area preottica laterale e dell'ipotalamo laterale, e così pure l'adinamia e l'atonia. Anche i giri di maneggio possono trarre origine dal diencefalo, mediante collegamenti neuronici con l'apparato vestibolare e con il sistema cerebellare (Hess <sup>(7)</sup>).

Fatti questi non solo ben noti per sperimentazione sugli animali, ma che, d'altra parte, hanno trovato conferma in patologia umana.

(5) HAUSCHILD e WULF, citati da J. DELAY, *Méthodes biologiques in clinique psychiatrique*, Masson ed., 1950.

(6) A. CHISTONI e E. BECCARI, *Ricerche farmacologiche sulla fenilisopropilammina*. Nota III: *Azione eccitante sul sistema nervoso centrale ed in particolare sul respiro*. « Arch. It. Sc. Farmacologiche ».

(7) W. R. HESS, *Il diencefalo. Sindromi, localizzazioni e funzioni*. Ed. Martello, Milano 1952.



Numerosi sono gli Autori <sup>(8-16)</sup> infatti che, in sindromi cliniche a diagnosi di sede ben precisa o durante interventi operatori su zone adiacenti l'ipotalamo, hanno potuto mettere in evidenza fenomeni di eccitamento motorio e psichico, di adinamia, di atonia, ecc., assolutamente comparabili con quelli presentati dai nostri animali.

Che il diencefalo, dunque, sia stato chiamato in gioco negli esperimenti eseguiti, mi pare non possa essere messo in dubbio. La questione invece, che qui automaticamente si pone, è di vedere se la stimolazione diencefalica possa ripercuotersi in senso inibitorio sull'eccitabilità dei centri spinali, e, più in particolare, dato che non v'è alcuna ragione per allontanarsi dalla concezione classica, su quella del neurone intercalare.

Poco importa, ai fini della soluzione del quesito, che la stricnina agisca prevalentemente invertendo la funzione d'arresto di detto neurone e, rendendolo più conduttore, faciliti il passaggio dell'impulso nervoso ai neuroni vicini; o che la sua azione si espliciti producendo inversione dei riflessi midollari di inibizione, come Sherrington ha potuto dimostrare.

Che una stimolazione del diencefalo possa produrre crollo improvviso anche dell'eccitabilità spinale, potrebbe dedursi dal fatto che narcolessia e cataplessia possono - è noto - insorgere anche dopo semplici fatti emotivi, anche se una dimostrazione documentata non si è potuta dare, forse in conseguenza della eccessiva brevità delle sindromi accennate, che non permette di seguire gli opportuni controlli. E d'altra parte, si conoscono oggi vie di connessione diencefalo-bulbo-spinali che tale concezione teorica potrebbero fare ammettere. Senza parlare poi dei molto ben più noti collegamenti ipotalamo-talamici e ipotalamo-striato, che a loro volta tanto intima connessione hanno coi centri spinali e corticali.

Ma a mio parere, ad onta di tutto ciò, un'influenza inibitoria sul neurone intercalare spinale da parte del diencefalo, sollecitato dall'azione delle sostanze adoperate, deve ritenersi, anche se possibile, estremamente impro-

(8) P. GUIROUD, *Psychiatrie générale*. Le François ed. Paris 1950.

(9) K. BERINGER, *Rhythmischer Wechsel von Erregtheit und Gehemmtheit als Diencephale Autriebsstörung*. «Nervenarzt», 15.6, p. 225 (1942).

(10) L. B. COX, *Tumours of the Base of the Brain*. «Médic. Journ.», Australia 1937, I, n. 120, p. 742.

(11) O. FAERSTER et O. GAGEL, *Ein Fall von Ependymocyste des III Ventrikles. Ein Beitrag zur Frage der Beziehungen psychischer Störungen zur Hirnstamm*. «Zeitschr. f. d. ges. Neurol. u. Psych.», 149, p. 312 (1933).

(12) FORSTER-KENNEDY, *Medical syndromes and the Hypothalamus*. «The Hypothalamus», 1940.

(13) J. F. FULTON e P. BAILEY, *Contribution to the study of tumours in the region of the third Ventricle*. «Journ. of nevr. a mental Diseases», vol. 69, p. 1, 145, 26 (1929).

(14) P. M. LEVIN, *Narcolepsie et autres variétés de somnolence morbide*. «Arch. of Neurol. a Psych.», vol. 22, p. 1, 172 (1929).

(15) J. LHERMITTE J. e FLEURY, *Le syndrome psychique secondaire aux lésions globales du mésodiencephale*. «Annal. médic. psychol.», t. 1, p. 389 (1944).

(16) J. F. MOSSERMANN, *The Hypothalamus in Psychiatry*. «Amer. Journ. of Psych.», vol. 98, p. 633 (1941-42).

babile. Tanto più che molte di queste sostanze adrenalino-simili, e la simpamina in particolare, hanno trovato larga applicazione in terapia neuropsichiatrica proprio allo scopo opposto, per combattere cioè, oltre alla narcolessia e alla cataplessia, sindromi diencefaliche a tipo depressivo, e con immediato notevole miglioramento dell'umore, del tono psichico, del tono neuro-muscolare. E giacché, quasi involontariamente, si è arrivati a parlare della simpamina in particolare, è opportuno qui rilevare che essa, oltre ad elevare notevolmente l'eccitabilità della corteccia cerebrale, diminuisce contemporaneamente quella del nervo motore e del nervo sensitivo.

Potrebbe ciò spiegare il mancato effetto stricnico osservato negli esperimenti eseguiti associandola alla stricnina?

Francamente non ci si sente di poterlo affermare, pur riconoscendo di doverlo tener presente.

In conclusione, dunque, con riferimento alle tre direttrici fondamentali che mi ero proposta di seguire in questa discussione, scartate, almeno in via ipotetica, quelle relative al gioco degli —OH fenolici e all'entrata in azione di meccanismi nervosi aventi origine in sede più alta che la spinale, per spiegare i risultati esposti dalla Nota precedentemente citata, ed ai quali ci si è riferiti nella presente, non resta che la terza via: formazione cioè di prodotti di addizione tra la stricnina ed alcune delle sostanze adrenalinosimili adoperate.

Ed in questo senso ci si ripromette di sperimentare.

**Fisiologia.** — *Azione della caffeina sui riflessi spinali nella rana curarizzata non decerebrata* (\*). Nota di TORQUATO GUALTIEROTTI, presentata (\*\*) dal Socio R. MARGARIA.

Recentemente Brooks, V. B., Ransmeier R. E. & Gerard R. W. (1949) <sup>(1)</sup> descrissero ampie oscillazioni di potenziale di tipo stricnico sul cervello isolato di rana dopo 2-3 minuti di applicazione locale di una soluzione 0,5% di caffeina. Le presenti ricerche sono state eseguite allo scopo di vedere in che modo questa attività stricnino-simile sull'encefalo si ripercuotesse sui riflessi spinali. Si sono usate rane curarizzate, sia intatte sia sottoposte ad asportazione del telencefalo. In qualche esperimento si sono eseguiti anche tagli a livello inferiore. Potenziali d'azione, sinaptici, e di riposo sono stati derivati da una radice motoria del nervo sciatico durante la stimolazione del corrispondente ramo del plesso lombo sacrale. La risposta normale è stata

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia umana dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) «Am. J. of Physiol.», 157, 299-316.

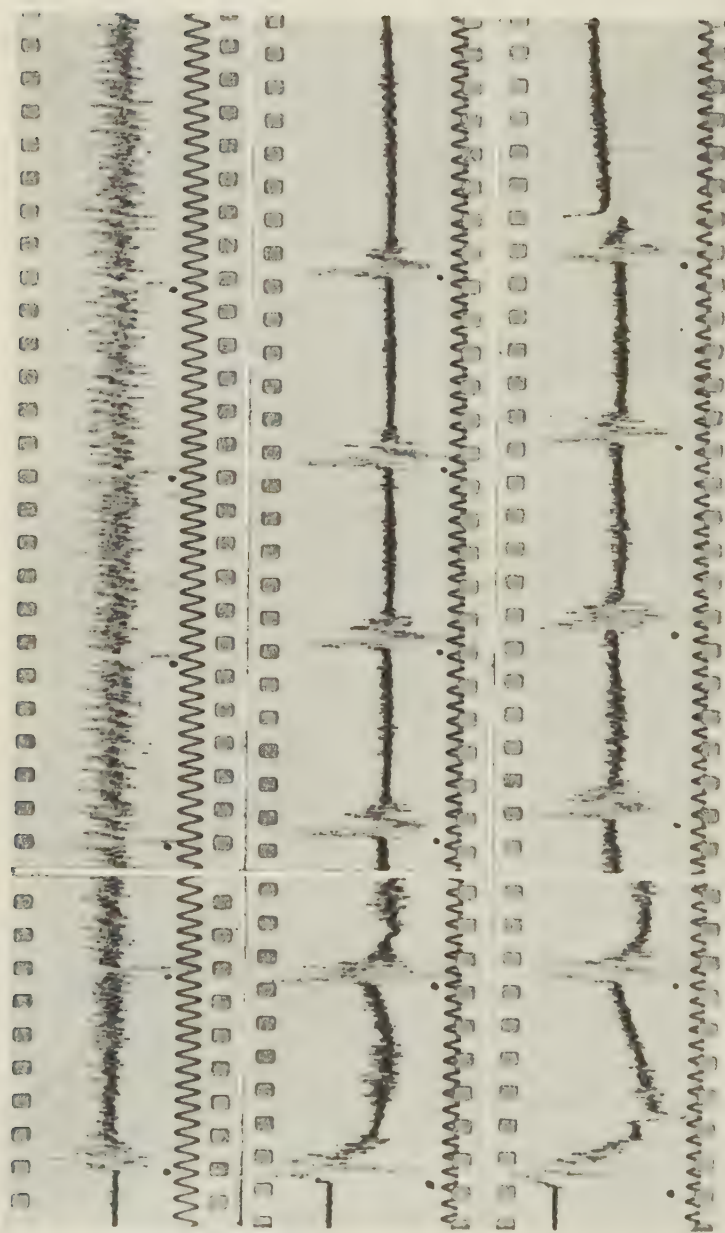


Fig. 1.

Primo tracciato in alto: scarica di potenziali d'azione registrati da una radice motoria dello sciatico in seguito a stimolazione riflessa a 6 per secondo sul ramo mediale del plesso lombo-sacrale. Rana intatta curarizzata. A sinistra: i primi due stimoli, segnati da un punto nero. A destra, dopo la interruzione; gli ultimi quattro stimoli. I potenziali sinaptici sono coperti dalla scarica motoria e sono appena visibili.

Secondo tracciato: 10 minuti dopo iniezione addominale di caffeina. La scarica di potenziali d'azione si è ridotta a un breve gruppo dopo ogni stimolo (segnato da un punto nero). I potenziali sinaptici, molto aumentati, sono ora chiaramente visibili e mostrano una spiccata sommazione temporale. A sinistra i due primi stimoli; a destra, dopo l'interruzione, gli ultimi quattro stimoli.

Ultimo tracciato in basso: 15 minuti dopo iniezione di caffeina. Il raggruppamento dei potenziali d'azione continua assai marcato. I potenziali sinaptici hanno raggiunto la loro massima ampiezza e la sommazione temporale è sempre evidente. A sinistra: i primi due stimoli; a destra, dopo l'interruzione; gli ultimi quattro stimoli.

Segnatempo: sinusoidi a 50 periodi/sec. Negatività verso il basso.

confrontata con quella seguente l'iniezione di una soluzione di caffeina (dose di 20-30 mgr per Kg). Applicazione locale di una soluzione di caffeina allo 0.5% è stata pure fatta mediante carta da filtro.

Tre minuti dopo l'iniezione o 1 minuto dopo l'applicazione locale sul diencefalo o sul telencefalo la scarica riflessa di potenziali rapidi apparve aumentata di ampiezza ma non di durata. L'applicazione locale non provocò altri fenomeni e in seguito a lavaggio la risposta ritornò normale dopo circa 1/2 ora.

In seguito a iniezione invece, dopo 10 minuti la scarica di potenziali d'azione divenne sempre più corta dopo ogni stimolo e alla fine si manifestò in gruppi di aspetto molto simile a quelli provocati da stricnina.

Contemporaneamente il potenziale di riposo diventava sempre più negativo e qualche minuto dopo anche i potenziali sinaptici apparivano di ampiezza assai maggiore che di norma. Questo particolare tipo di risposta riflessa durava 2-3 ore, dopodiché lentamente si osservava ritorno alla norma. Tagli che escludessero il telencefalo e anche quasi tutto il diencefalo non alteravano sostanzialmente i fenomeni, ma soltanto ne diminuivano, specialmente nell'animale mesencefalico, la portata.

Questi risultati possono essere interpretati supponendo che l'azione eccitante della caffeina sui centri dell'encefalo si ripercuota sui riflessi spinali in modo simile a quello della stricnina; se ne differenzia perché: 1° durante caffeinizzazione il generale aumento della risposta riflessa spinale si limita all'ampiezza, mentre la durata varia durante stricnizzazione sì che la scarica di potenziali d'azione si prolunga nel tempo in modo considerevole); 2° non si è mai osservato durante caffeinizzazione quella tendenza ad una attività autoritmica che è la principale caratteristica dell'effetto stricnico.

Gli altri fenomeni, e cioè a) *progressiva depolarizzazione del midollo* denunciata dal variare del potenziale di riposo, b) *aumento della ampiezza dei potenziali sinaptici motori*, c) *parziale sincronizzazione dei potenziali d'azione*, sono identici a quelli prodotti da stricnina: l'ultimo però, e cioè la sincronizzazione dei potenziali d'azione, non raggiunge mai quello stadio di completa fusione in una unica oscillazione sinusoidale che si osserva nella fase tardiva dell'avvelenamento stricnico.

Un cordiale ringraziamento è dovuto ai Dott. Crippa e Berger per l'aiuto finanziario che ha reso possibile questa ricerca.



**Biologia.** — *Le proprietà tintoriali della fucsina paraldeide in alcune strutture dell'encefalo del Tritone crestatum*<sup>(\*)</sup>. Nota di VALDO MAZZI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio N. BECCARI.

La fucsina paraldeide, proposta da Gomori<sup>(1)</sup> come colorante elettivo delle fibre elastiche, ha trovato rapidamente largo impiego in tecnica microscopica. Già Gomori segnalò che questo colorante mette in evidenza, oltre alle fibre elastiche, le cellule  $\beta$  dell'ipofisi e le cellule  $\beta$  del pancreas endocrino, le cellule mucipare, le cellule principali della mucosa gastrica e i mastociti. Halmi<sup>(2)</sup> impiegò per primo il nuovo colorante per differenziare le cellule basofile dell'ipofisi dei Mammiferi. Successivamente Gastaldi<sup>(3)</sup> mise in evidenza che il colorante, dopo ossidazione periodica, e in misura minore dopo trattamento con Na bisolfito acidificato con l'1 % di ac. cloridrico, si dimostrava selettivo per il neurosecreto ipotalamico. Scott<sup>(4)</sup> quindi, indipendentemente da Gastaldi, sostituiva all'ossidazione periodica quella permanganico-solforica del metodo di Gomori all'ematossilina cromica-floxina<sup>(5)</sup>, e simile artificio tecnico era messo in atto anche da Dawson<sup>(6)</sup> per la evidenziazione del neurosecreto nella parte intermedia dell'ipofisi degli Anuri. Secondo Dawson<sup>(7)</sup> in materiale embrionale di ratto il metodo mette in evidenza maggior quantità di neurosecreto che non quello classico alla ematossilina cromica-floxina. Wislocki e Leduc<sup>(8)</sup> hanno quindi dimostrato che la fucsina paraldeide (non specificano se previa ossidazione o meno), colora anche il secreto dell'organo sottocommissurale, la fibra di Reissner e cellule gliali fagocitanti. Ancora Gastaldi<sup>(9)</sup> ha segnalato che la fucsina paraldeide, previa ossidazione permanganico-solforica in termostato a 37°, mette in evidenza fibre connettivali sicuramente di natura reticolare, oltre ai mastociti e alla elastica interna, al pigmento ovarico e alle cellule mucipare. Infine io ho notato (Mazzi<sup>(10)</sup>) che, nell'encefalo del Tritone crestatum, la fucsina paraldeide dopo ossidazione permanganico-solforica, colora,

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Firenze.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) « Amer. J. Clin. Path. », 20, 665 (1950).

(2) « Stain. Technol. », 27, 61 (1952).

(3) « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 28, 1074 (1952).

(4) « Stain. Technol. », 27, 267 (1952).

(5) « Amer. J. Path. », 17, 395 (1941).

(6) « Anat. Rec. », 115, 63 (1953 a).

(7) « Anat. Rec. », 117, 620 (1953 b).

(8) « Anat. Rec. », 117, 610 (1953).

(9) « Boll. Soc. Biol. Sper. », 29, 1317 (1953).

(10) « Rend. Accad. Naz. Lincei » (in corso di stampa) (1954).

oltre ai mastociti, anche particolari cellule dell'oblongata, probabilmente di natura gliale.

Nel corso di ricerche intorno ai mastociti, ho avuto modo di applicare la colorazione con fucsina paraldeide, previa ossidazione o meno, su encefali di Tritone crestato variamente fissati. Al fine di estendere le attuali conoscenze intorno alle proprietà tintoriali di questo nuovo colorante, ritengo di un certo interesse riferire intorno alle osservazioni svolte. Ho preso in esame il comportamento nei confronti della fucsina paraldeide delle seguenti strutture: ipofisi, organo sottocommissurale, ependima ventricolare, nucleo della radice mesencefalica del V, sistema neurosecretorio ipotalamo-ipofisario, mastociti, stroma dei plessi corioidei, leptomeninge, pareti delle arterie, dei precapillari e dei capillari. I risultati delle mie osservazioni vengono sinteticamente raccolti nell'annessa tabella, nella quale il numero delle crocette indica, secondo una valutazione soggettiva, l'intensità della colorazione ottenuta. Per i mastociti ho tenuto conto anche del grado di differenziazione delle circostanti strutture connettivali.

Come colorante ho impiegato fucsina basica Grüber allo 0,5 % in alcool a 75°, con l'aggiunta dell'1 % di paraldeide (M & B) e dell'1,5 % di acido cloridrico concentrato. Com'è noto la soluzione matura in tre giorni circa a 20° e rapidamente perde di elettività, colorando diffusamente e tenacemente i tessuti. La differenziazione si esegue in alcool a 95° più volte cambiato. L'ossidazione è stata condotta secondo le indicazioni di Scott, e cioè per 1 minuto in permanganato di potassio e acido solforico ana 0,5 %; la decolorazione impiegando bisolfito di sodio al 2,5 %. In ogni caso le sezioni non ossidate furono tenute nel liquido colorante per 5', quelle ossidate per 2'.

Dall'esame della tabella si rileva che le proprietà tintoriali della fucsina paraldeide variano notevolmente a seconda che il colorante sia applicato previa ossidazione o meno; risulta chiara inoltre l'azione del fissativo sulla successiva colorazione.

Di tutte le strutture studiate, soltanto le fibre elastiche sono colorate dalla f.p. (= fucsina paraldeide) senza previa ossidazione, e in larga misura indipendentemente dal fissativo usato. Soltanto il Carnoy (con o senza aggiunta di acido acetico) non consente la colorazione dei mastociti.

Limitatamente ad alcuni fissativi soltanto, si colorano debolmente le cellule  $\beta$  e le cellule del lobo intermedio dell'ipofisi.

La ossidazione permanganico-solforica consente la colorazione di tutte le strutture prese in esame nell'encefalo del Tritone crestato, con l'eccezione del collagene. Il ruolo giuocato dai singoli fissativi risulta chiaramente dall'esame della tabella.

FISSATIVI	Mastociti		Ipofisi						Secr. dell'orm. sotto misura
			Cellule $\beta$		Cellule $\delta$		Lobo intermedio		
	S.o.	O.	S.o.	O.	S.o.	O.	S.o.	O.	
Formalina (cong.) . . . . .	+++								
Formalina (paraff.) . . . . .	+—	+	—	++	—	++	—	+	—
Acetato Pb . . . . .	+++	++	+	++	—	++	+	++	—
Helly . . . . .	+—	+	—	+—	—	+	—	+	—
Sanfelice . . . . .	++	++	—	+—	—	+	—	+	—
Bouin . . . . .	+	++	—	+	—	++	—	+	
Susa . . . . .	++	+++	+—	+	—	+++	—	+	—
Susa picrico . . . . .		++		+		+++		++	
Stieve. . . . .	++	+++	—	+—	—	+—	—	+	—
Sublimato acet. . . . .		++		+		++		+	
Alcool 80° . . . . .	+	+	+—	+	—	—	—	—	—
Carnoy . . . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Carnoy con ac. acetico . . .	—	+—	—	+	—	+	—	+	

*Leggenda:*

+++	colorazione molto intensa
++	» intensa
+	» mediocre
+—	» pallida
—	» assente

Irosecreto		Nucleo radice mesencef. V		Secreto cellule ependimali				Fibre elastiche		Fibre reticolari		Fibre collagene	
				Granulare		vacuolare							
	O.	S.o.	O.	S.o.	O.	S.o.	O.	S.o.	O.	S.o.	O.	S.o.	O.
	+++	—	++	—	++	+	+++	+—	+	—	+	—	+—
	+++	—	++	+++	++	++	+++	+++	+++	—	++	—	—
	++	—	+	—	—	+—	++	++	++	—	++	—	—
	+++	—	+—	—	+	—	+	+	+++	—	++	—	+—
	+++	—	++	—	+	—	—	+	+++	—	+	—	—
	+++	—	—	—	+—	—	—	++	++	—	+	—	+—
	+++		+++		+		+—		++		++		—
	+++	—	++	—	++	—	—	++	+++	—	+	—	—
	+++		++		+		—		+		+—		—
	+—	—	—	—	—	—	—	++	+++	+	+	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	+	++	—	+—		—
	+	—	—	—	—	—	—	+	++	—	+—	—	—



## DISCUSSIONE.

1. Fra tutti i fissativi sperimentati la formalina al 10 % (purché si sezioni al congelatore) e l'acetato basico di piombo al 4 %, secondo Holmgren e Wilander<sup>(11)</sup>, sono quelli che meglio conservano i granuli dei mastociti. I fissativi alcoolici e quelli contenenti acidi causano il rigonfiamento e la coalescenza dei granuli dei mastociti (tav. II, fig. 9), e inducono la comparsa di vacuoli nel citoplasma. La ossidazione rende meno agevole la identificazione dei mastociti in quanto rende colorabili con la f.p. anche il tessuto reticolare, le pareti dei precapillari e dei capillari e i granuli di melanina.

2. Il parallelismo fra il comportamento dei mastociti e quello delle fibre elastiche nei confronti della f.p. senza ossidazione, si presta ad alcune considerazioni. Pecchiai<sup>(12)</sup> ha infatti dimostrato che, nel gatto e nella cavia, i mastociti connettivali si colorano intensamente in rosso con la resorcina-fucsina di Weigert, colorante elettivo per le fibre elastiche, e con il reattivo di Schiff. Secondo l'A. la colorazione si ottiene soltanto su tessuti fissati in alcool assoluto o in Carnoy, e su sezioni attaccate ai vetrini con sola albumina glicerinata, evitando qualsiasi contatto con l'acqua. Pecchiai ha concluso che la colorazione è dovuta alla presenza nelle granulazioni dei mastociti di un « quid » fortemente idrosolubile, diverso dal glicoproteide cromotropo al quale è dovuta la colorazione metacromatica dei granuli con il bleu di toluidina. Infatti mastociti colorati con il Weigert successivamente decolorati e trattati con acqua, davano ancora la caratteristica reazione metacromatica con il bleu di toluidina. Nel ratto Pecchiai ottenne colorazione dei mastociti tanto con il Weigert che con lo Schiff, anche dopo trattamento con acqua.

In considerazione del fatto che la fucsina paraldeide, impiegata senza preventiva ossidazione, è colorante elettivo delle fibre elastiche, al pari della resorcinafucsina di Weigert, era lecito supporre che la colorabilità dei mastociti nel Tritone con la f.p. fosse dovuta alle stesse cause che determinano la colorazione con la fucsina di Weigert e con lo Schiff nel gatto, nella cavia e nel ratto. Però le prove eseguite nel mio materiale, sulla scorta delle indicazioni tecniche del Pecchiai, hanno dato esito negativo.

3. Conformemente a quanto ha segnalato Gastaldi, io pure ho constatato che la f.p. dopo ossidazione permanganico-solforica, è in grado di colorare il tessuto reticolare dei plessi corioidei e della leptomeninge, anche dopo una breve ossidazione permanganico-solforica a freddo (tav. II, fig. 9). I risultati migliori si ottengono dopo Susa picrico, Sanfelice e Helly. Controcolorando con il liquido di Halmi si ottiene una differenziazione dal colla-

(11) « Z. f. Mikr. Anat. Forsch. », 42, 242 (1937).

(12) « Mon. Zool. Ital. », 57 (suppl.) 269 (1948).

gene, che si colora in verde, particolarmente buona su materiale fissato in Susa picrico. La f.p., dopo ossidazione, colora bene anche le pareti dei pre-capillari e dei capillari.

4. Il comportamento delle cellule basofile preipofisarie nei confronti della f.p. è diverso, a seconda che la colorazione sia preceduta o meno da ossidazione. Nel secondo caso si mettono in evidenza, sia pure debolmente e con pochi fissativi, le cellule che indicai come  $\beta$  e che tentativamente omologai alle omonime cellule dei Mammiferi (Mazzi <sup>(13)</sup>). Dalle ricerche di Halmi <sup>(14)</sup> e di Purves e Griesbach <sup>(15)</sup> è noto che anche nei Mammiferi la f.p. colora soltanto le  $\beta$ . La ossidazione consente invece una intensa colorazione delle cellule  $\delta$  (tav. I, fig. 2), mentre le cellule  $\beta$  appaiono colorate debolmente dalla f.p. (tav. I, fig. 1) e, ove si proceda a controcolorazione con il liquido di Halmi, anche dal verde luce.

In quest'ultimo caso, nel preparato definitivo, si presentano colorate in celeste, mentre le cellule  $\delta$  hanno una tinta viola scuro.

Il problema delle cellule basofile degli Anfibi richiede nuove e sistematiche ricerche per essere risolto. L'impiego della f.p., previa ossidazione o meno, promette di essere molto utile a questo proposito.

5. Nel Tritone anche il neurosecreto del sistema ipotalamo-ipofisario viene messo brillantemente in evidenza dalla f.p. dopo ossidazione. I quadri che si ottengono sono forse ancora più chiari di quelli ricavati con la ematossilina cromica-floxina, particolarmente al livello delle più sottili fibre del fascio ipotalamo-ipofisario nel pavimento infundibolare (tav. I, fig. 3), nella eminenza mediana e nell'asse infundibolare (tav. I, fig. 1). È da segnalare che la f.p. colora, sebbene molto debolmente, il neurosecreto anche in materiale fissato in alcool e in Carnoy acidificato.

6. Il secreto dell'organo sottocommissurale viene ben colorato dalla f.p. dopo ossidazione (tav. I, fig. 3), come pure la fibra di Reissner, che per la prima volta ho rintracciato nel Tritone (tav. II, fig. 5), anche dopo impiego di fissativi a base di alcool. La ematossilina cromica ha comportamento analogo (cfr. Mazzi <sup>(16)</sup>).

7. La f.p. si è dimostrata un ottimo strumento per lo studio dell'attività secretoria ependimale. Nel suo trattato di neurologia Beccari <sup>(17)</sup> segnalò e illustrò fenomeni di secrezione vacuolare al livello dell'ependima del tetto ottico del Tritone. Nei Selaci io rilevai la presenza di granuli gomoripositivi

(13) « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, 3, 651 (1947).

(14) « Endocrinology », 47, 289 (1950).

(15) « Endocrinology », 49, 427 (1951).

(16) « Arch. Zool. Ital. », 37, 445 (1952).

(17) *Neurologia comparata dei Vertebrati*. S.E.S. Firenze, 1943.

nell'ependima ventricolare (Mazzi<sup>(18)</sup>). Goslar e Tishendorpf<sup>(19)</sup> hanno di recente descritto nell'ependima del III ventricolo degli Urodeli, granuli e zolle gomoripositive e vescicole ialine. Con la f.p. si mettono in evidenza tanto i granuli che i vacuoli. I granuli si colorano senza ossidazione soltanto dopo fissazione in acetato di piombo. Dopo ossidazione si hanno risultati negativi dopo impiego di liquidi alcoolici e di Zenker formolico; quelli più brillanti su materiale fissato in Stieve (tav. II, fig. 7) ed incluso in paraffina-celloidina secondo Jordan<sup>(20)</sup>. Il secreto vacuolare si colora, senza preventiva ossidazione, soltanto se materiale fissato in formalina o in acetato di Pb, debolmente in Helly. Dopo ossidazione i fissativi più idonei si dimostrano ancora l'acetato di Pb (tav. II, fig. 8), la formalina, lo Zenker formolico. Con gli altri fissativi si hanno risultati negativi e si ottiene colorato soltanto un anello periferico. Tanto il secreto granulare che gli anelli periferici dei vacuoli si colorano anche con l'ematossilina cromica.

8. Il secreto del nucleo della radica mesencefalica del V si colora normalmente con i coloranti acidi (Mazzi)<sup>(21)</sup>, ed anche con il metodo di Gomori-Bargmann assume la floxina. Dopo ossidazione si colora invece brillantemente con la f.p. in particolare da serie fissate in Susa picrico (tav. II, fig. 6), Bouin, Stieve e sublimato acetico.

9. È interessante rilevare che le proprietà tintoriali della f.p., applicata dopo ossidazione permanganico solforica, sono molto simili a quelle della ematossilina cromica di Gomori. Risultati quasi perfettamente sovrapponibili con i due metodi si ottengono nei confronti del neurosecreto, del secreto dell'organo sottocommissurale e del secreto ependimale. Dalle ricerche di Wislocki<sup>(22)</sup> e di Massari<sup>(23)</sup>, da me confermate nel Tritone, sappiamo d'altro canto che i mastociti sono chiaramente messi in evidenza dalla cromoematossilina. Quest'ultimo liquido colora anche il tessuto reticolare e le pareti dei capillari e dei precapillari (Massari); strutture queste che sono rilevate anche dalla f.p. dopo ossidazione. Diversità notevoli si notano soltanto nei confronti delle cellule basofile preipofisarie, colorate soltanto debolmente

(18) « Riv. Biol. », 44, 431 (1952).

(19) « Zeit. f. Anat. Entwicklungsgesch. », 117, 259 (1953).

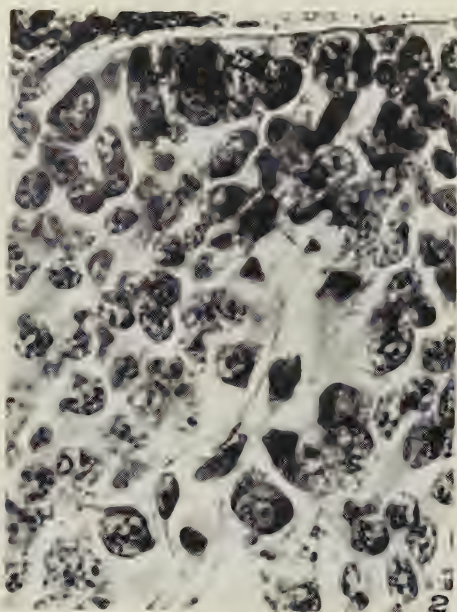
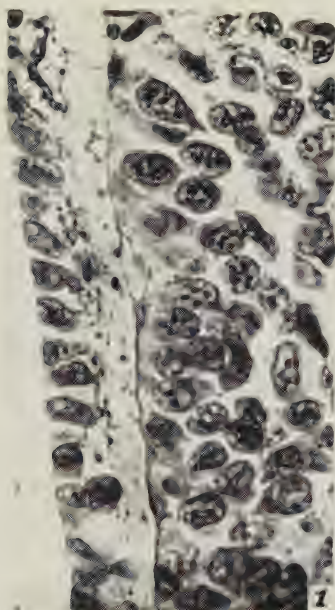
(20) In materiale fissato in Stieve la f.p. mette in evidenza anche minuti granuli in cellule del grigio periventricolare del III ventricolo, e in cellule sicuramente nervose, probabilmente tegmental. Sono inoltre da segnalare piccole cellule, con nucleo spesso a bisaccia e intensamente cromofilo, corpo cellulare rotondeggiante con citoplasma fortemente colorabile con la f.p. dopo ossidazione. Queste stesse cellule sono colorate dalla ematossilina-cromica, danno una intensa PAS reazione e si colorano con il metodo di Hale. Esse si trovano in pieno tessuto nervoso, tra le cellule ependimali, nello stroma dei plessi corioidei ed entro le cavità ventricolari. Si tratta probabilmente di cellule di microglia in attività fagocitaria (macrofagi).

(21) « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, 4, 109 (1948).

(22) « Am. J. Anat. », 91, 233 (1952).

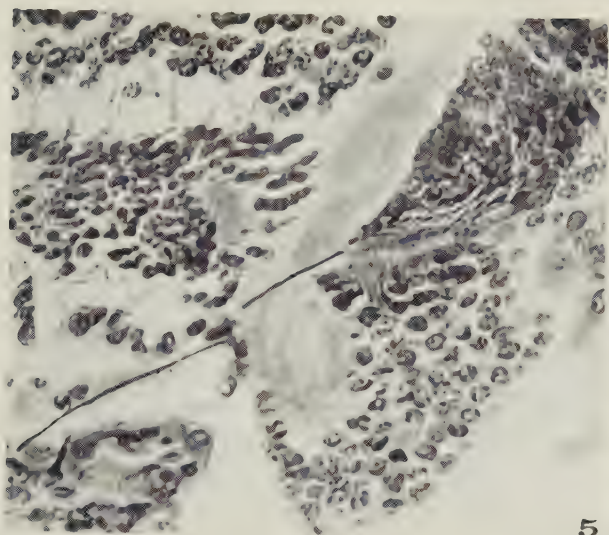
(23) « Quaderni Anat. Pratica », ser. VIII, n. 1-2, 1 (1953).



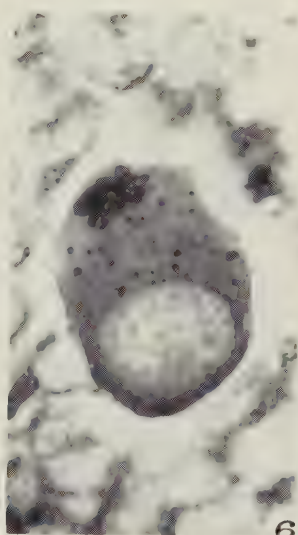




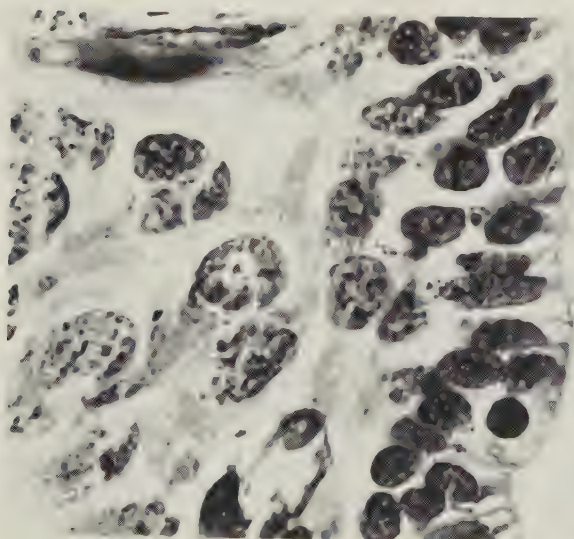




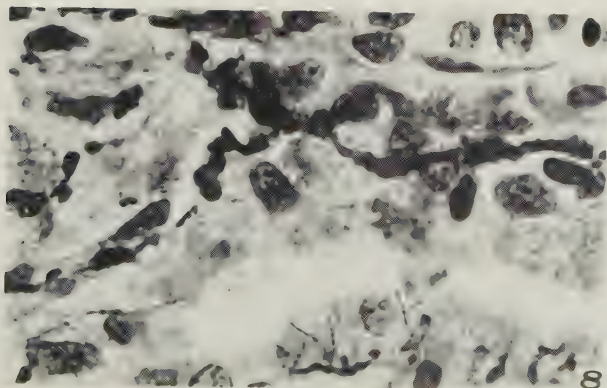
5



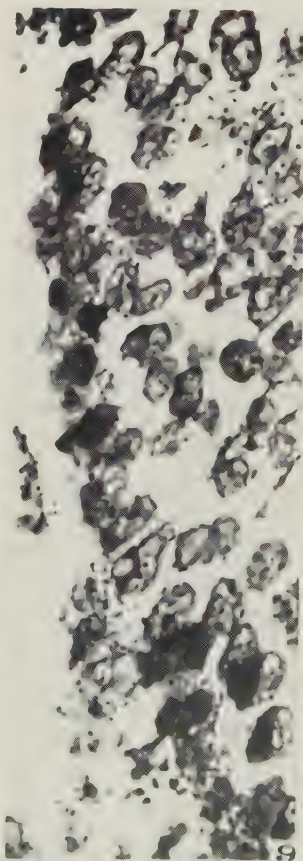
6



7



8



9



dalla ematossilina cromica, e del secreto delle cellule del nucleo della radice mesencefalica del V, floxinofilo nel metodo di Gomori-Bargmann, invece nettamente colorato dalla f.p. dopo ossidazione.

10. Tenendo conto del fatto che le strutture prese sopra in esame, con la sola eccezione del secreto vacuolare dell'ependima, danno una PAS reazione positiva, mentre la reazione metacromatica è limitata esclusivamente ai mastociti e alle pareti dei capillari e precapillari, possiamo estendere alla f.p. dopo ossidazione le conclusioni alle quali pervenne Massari intorno alla specificità della colorazione con l'ematossilina cromica, ed ammettere che la f.p. dopo ossidazione manifesti una generale affinità per i mucopolisaccaridi.

## SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

### TAVOLA I

Fig. 1. — Ipofisi. A sinistra: fibre del fascio ipotalamo-ipofisario cariche di neuro-secreto nell'asse infundibolare. A destra: cellule di tipo  $\beta$ . Fiss. Susa; f.p. dopo ossidazione;  $\times 500$ .

Fig. 2. — Ipofisi. Le cellule del tipo  $\delta$  hanno il citoplasma fortemente colorato dalla f.p. Fiss. Susa picrico; f.p. dopo ossidazione;  $\times 500$ .

Fig. 3. — Fibra prechiasmatica del fascio ipotalamo-ipofisario carica di neurosecreto. Fiss. Susa picrico; f.p. dopo ossidazione;  $\times 400$ .

Fig. 4. — Organo sottocommissurale. Fiss. Susa picrico; f.p. dopo ossidazione;  $\times 250$ .

### TAVOLA II

Fig. 5. — Organo sottocommissurale e fibra di Reissner. Fiss. Susa; f.p. dopo ossidazione;  $\times 250$ .

Fig. 6. — Cellula del n. r. m. V contenente granuli di secrezione colorati dalla f.p. Fiss. Susa picrico; f.p. dopo ossidazione e liquido di Halmi;  $\times 1100$ .

Fig. 7. — Secreto granulare nelle cellule endimali del III ventricolo. Fiss. Stieve; f.p. dopo ossidazione;  $\times 650$ .

Fig. 8. — Sezione tangenziale di un setto della leptomeninge. Al centro: un grosso mastocita; in basso, fibre elastiche; a sinistra, tessuto reticolare. Fiss. Susa; f.p. dopo ossidazione;  $\times 500$ .

Fig. 9. — Secreto vacuolare dell'ependima del III ventricolo. Fiss. acetato di Pb; f.p. dopo ossidazione;  $\times 500$ .



**Biologia.** — *Sulla presenza di uno strato epitelioido nella meninge primitiva di alcuni Teleostei*<sup>(\*)</sup>. Nota di VALDO MAZZI e LUCIANA RICCI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio N. BECCARI.

Nel corso di ricerche comparative intorno alla morfologia e alla istologia delle meningi dei Teleostei e degli Anfibî condotte da uno di noi (Ricci), sono state rilevate delle caratteristiche strutturali della meninge primitiva di alcuni Teleostei (*Anguilla* e *Carpa*) che riteniamo meritevoli di essere segnalate.

In linea generale la tesi sostenuta da Sterzi<sup>(1)</sup>, secondo la quale sarebbe presente nei Teleostei una meninge primitiva unica, aderente all'encefalo e al midollo spinale e distinta dal periostio, viene oggi accettata ed è confermata dalle nostre ricerche in corso. A noi risulta inoltre che è possibile distinguere vari gradi di complicazione nella struttura di questa meninge primitiva.

In un primo tipo, che riscontriamo per esempio in *Clupea alosa*, *Gasterosteus aculeatus*, *Hoplostethus mediterraneus*, *Echeneis brachiptora*, ecc., la meninge primitiva è composta esclusivamente di un numero variabile di lamine connettivali fra loro sovrapposte e contenenti soltanto fibrociti. In un secondo tipo, il più complesso, che fu ben illustrato da Kappers<sup>(2)</sup> in *Lophius piscatorius*, la meninge primitiva, assai spessa, è costituita da uno strato interno ad aspetto magliato, e da uno strato esterno, superficiale, laminare fibroso. Fra i due strati si notano piccole fessure o lacune. Questo tipo di meninge, oltre che in *Lophius*, lo abbiamo riscontrato anche in *Amiurus nebulosus*.

Fra i due tipi sopra descritti se ne inserisce un terzo, nel quale, oltre allo strato fibroso, composto da un numero variabile di lamine, si nota, superficialmente e in stretti rapporti con il soprastante tessuto perimeningeo, una ulteriore lamina, apparentemente simile a un epitelio semplice, e che pertanto chiamiamo epitelioido.

Questa struttura, mai in precedenza descritta nei Teleostei, verrà illustrata con qualche particolare nelle due sole specie nelle quali è stata sicuramente individuata, e cioè *Anguilla anguilla* e *Cyprinus carpio*.

Nell'*Anguilla* lo strato epitelioido è disposto al di sopra dello strato fibroso e riveste con una certa continuità tutto l'encefalo. Appare però interrotto in corrispondenza della membrana telencefalica, degli organi della regione parietale, dell'ipofisi e della tela corioidea del IV ventricolo, ove la meninge primitiva è pertanto costituita dal solo strato fibroso.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Firenze.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) «Atti R. Ist. Veneto Sc. Lett. Arti», 60, 1 (1902).

(2) «Arch. Neurol. Psych.», 15, 281 (1926).

Lo strato epitelioido è formato da cellule a confini non ben definiti, con nucleo rotondeggiante, vescicoloso, dotato di una netta membrana nucleare, contenente scarsissima cromatina e un ben evidente nucleolo (fig. 1). Nello strato i nuclei di norma sono fra di loro regolarmente disposti e uniformemente spazieggianti.

Direttamente dallo strato epitelioido, o da piccoli localizzati accumuli cellulari, possono dipartirsi sottili trabecole, strutturalmente simili allo strato epitelioido, che si anastomizzano fra di loro nello spazio perimeningeo. Nelle maglie molto larghe formate dalle trabecole è contenuto un liquido proba-



Fig. 1. — Meninge primitiva e tessuto perimeningeo dell'Anguilla, poco innanzi al chiasma ottico.

1. Tessuto nervoso. 2. Distacco artificiale prodotto dalla fissazione. 3. Strato fibroso della meninge primitiva. 4. Strato epitelioido. 5. Trabecole di tessuto perimeningeo. Fiss. Susa, met. van Gieson;  $\times 540$ .

bilmente assai fluido, che viene precipitato omogeneamente dal fissativo. Questo dispositivo particolare, che verosimilmente rappresenta un tipo particolare di tessuto perimeningeo, è localizzato esclusivamente all'apice dei bulbi olfattivi e davanti al chiasma ottico.

In *Cyprinus carpio* lo strato epitelioido ha caratteristiche assai simili a quelle descritte nell'Anguilla.

In ambedue le specie lo strato epitelioido non penetra nei setti meningei, che pertanto risultano composti esclusivamente dallo strato fibroso della meninge primitiva.

Resta ora da decidere se la componente epitelioido della meninge primitiva dei Teleostei possa essere interpretata come un vero mesotelio.

Il problema della presenza di un mesotelio nelle meningi fu posto e variamente risolto in passato nei Mammiferi e negli Anfibi.

Nei Mammiferi fu più volte segnalato mesotelio a rivestire le pareti dello spazio subdurale. Così Key e Retzius <sup>(3)</sup>, Weed <sup>(4)</sup> e Kolmer <sup>(5)</sup> videro, rispettivamente nell'Uomo e nel Cane, nel Maiale e nella Scimmia, un mesotelio, composto da cellule poligonali appiattite, sulla superficie esterna della dura, ma non su quella esterna dell'aracnoide. Masao <sup>(6)</sup> nel coniglio descrive, oltre a particolari « istiociti epitelioidi » rotondeggianti o poligonali, nettamente delimitati dalle circostanti cellule, argentofili e colorabili vitalmente, anche cellule endoteliali sulla superficie interna ed esterna dell'aracnoide.

La presenza di un vero mesotelio a rivestire le pareti dello spazio subdurale, è negata da Mallory <sup>(7)</sup> e da Franceschini <sup>(8)</sup> nell'Uomo, come pure da Leary e Edwards <sup>(9)</sup>, i quali concordemente ritengono che il presunto mesotelio sia in effetti formato da fibrociti appiattiti e regolarmente giustapposti.

Negli Anfibi, tanto Sterzi <sup>(1)</sup> che Kappers, Huber e Crosby <sup>(10)</sup>, parlano di uno strato mesoteliale ricoprente la dura. Palay <sup>(11)</sup>, nella cui interpretazione la dura di Sterzi corrisponderebbe invece all'aracnoide, in base ai risultati di impregnazioni argentiche, nega la presenza di un mesotelio superficialmente all'aracnoide, e interpreta le cellule più superficiali di questa membrana come fibrociti appiattiti.

Senza dubbio le immagini da noi colte nell'Anguilla e nella Carpa ben corrispondono a quelle illustrate tanto nei Mammiferi che negli Anfibi. Da un punto di vista puramente descrittivo la qualifica di strato epitelioido per designare la sottile membrana cellulare che forma lo strato più esterno della meninge primitiva nella Carpa e nell'Anguilla, può essere senz'altro giustificata. Ma sulla scorta dei dati disponibili, anche se incompleti, non riteniamo di poter affermare che si tratti effettivamente di un mesotelio. Pur non avendo osservato nei preparati disponibili dei limiti cellulari, non possiamo decisamente negarne l'esistenza. Infatti i preparati argentici, eseguiti con il metodo II di Cajal, imprregnano troppo fortemente le strutture superficiali encefaliche, e quindi anche la meninge primitiva. In tali preparati non è stato quindi possibile ricercare gli eventuali confini cellulari. A parte questa incertezza, resta il fatto, secondo noi determinante, che il cosiddetto strato epitelioido trapassa senza soluzione di continuità nelle travate del

(3) *Studien in der Anatomie des Nervensystems und des Bindegewebes*. Stockolm (1875).

(4) « *Contribution to Embriology*, Carnegie Inst. Washington », 515 (1917).

(5) « *Anat. Anz.* », 60, 149 (1925-1926).

(6) « *Arb. med. Fak. Okyama* », 4, 26 (1934).

(7) « *J. Med. Res.* », 41, 349 (1919-1920).

(8) « *Arch. Ital. Anat. Embriol.* », 27, 323 (1929).

(9) « *Arch. Neurol. Psych.* », 29, 691 (1933). Gli Autori non citano la fonte delle loro osservazioni.

(10) *The comparative Anatomy of the nervous System of Vertebrates*. Macmillan Co., New York (1936).

(11) « *Anat. Rec.* », 88, 257 (1944).

sovrastante tessuto perimeningeo, certamente formate da un connettivo fibroso, sia pure di un tipo particolare. Infatti nell'Anguilla non si colgono differenze apprezzabili nella struttura del tessuto perimeningeo antistante il chiasma ottico e quella dello strato epitelioide. Non vi è dubbio che l'aspetto dei nuclei delle cellule formanti lo strato epitelioide è nettamente diverso da quello proprio dei fibrociti. Nel primo caso il nucleo è rotondeggiante e vescicoloso, nel secondo ellissoidale e intensamente colorabile (cfr. fig. 1).

Malgrado queste incertezze, allo stato attuale delle ricerche riteniamo che lo strato da noi chiamato epitelioide della meninge primitiva di Carpa e Anguilla sia costituito da fibrociti appiattiti e regolarmente giustapposti, aderendo implicitamente alle vedute di Palay riguardo agli Anfibi e di Mallory e Franceschini riguardo ai Mammiferi.

**Biologia.** — *Il tetto ottico di pesci ciechi cavernicoli nei riguardi del differenziamento specifico dei neuroni.* Nota di ALBERTO STEFANELLI (\*), presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Ho avuta l'opportunità di studiare una specie di Ciprinide cavernicolo del Messico, l'*Anoptichthys jordani*, sia in condizione adulta, sia nei primi stadi dello sviluppo. Questo Teleosteo presenta, come caratteristica comune delle specie cavernicole, una notevolissima atrofia degli occhi che, ridotti nell'adulto a due piccolissimi globetti, privi di cavità, formati da materiale retinico avvolto da abbondante pigmento, con la lente ridotta ad un minutissimo residuo, incapsulati nelle ossa del cranio e ricoperti dal tegumento, privi di nervo ottico che li colleghi al cervello, sono nella impossibilità di ogni funzione visiva.

Lo studio dei primi stadi di sviluppo mi ha dimostrato come l'occhio si inizi anche in questi animali con una morfogenesi tipica ma come, dopo aver raggiunto nei primissimi stadi un certo sviluppo, (però con evidenti segni di riduzione per la poca estensione della retina, per la limitatezza della cavità del globo oculare, per la lente assai piccola), dopo soli 8 giorni dalla fecondazione inizi l'involutione che si può considerare abbia raggiunto il suo massimo dopo un mese e mezzo. Questi fenomeni si manifestano anche allevando, come noi abbiamo fatto, i piccoli in piena luce.

Questo materiale mi è sembrato prezioso per i problemi che riguardano il differenziamento dei neuroni nei rapporti con l'attività funzionale, sfruttando in questo caso, per quanto concerne i neuroni dei centri ottici, di questa esperienza di atrofia degli occhi fatta dalla Natura stessa.

Le presenti osservazioni si collegano pertanto ai miei studi compiuti sul differenziamento dei neuroni basandomi essenzialmente sulla cellula di

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Università di Roma, con un contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.



Mauthner degli Ittiopsidi<sup>(1)</sup>. Per quanto concerne i neuroni del tetto ottico avevo già fatto fare delle ricerche (D'Ambrogio 1949)<sup>(2)</sup> sul differenziamento dei neuroni a neurite ricorrente prima e dopo l'attività visiva in Teleostei vivipari (prima e dopo la nascita), giungendo alla conclusione che non è la visione in se stessa causa del differenziamento, ma, semmai, la presenza anatomica delle vie ottiche anche senza l'attività funzionale.

Molti autori si sono occupati dei fenomeni di ipoplasia del tetto in seguito ad enucleazione di uno o entrambi gli occhi in embrioni e larve [ricordo per i Teleostei le ricerche di Krause (1918), Kappers (1906), Wallemberg (1921), Jowa (1926); per gli Anfibi quelle di Durken, Larsell (1929) e di Kollros (1947-1948) e, nel pollo, quelle di Filogamo (1948-49)]. Ma gli autori si sono preoccupati più di problemi quantitativi che del problema del differenziamento dei neuroni presenti.

La opportunità dello studio del tetto ottico in questi problemi sul differenziamento dei neuroni, sta nella elevata e del tutto peculiare differenziazione dei suoi neuroni. Ricordo, dalle ricerche di Fusari (1887), di P. Ramon (1890), di Cajal (1911), di Van Geuchten (1894) e di molti altri, come nel tetto ottico dei Vertebrati esistano diversi strati caratteristici in cui sono comprese tipiche « cellule bipolari » il cui neurite si diparte, in genere da circa la metà del prolungamento rivolto alla periferia, per dirigersi con un'ansa più o meno stretta verso gli strati profondi. La natura tipicamente visiva di questi neuroni è accettata unanimamente dai neurologi e mi basta ricordare a tal proposito Cajal, Herrick, Huber e Crosby, Happers, Krause.

La peculiarissima condizione del neurite che dopo una corsa in una direzione ritorna sui suoi passi formando una tipica ansa, è stata interpretata dal Leghissa<sup>(3)</sup> in relazione all'azione antagonista di campi neurobiotattici che si creerebbero con l'attività visiva e di sensibilità generale. « Inizialmente - dice l'autore - tutti gli elementi della lamina tectale presentano le stesse caratteristiche; solo successivamente essi diversificano. Il neurite ricorrente si forma in corrispondenza di una zona neutra del tronco principale, laddove l'azione dei due campi neurobiotattici si neutralizzano ».

Risultano dalla letteratura diversi lavori sulle vie e sui centri ottici di vertebrati cavernicoli, Anfibi e Pesci. Per quanto riguarda i Teleostei

(1) ALBERTO STEFANELLI, *I problemi della determinazione nervosa in rapporto a processi di riparazione e rigenerazione nel sistema nervoso centrale degli Anfibi*. « Acta Acc. Pont. », VIII, 16, 1945; *I fenomeni della determinazione della rigenerazione e del differenziamento del sistema nervoso*. « Mem. Acc. Naz. Lincei » 1947, ser. VIII, vol. I; *La determinazione istologica ed il differenziamento della cellula nervosa indagati col metodo degli espianti*. « Ric. Morfol. », XXII, 1947; *Sviluppo, differenziamento e involuzione dell'elemento nervoso*. « La Ric. Scient. », anno 20, n. 5, 1950; *Il neurone di Mauthner degli Ittiopsidi*. « Experimentia », vol. IX, 1953.

(2) A. D'AMBROGIO, *Ricerche sul differenziamento specifico di alcuni neuroni dei Teleostei*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. VI, 1949.

(3) S. LEGHISSA, *Gli elementi nervosi con neurite ricorrente e bineuritici del tetto mesencefalico di avannotti di Trota*. « Ric. Morfol. », XXII, 1946.

ricordo i lavori di Ramsey, su *Amblyopsis* (1901)<sup>(4)</sup>, che osserva una riduzione volumetrica dei lobi ottici con riduzione essenziale del 2°, 4° e 5° strato cellulare, quelle di Franz (1912)<sup>(5)</sup> che osserva egualmente una riduzione del tetto in *Trypauchen* e specialmente del *torus longitudinalis*, e quelle più estese di Charlton (1933)<sup>(6)</sup> in *Troglichthys* e *Typhlichthys* il quale, oltre a trovare queste riduzioni del tetto, osserva anche l'assenza del nucleo dell'istmo e della commissura tetto-istmica, nucleo ritenuto in rapporto con i centri stato-acustici. Nessuno di questi autori, tuttavia, va oltre alla citoarchitettura e non si occupa della differenziazione specifica dei neuroni.

Nel mio studio ho potuto comparare la condizione del tetto ottico dell'*Anoptichthys* con quella di un pesciolino molto affine e di egual taglia corporea che vive nelle stesse regioni nelle acque aperte, l'*Astianax mexicanum*, altre di altre specie affini (Characidae).

I preparati sono stati allestiti con il metodo di Bodian all'argento colloidale (Protargolo di Bayer) e di Cajal formula III.

Il tetto ottico del pesce cieco appare con una notevole riduzione rispetto alla forma con occhi sia per le dimensioni generali che per lo spessore; anche il *torus longitudinalis medialis* è ridotto, mentre vi è un maggior sviluppo del *torus semicircularis* [con funzione eminentemente acustico-laterale: Horst, 1917; Kappers, 1907; Johnston, 1901-1911; Holmgreen, 1920; ecc.] (fig. 1).

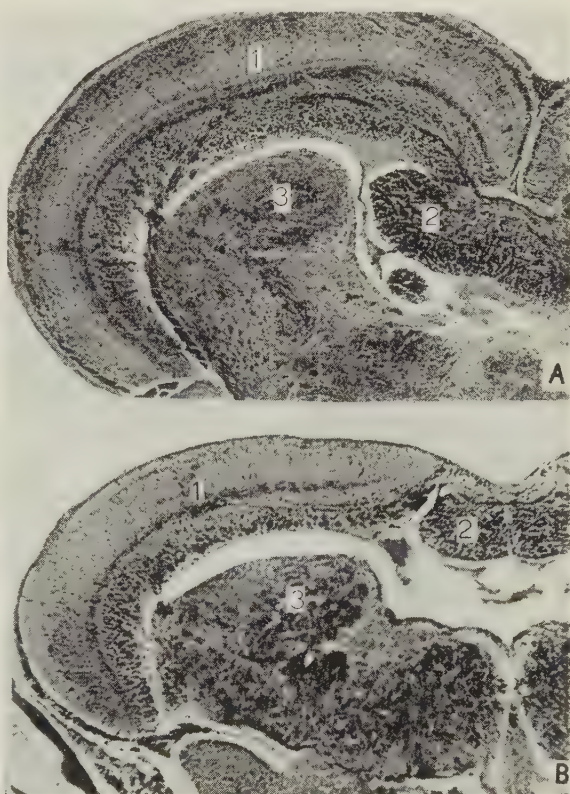


Fig. 1. — Sezioni trasverse del tetto ottico.

A, di *Astianax mexicanum* e, B, di *Anoptichthys jordani*. Notare la riduzione nel pesce cavernicolo della corteccia del lobo ottico (1); del *torus longitudinalis* (2), mentre rimane ben sviluppato il *torus semicircularis* (3), stato-acustico. (Met. Bodian).

(4) E. RAMSEY, *The optic lobes and optic tracts of « Amblyopsis spelaeus »*. « J. Comp. Neur. », 22, 1901.

(5) V. FRANZ, *Beitrage zur Kenntniss des Mittelhirns und Zwischenhirns der Knochenfische* « Fol. Neur. Biol. », 6, 1912.

(6) H. H. CHARLTON, *The optic tectum and its related fiber tracts in blind fishes*. « J. Comp. Neur. », 57, 1933.

Dei sei strati in cui può essere suddiviso il tetto ottico (seguendo la nomenclatura di Huber e Crosby <sup>(7)</sup>) il 1° è quasi completamente assente (vi è pertanto in questo strato una piccolissima percentuale non ottica); gli altri strati appaiono tutti ridotti, ma soprattutto il 5° seguito dal 2° e dal 3°.

Nel 5° strato è presente, nei Teleostei con occhi sviluppati, il più gran numero di neuroni a neurite ricorrente e vi si notano inoltre caratteristiche fibre ad arco che, partendo dallo strato fibroso periventricolare, ritornano su se stesse. Anche per queste fibre ad ansa sono stati considerati fattori neurotropici in relazione alla funzionalità visiva. Nei Pesci ciechi vi è una notevole riduzione numerica degli elementi bipolari a neurite ricorrente, ma, e questo è il fatto che ritengo della massima importanza, *quelli che sono presenti hanno le stesse caratteristiche strutturali di quelli dei pesci con occhi*: il neurite ricorrente è presente come pure sono presenti fibre ricorrenti ad arco a cui abbiamo ora accennato (fig. 2).

Negli esemplari più anziani (di oltre un anno) i neuroni bipolari sono più difficili a rintracciarsi, ma quelli presenti hanno ancora l'aspetto caratteristico descritto sebbene con condizioni che rivelano uno stato di involuzione, quali l'ondulosità dei prolungamenti e la più difficile colorabilità coi metodi argenticici.

Queste osservazioni portano alle seguenti considerazioni e conclusioni.

1° Con i fenomeni di rudimentazione connessi con l'adattamento ecologico alla vita cavernicola degli occhi e dei centri ottici, si conservano, al di fuori di ogni attività visiva, elementi nervosi differenziati quali elementi retinici e neuroni bipolari a neurite ricorrente del tetto. Ciò ha particolare valore tenendo conto che nello stadio di massimo sviluppo degli occhi, a circa otto giorni dalla fecondazione, non vi sono ancora elementi differenziati nel tetto e che pertanto il differenziamento si manifesta *dopo*, quando è già avanzata l'involuzione degli occhi.

2° La tipica struttura degli elementi bipolari a neurite ricorrente è pertanto acquisita precocemente, indipendentemente da ogni attività fisiologica visiva, poiché non vi è mai la formazione di un nervo ottico anche nel momento di massimo sviluppo dell'occhio. Si deve pertanto scartare nella evoluzione di questi elementi ogni fenomeno neurobiotattico dovuto sia alla attività visiva, sia alla presenza di vie ottiche in se stesse, in senso anatomico.

3° Appare invece evidente il valore genetico nel differenziamento di questi neuroni specifici, nel senso già da me dato nei fenomeni di differenziamento delle cellule nervose con le osservazioni sperimentali sulle cellule di Mauthner degli Ittiopsidi, cioè di acquisizione intrinseca degli attributi del differenziamento specifico al momento della determinazione isto-

(7) G. C. HUBER, e E. C. CROSBY, *The influences of afferent paths on the cytoarchitectonic structure of submammalian optic tectum*. « Psychiatren Neurol. Bladen », 3 e 4, 1934. Gli strati, secondo questi autori, si possono così elencare: 1° strato ottico; 2° strato fibroso e grigio superficiale; 3° strato grigio centrale; 4° strato bianco centrale; 5° strato grigio periventricolare; 6° strato fibroso periventricolare.



genetica che, molto precocemente e in momenti specifici per i vari neuroni, si manifesta con stretto valore topografico.

Con ciò non si vuole negare il valore della attività fisiologica nella acquisizione di particolari attributi strutturali, ma questi possono essere limitati alle estremità dei prolungamenti e ai meccanismi sinaptici (ricerche in corso).



Fig. 2. - Sezioni trasverse della corteccia di un lobo ottico nella zona del 3° e 4° strato.

In A di *Astianax* e in B di *Anoptichthys* di circa 3 mesi e in C e D di *Anoptichthys* di oltre un anno. Notare i neuriti ricorrenti (1) e le fibre ad ansa (2) in entrambe le specie. Notare nel pesce cieco di oltre un anno la minor colorabilità argentea dei neuroni e l'andamento ondulato delle fibre, indici di progredita atrofia. (Met. Bodian).

Così molte strutture che apparirebbero legate a fenomeni funzionali, come ad esempio il neurite ricorrente, risultano di natura intrinseca o per lo meno indipendenti dalla attività fisiologica specifica. Ciò dimostra che, nei fenomeni di orientamento dei neuriti non è possibile generalizzare: infatti mentre dalla mie precedenti ricerche è risultato che la direzione in senso caudale delle fibre di Mauthner è in relazione ad un forte neurotropismo (di natura per ora sconosciuta), la decussazione delle stesse fibre appare come una intrinseca proprietà. Così, intrinseca è la proprietà dell'assone degli elementi bipolari del tetto di compiere la caratteristica ansa ricorrente.



La condizione involuta dei neuroni a neurite ricorrente negli animali più anziani dimostra che l'assenza della funzione per cui questi neuroni sono preparati porta ad una lenta ma fatale involuzione e distruzione. A tal riguardo ho potuto constatare, con esperienze fatte con Colonnetti<sup>(8)</sup>, come tale involuzione si manifesti anche in teleostei (*Xiphophorus*, *Lebistes*) a cui siano asportati gli occhi quando già il differenziamento del tetto è completamente avvenuto, determinando ipoplasia del tetto.

Fatto che potrebbe apparir strano è che vi sia ancora una attività di determinazione istogenetica di neuroni specifici della visione in animali in cui non si svilupperanno gli occhi. Ma tale fenomeno è della stessa natura di quello per cui nel residuo retinico del rudimento oculare si differenziano ancora elementi retinici. Si potrebbe spiegare tale fatto considerando in questi pesci cavernicoli un recente adattamento alla nuova condizione ecologica che ha portato alla rudimentazione degli occhi, ma non ha ancora operato una completa sparizione sia di questi organi di senso, come dei centri ottici. Ma lascio questo problema, non vedendo un realizzabile metodo sperimentale per risolverlo<sup>(9)</sup>.

**Biologia.** — *Aspetti citochimici della spermioistogenesi di cavia*<sup>(\*)</sup>.  
Nota di ALBERTO STEFANELLI ed ENRICO URBANI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

I metodi citochimici introdotti nella indagine morfologica della cellula hanno rimesso nuovamente sul tappeto diverse questioni riguardanti il significato morfologico e funzionale dei vari suoi costituenti.

L'applicazione di tali metodi alle cellule germinali femminili è stata già ampiamente eseguita per l'importanza del fenomeno della vitellogenesi e uno di noi (Urbani 1949-1953)<sup>(1-2)</sup> ha ripreso con tecniche citochimiche qualitative e quantitative la ricerca di Cotronei (1910-1911)<sup>(3-4)</sup> sulle fasce vitellogene di *Antedon* estendendo poi le osservazioni ad altri corpi presenti negli oociti in accrescimento.

(8) E. COLONNETTI, *Correlazioni di sviluppo tra lente, retina e centri visivi negli avannotti di Teleostei*. 1949-50. Tesi di laurea.

(9) Queste osservazioni sul tetto dei pesci cavernicoli sono state pubblicamente esposte alla riunione degli Embriologi in Napoli il 4 gennaio 1954 e al simposio del Board del « Journal of Embryology and experimental Morphology », il 9 gennaio 1954 a Londra. Ricerche in corso, di prossima pubblicazione, dimostrano la differenziazione di neuroni bipolari e neurite ricorrente in espianti (in allanto-corion) di tetto di embrione di pollo (STEFANELLI e CHITI).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » e nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze della Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) E. URBANI, « Riv. di Biologia », 41, 331 (1949).

(2) E. URBANI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 15, 308 (1953).

(3) G. COTRONEI, « Boll. Soc. Nat. Napoli », 24, 155 (1910).

(4) G. COTRONEI, « Arch. Zool. », 5, 41 (1911).

Meno studiata è stata, con questi metodi, la gametogenesi maschile.

A tale riguardo ci siamo particolarmente occupati, in queste prime ricerche, del valore istochimico dell'acrosoma, organello peculiare degli spermatozoi.

Non potendo in questa Nota fare un esame critico della letteratura inerente alle questioni da noi trattate ci limitiamo a ricordare, tra gli altri, i lavori di Pasteels (1948)<sup>(5)</sup>, Battaglia e Omodeo (1949)<sup>(6)</sup>, Montalenti e Alievi (1949-1950)<sup>(7-8)</sup>, Daled (1951)<sup>(9)</sup>, Panijel e Pasteels (1951)<sup>(10)</sup>.

L'acrosoma è stato ampiamente studiato da citologi con i metodi classici (Meves, Ballowitz, Terni, Gatemby, Bowen, Krapowa, Branca e Verné, Weigt, Woodger e moltissimi altri).

Senza voler entrare nell'argomento della derivazione di questo organello possiamo riferirci al concetto più generalmente accettato cioè che esso appaia, nella cavia, come una piccola massarella rotonda (proacrosoma) al centro della regione acroblastica, ossia di quella parte chiara centrale dello idiosoma circondata dalla sostanza periidiosomica (alla cui formazione parteciperebbe anche l'apparato di Golgi, con i corpi periidiosomici).

Testicoli di cavia sono stati fissati in Bouin, Zenker formolico, alcool acetico e sezioni in paraffina di 7-10  $\mu$  sono state trattate con il reattivo di Feulgen per la ricerca del DNA, con il verde di metile pironina per il DNA e RNA, controllando il valore della basofilia, per la pironina, con la ribonucleasi o con acido perclorico. Per lo studio delle proteine è stata usata la reazione di Millon secondo Bensley, la colorazione con bleu di bromofenolo (Mazia, Brewer e Alfert 1953)<sup>(11)</sup>, la reazione con ninidrina e reattivo di Schiff (Yasuma e Ichikawa 1953)<sup>(12)</sup>, la colorazione con coloranti acidi e basici a vari pH (Singer 1952)<sup>(13)</sup>.

Lo studio delle proteine contenenti aminoacidi aromatici è stato inoltre eseguito insieme a quello degli acidi nucleici su preparati non colorati e fotografati in luce UV 2750 Å e 2537 Å trattati o no con ribonucleasi. Sono state inoltre fatte colorazioni con ematossilina ferrica e verde-luce e con la miscela triacida di Mallory.

I preparati così allestiti sono stati in alcuni casi sottoposti ad analisi spettrofotometrica con l'apparecchio messo a punto e illustrato da uno di noi (Urbani 1953).

Alcuni dati ottenuti furono già comunicati da uno di noi (Stefanelli, 1951)<sup>(14)</sup>.

(5) J. PASTEELS, « Arch. de Biol. », 59, 405 (1948).

(6) B. BATTAGLIA e P. OMODEO, « Caryologia », 2, 1 (1949).

(7) G. MONTALENTI, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 25, 552 (1942).

(8) G. MONTALENTI, G. VITAGLIANO e M. DE NICOLA, « Heredity », 4, 75 (1950).

(9) H. J. DALED, « Arch. Anat. Microscop. et Morph. Exp. », 40, 183 (1951).

(10) J. PANIJEL e J. PASTEELS, « Arch. de Biol. », 42, 353 (1951).

(11) D. MAZIA, P. A. BREWER, e M. ALFERT, « Biol. Bull. », 104, 57 (1953).

(12) A. YASUMA e T. ICHIKAWA, « J. of Lab. and Clin. Med. », 41, 296 (1953).

(13) M. SINGER, « Int. Rev. of Cytology », 1, 211 (1952).

(14) ALBERTO STEFANELLI, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 27, 186 (1951).

In questa Nota viene riassunto l'insieme dei risultati derivati dalle nostre osservazioni.

Il presente studio è limitato dall'apparizione del proacrosoma sferico sino alla sua completa evoluzione in acrosoma.

Con il metodo di Feulgen tale organello è risultato sempre privo di acido desossiribonucleico. Col metodo Unna-Pappenheim si è avuta completa conferma (negativo con il verde di metile). Quest'ultimo metodo ci ha dimostrato essere l'acrosoma assolutamente privo anche di RNA durante tutto il suo ciclo di differenziamento.

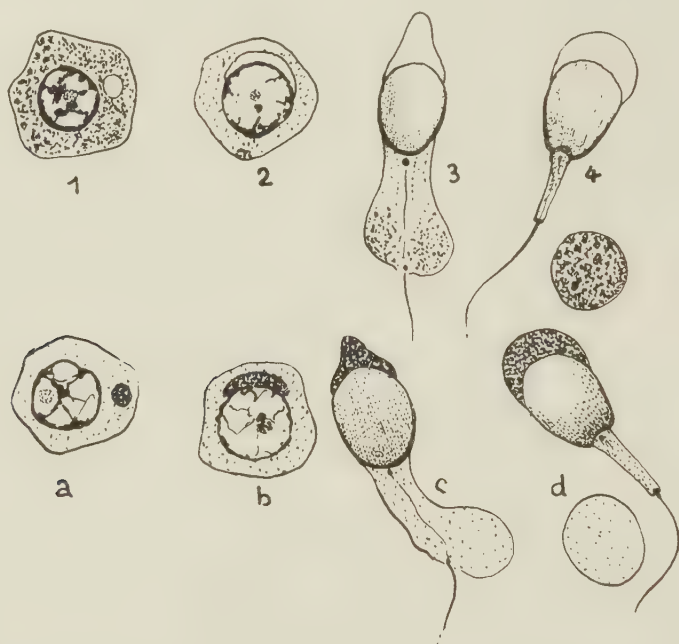


Fig. 1. (1, 2, 3, 4). - Colorazione con verde di metile pironina, l'acrosoma non prende nessuno dei due colori ad alcun stadio del suo sviluppo; la sferula di citoplasma espulsa dallo spermatozoo è intensamente basofila. (a, b, c, d) colorazione con Feulgen-verde luce: l'acrosoma si colora elettivamente in verde.

Si osserva invece con questi metodi come il DNA sia abbondantemente contenuto nelle zolle cromatiniche dei giovani spermatidi e come, con la evoluzione del nucleo nella tipica forma a cucchiaino dello spermio maturo si vada diffondendo in modo omogeneo nel nucleo stesso, colorando più intensamente i bordi laterali e interni del nucleo stesso (fig. 1).

Appare invece ricco di RNA il citoplasma del giovane spermatide e soprattutto il nucleolo. Con la spermioistogenesi tale composto va scemando e il citoplasma appare sempre più pallidamente colorato. Appare invece intensa la colorazione della sferula citoplasmatica che viene eliminata nell'ultima fase di maturazione dello spermatozoo. Tali sferule vengono versate nel lume del tubolo seminale. Questa osservazione è stata segnalata nella relazione di uno di noi (Stefanelli) nel marzo 1951 a Bari<sup>(14)</sup>. È stata trovata anche da Daled (1951)<sup>(9)</sup> nella spermioistogenesi del ratto.

Occorre tener presente che in alcuni casi si osservano nei tuboli seminferi ammassi imponenti di goccioline intensamente basofile; in questo caso si tratta di spermatozoi degenerati.

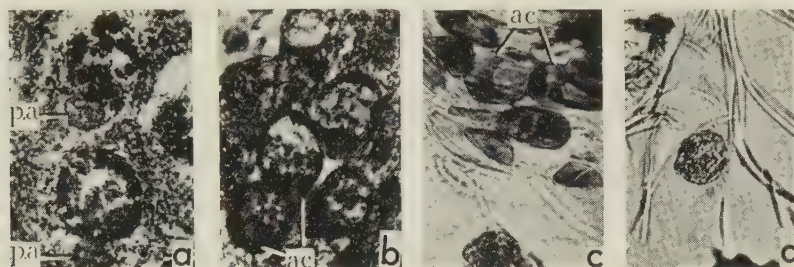


Fig. 2. - Fotografia in luce ultravioletta a  $2750 \text{ \AA}$  di un preparato non colorato, si noti l'assorbimento del proacrosoma (p. a. fig. a), dell'acrosoma (ac. figg. b, c) e della sferula citoplasmatica (fig. d). L'assorbimento del proacrosoma e dell'acrosoma non si modifica in modo apprezzabile a seguito del trattamento con ribonucleasi, dopo la digestione enzimatica diminuisce invece l'assorbimento della sferula citoplasmatica.

L'aumento di basofilia della goccia citoplasmatica eliminata può essere dovuto alla liberazione di RNA nei fenomeni degenerativi a cui questa parte citoplasmatica va incontro (fig. 1) e la forte basofilia dovuta a depo-

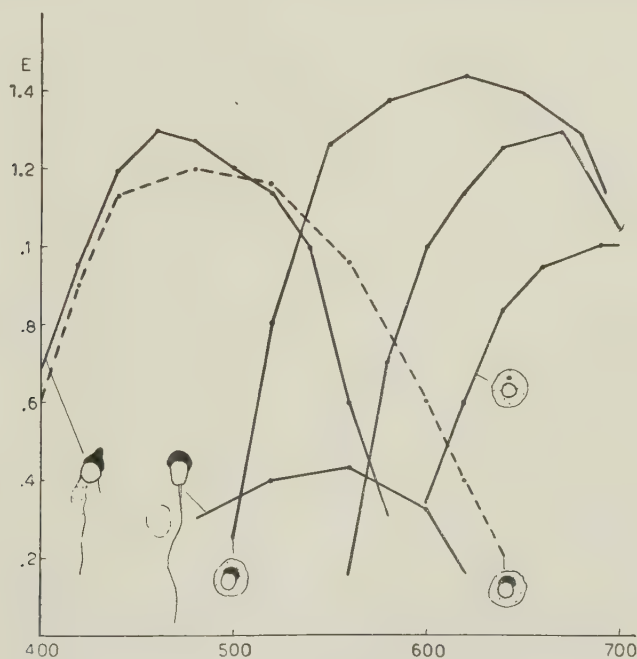


Fig. 3. - Curve di estinzione dell'acrosoma a vari stadi di sviluppo (preparato colorato con Mallory); in ordinate l'estinzione in ascisse le lunghezze d'onda in  $m\mu$ . Si noti lo stadio a semiluna nel quale alcuni acrosomi danno una curva di assorbimento, altri acrosomi danno una curva completamente diversa. Ciò rivela a questo stadio un cambiamento delle affinità tintoriali.



limerizzazione delle molecole di RNA più che ad una sintesi che in questo caso è poco verosimile.

Questo comportamento dell'acido ribonucleico è stato controllato anche con la microfotografia in luce UV prima e dopo azione della ribonucleasi (fig. 2).

La colorazione con il reattivo di Schiff e verde luce aveva posto in evidenza come l'acrosoma sia costituito da una proteina peculiare, per lo meno per il suo particolare addensamento, che conferiva all'organello una spiccata elettività per quest'ultimo colore. La fotografia nell'ultravioletto ha dimostrato come questa proteina sia infatti ricca di aminoacidi aromatici a differenza del restante protoplasma. Il reperto è stato confermato con la reazione di Millon.

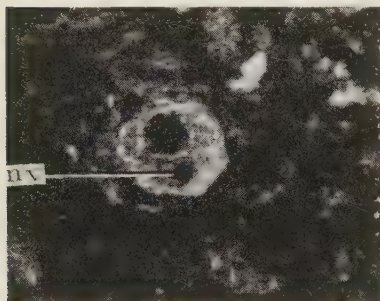


Fig. 4. - Nucleo vitellino dell'ovocite di cavia fotografato in luce ultravioletta a 2570 Å. Si noti la rassomiglianza con il proacrosoma della fig. 2. L'assorbimento del nucleo vitellino non si modifica in modo apprezzabile a seguito di trattamento con ribonucleasi; RNA è invece contenuto nell'ooplasma circondante il nucleo vitellino (*couche vitellogène*).

Si è potuto inoltre constatare con la colorazione tricromica di Mallory come l'acrosoma, che nella sua fase iniziale si tinge in grigio, subisca, ad un certo stadio del suo sviluppo, quando ha di poco superato la forma di semiluna, una brusca affinità tintoriale per l'arancio G.

Di particolare efficacia è stata l'applicazione della tecnica spettrofotometrica, che permette la valutazione delle curve di assorbimento alle varie lunghezze d'onda delle reazioni colorate (fig. 3). Con questo metodo si è potuto constatare come la colorazione dell'acrosoma con il verde luce abbia una punta di massimo assorbimento che è specifica e che risulta anche variare durante l'evoluzione di questo organello con il pH al quale si trova il verde luce.

La colorazione con il verde luce (o con altro colorante acido) a vari pH seguita dalla analisi dell'assorbimento può pertanto essere un metodo assai utile per distinguere diverse proteine protoplasmatiche.

È molto probabile, e ricerche sono in corso al riguardo, che la variazione di colorabilità dell'acrosoma nella sua evoluzione, sia in relazione con la sintesi di carboidrati o lipidi.

Secondo Karpova<sup>(15)</sup> infatti, negli spermatozoi di molluschi il contenuto lipidico sarebbe più elevato nell'acrosoma che in altre parti della cellula e secondo Adamstone e Cord (1934)<sup>(16)</sup> negli spermatozoi di gallo si formano, nelle teste, corpi adiposi che questi autori ritengono formati dal materiale acrosomico e che avrebbero valore trofico.

(15) KARPOVA, citato da LEVI, *Istologia*. «UTET», 1935.

(16) T. B. ADAMSTONE et C. E. CORD, «J. Morph.», 56 (1934).

Secondo ricerche in corso di stampa di De Girolamo, cortesemente comunicateci dall'A., nell'acrosoma degli spermatozoi di bufalo si sintetizzerebbero carboidrati.

La somiglianza dell'acrosoma nelle sue prime fasi (proacrosoma) con il nucleo vitellino degli oociti della stessa specie studiati da uno di noi (Urban) <sup>(1-2)</sup>, privo anch'esso sia di DNA che di RNA fa pensare ad una omologia morfologica e biochimica di queste strutture (fig. 4).

Mentre nell'oocita tale corpo con la *couche vitellogène* che lo circonda partecipa (ad opera essenzialmente di quest'ultima che contiene RNA) alla sintesi del vitello ed ha un valore nella formazione di questa sostanza energetica di riserva, negli spermatidi si evolve in acrosoma. Tuttavia anche nel gamete maschile in questa sede si sintetizzerebbero (le ricerche in corso mirano ad identificare la generalità del fenomeno) carboidrati e forse lipidi con evidente valore energetico. Pertanto l'acrosoma del gamete maschile avrebbe un valore nella sintesi di materiale trofico.

**Biologia.** — *Il differenziamento specifico dei neuroni indagato col metodo degli impianti corion-allantoidei nel pollo* <sup>(\*)</sup>. Nota di ALBERTO STEFANELLI e LAURA CHITI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. CONTRONEI.

Queste ricerche sul differenziamento dei neuroni col metodo degli impianti corion-allantoidei nel pollo sono una estensione delle esperienze iniziate da uno di noi (Stefanelli, 1945) <sup>(1)</sup> con trapianto in isolamento di neuroblasti presuntivi mauthneriani, in embrioni di *Rana*, e delle più recenti osservazioni sul differenziamento dei neuroni specifici del tetto ottico dei Teleostei ciechi <sup>(2)</sup>.

Dalle esperienze sulle cellule di Mauthner era risultato, quale fatto fondamentale, che, una volta subita da parte del neuroblasta la determinazione istogenetica particolare, esso manifesta le proprie caratteristiche strutturali anche nel più completo isolamento funzionale, come ad esempio in espianti *in vitro* <sup>(3)</sup>. In condizione di espianto, pur manifestando le caratteristiche specifiche, si avevano varie condizioni di anomalia specialmente

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze della Università di Roma con un contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) ALBERTO STEFANELLI, *La determinazione della cellula di Mauthner nell'embrione di Rana*. « Boll. Soc. Biol. Sperim. », XX, 1945; *I fenomeni della determinazione e della rigenerazione e del differenziamento del sistema nervoso*. « Mem. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. II (1947).

(2) ALBERTO STEFANELLI, in questo numero dei « Rendiconti ».

(3) ALBERTO STEFANELLI, *La determinazione istologica ed il differenziamento della cellula nervosa indagati col metodo degli espianti*. « Ric. di Morfol. », XXII, 1947.

nella dimensione e nella grandezza dei prolungamenti. Da queste osservazioni e da altre di trapianto dei neuroblasti in posizione eterologa è stata raggiunta la conclusione che tali anomalie erano da imputarsi in primo luogo a fattori spaziali, che non permettevano un normale accrescimento di questi prolungamenti, e in secondo luogo alla assenza di particolari fattori neurotropici che avrebbero dovuto agire sui prolungamenti che avevano intrinsecamente acquisita la suscettibilità di essere da questi orientati. I fattori fisiologici, derivanti dalla attività funzionale, e di territori vicini e della cellula stessa, se non si possono escludere specie nella attuazione dei più fini rapporti sinaptici, non sembrano avere, in queste prime fasi dello sviluppo che portano al differenziamento generale e particolare, una importanza valutabile. La mancanza di funzionalità si fa sentire invece successivamente con i fenomeni di regressione e atrofia a cui i neuroni vanno incontro.

Nella estensione di queste ricerche è stato dimostrato, con lo studio di caratteristici neuroni a neurite ricorrente del tetto ottico di Teleostei cavernicoli ciechi, che anche altri neuroni altamente specifici sono nella stessa situazione di un elevato differenziamento indipendente dalla attività fisiologica (Stefanelli, 1954)<sup>(2)</sup>. Infatti nei pesci ciechi cavernicoli studiati (*Anophthalmichthys*), nell'atrofico tetto ottico, indipendentemente quindi da fattori biotattici visivi o da competizioni di campi biotattici ottici e di sensibilità generale come era stato supposto da Leghissa<sup>(4)</sup>, non solo si differenzia un certo numero di neuroni bipolari (nel 3° e 4° strato), ma si differenzia il caratteristico neurite ricorrente il cui cammino era stato posto in relazione a stimoli visivi.

I neuroni a neurite ricorrente, studiati da Fusari, P. Ramon, Cajal e molti altri autori nei lobi ottici di Pesci, Rettili e Uccelli, sono, secondo le ricerche di Krause, Kappers, Herrick, Huber e Crosby, ecc. tipicamente deputati alla funzione visiva. Si presentano di forma mono o bipolare e dal prolungamento rivolto verso la superficie esterna si diparte un neurite (a volte due) che, ricorrendo il prolungamento, compiono una caratteristica ansa. Che tale decorso fosse regolato da fenomeni di neurobiotassi, nel senso di Kappers, era suggestivo. Tuttavia nei pesci cavernicoli ciechi, dove non si esercitano stimoli visivi e non si possono creare campi neurobiotattici visivi, in quegli elementi che ancora, quale residuo, si osservano nel tetto, il neurite manifesta la stessa caratteristica disposizione.

Benché queste osservazioni parlassero in modo evidente in favore di una concezione genetica, intrinseca, di tale proprietà della fibra, presumibilmente acquisita al momento della determinazione istogenetica particolare, e che nei pesci ciechi si continuava a manifestare, malgrado la perdita della funzione specifica, quale residuo di una condizione esistente prima del particolare adattamento ecologico, si poteva sempre pensare (quantunque la obiezione avesse poca forza data la specifica natura ottica degli elementi).

(4) S. LEGHISSA, *Gli elementi nervosi con neurite ricorrente e bineuritici del tetto mesencefalico di avannotti di Trota*. « Ric. Morfol. », XXII, 1946.

che se non di un campo funzionale ottico si potesse trattare di altro campo fisiologico tenendo presente che al tetto dei teleostei giungono anche altre fibre sensorie, sia gustative come stato acustiche (sebbene non in prevalenza alla corteccia dei lobi, ma ai tori semicircolari).

Comunque, per eliminare ogni possibile influenza fisiologica, si è pensato, alla stessa stregua con cui si è operato per la cellula di Mauthner (Stefanelli 1947) <sup>(3)</sup>, di eseguire esperienze di espianti di frammenti del tetto.

Per queste esperienze ci siamo rivolti al tetto ottico degli uccelli (*Gallus domesticus*, razza livornese) in cui i neuroni bipolari a neurite ricorrente sono evidentissimi, sfruttando la tecnica del trapianto in allanto-corion che permette una più lunga sopravvivenza dei frammenti, dato che in tale sede il frammento è completamente isolato dall'embrione ospite ed è nelle stesse condizioni di un espianto.

In queste prime esperienze si sono prelevati i frammenti del tetto mesencefalico allo stadio, indicato nello schema, di vescicola ottica primaria a circa 50 ore di incubazione (fig. 1).

Praticamente i frammenti furono innestati sull'allanto-corion di un ospite ad uno stadio di sviluppo un poco più avanzato, quando già questa membrana è vascolarizzata (dopo 6 giorni di incubazione) in modo da facilitare l'attecchimento. Il frammento veniva quindi fissato dopo 18-19 giorni di incubazione e i preparati vennero allestiti con il metodo di Cajal-De Castro.

I risultati sono quelli illustrati dalle micro fotografie qui riportate (fig. 2). In A è la condizione del tetto in un embrione della stessa età degli impianti. Si vedono chiaramente le cellule bipolari allungatissime e si osservano i neuriti ricorrenti che compiono, ad un certo punto del loro percorso, una brusca ansa ricorrente. In B e C sono due aspetti degli espianti: le cellule hanno la stessa forma, seppure disposte un poco più disordinatamente, e presentano il caratteristico neurite ricorrente.

Questa esperienza dimostra in modo inoppugnabile che la struttura bipolare e l'andamento ricorrente del neurite di questi neuroni, sono condizioni intrinsecamente determinate nei neuroblasti che danno origine a queste cellule. In questi piccoli frammenti in cui si sviluppano tali cellule non si può assolutamente parlare di campi neurobiotattici, né ottici né di altra natura.

Queste esperienze collimano pertanto perfettamente con le osservazioni sui teleostei ciechi e danno una controprova della giustezza della interpretazione data (Stefanelli, 1954). La proprietà ricorrente dei neuriti di queste

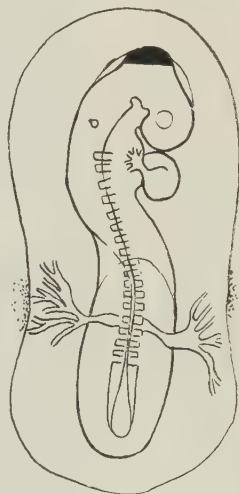


Fig. 1. — Schema dello stadio dell'embrione di pollo da cui è stato tolto il frammento mesencefalico (in nero), di circa 50 ore di incubazione.



cellule è intrinseca: essi si accrescono verso la parte basale della cellula stessa alla stessa stregua con cui il neurite di Mauthner ha la intrinseca proprietà di accrescersi verso la parte caudale del midollo (Stefanelli, 1947) indipendentemente dalla attività funzionale.

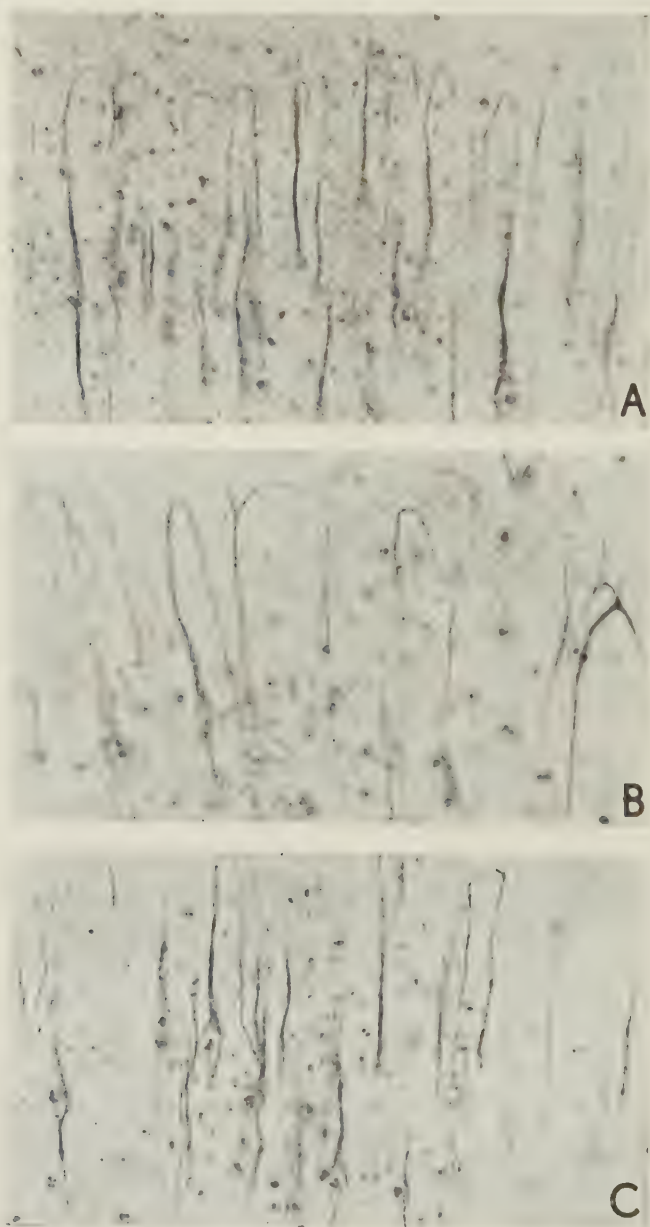


Fig. 2. - Struttura dei neuroni bipolari a neurite ricorrente dei lobi ottici di un pollo dopo circa 15 giorni di incubazione (A) e degli stessi neuroni in espianti della stessa età isolati allo stadio indicato nella fig. 1 (B e C). Notare la presenza dei tipici neuriti ricorrenti in entrambe le condizioni. Metodo Cajal-De Castro.

In conclusione, con queste esperienze di trapianto di frammenti del tetto di embrione di pollo in isolamento (trapianto in allanto-corion), viene dimostrato l'autodifferenziamento di neuroni ad elevata specificità strutturale quali i neuroni bipolari del tetto, e viene dimostrato che il peculiare accrescimento ricorrente dei neuriti è anch'esso dovuto ad una attività intrinsecamente acquisita al momento della determinazione dei neuroblasti, indipendente da fattori neurobiotattici fisiologici.

**Biologia.** — *Correlazioni tra sistema nervoso ed arti.* — III. *Considerazioni* (\*). Nota di TEODORO PERRI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Mi sono occupato delle correlazioni tra sistema nervoso ed arti, in tre serie di esperienze eseguite su embrioni di *Bufo vulgaris*.

La prima serie di esperienze (\*) concerne l'innervazione di arti provenienti dal trapianto del presunto abbozzo dell'arto posteriore in embrioni di *Bufo vulgaris*. Ne ho ottenuto lo sviluppo, e l'arto fu sempre un arto posteriore anche quando il trapianto fu eseguito vicinissimo all'abbozzo dell'arto anteriore, ove la somatopleura ha la competenza a formare arti anteriori (mai posteriori); il che assicura che si è effettivamente trattato dello sviluppo del trapiantato, perché se il trapianto avesse agito solo come stimolo della somatopleura si sarebbero qui avuti arti anteriori. Questi trapianti mi hanno pure permesso di stabilire un parallelo tra arti indotti e arti trapiantati. Gli arti provenienti dal trapianto del relativo abbozzo, che ho avuto finora, sono stati tutti immobili (vedremo che nel trapianto dell'abbozzo dell'arto insieme con midollo spinale si hanno condizioni molto differenti). Sulle cause dell'immobilità degli arti e quindi sul comportamento della muscolatura, dell'innervazione, dello scheletro e delle articolazioni, ritornerò tra poco.

In una seconda serie di esperienze eseguite su embrioni di *Bufo vulgaris* allo stadio di bottone codale piccolissimo, mi sono occupato del trapianto dei due presunti abbozzi degli arti posteriori insieme con un tratto più o meno esteso di organi assili posteriori comprendente un tratto di midollo spinale, la parte corrispondente di corda dorsale e i somiti adiacenti. Questo secondo gruppo di esperienze ha il compito di studiare alcune condizioni del midollo spinale in raffronto con la mobilità degli arti. Quando nel midollo del trapiantato vi è compresa una parte almeno dell'intumescenza lombare si ha che questa presenta il differenziamento dei corni ventrali con grosse cellule motorie, ed allora si hanno arti mobili con innervazione proveniente

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma, con contributi del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) In questi « Rendiconti », 2° sem. 1953.

solo dal midollo spinale trapiantato e con abbondante muscolatura. Se invece nel tratto di midollo trapiantato non è compresa l'intumescenza lombare (fu trapiantato solo midollo spinale sito caudalmente a detta zona) allora gli arti si presentano immobili, con muscolatura scarsissima o assente, e senza evidente innervazione. Tra questi ultimi casi ne ho avuto uno con fascetti nervosi in rapporto con la cute, provenienti dal midollo spinale del portatore.

In una terza serie di ricerche<sup>(2)</sup> mi sono occupato dell'innervazione di arti soprannumerari da induzione abnorme, esaminando sia casi con arti immobili sia casi con arti mobili. Anche per questi, come per i trapianti di arto, discuterò i caratteri dell'innervazione, della muscolatura, dello scheletro, delle articolazioni.

Nella presente Nota svolgerò alcune considerazioni su questioni di carattere generale, quali risultano dalle tre sopradette serie di esperienze. Mi occuperò dei fattori che hanno importanza nella mobilità degli arti, del comportamento del midollo spinale e accennerò ad una comparazione tra Anuri, Urodeli e pollo. Nella mia prima Nota ho riportato varie notizie bibliografiche, che si troveranno molto più complete nel mio lavoro in esteso (nella « Rivista di Biologia »).

**MOBILITÀ DEGLI ARTI.** - Per lo studio delle condizioni che permettono la mobilità degli arti, è necessario prendere in esame la muscolatura, l'innervazione, lo scheletro, le articolazioni. Il comportamento di queste varie parti va esaminato nei casi con arti mobili e, comparativamente, nei casi con arti immobili.

Ho 11 casi di mobilità degli arti: 6 di essi riguardano arti indotti, gli altri 5 appartengono al gruppo dei casi nei quali trapiantai i due presunti abbozzi degli arti posteriori insieme con midollo spinale. In tutti questi casi la muscolatura fu molto abbondante, di poco inferiore al normale. Lo scheletro apparve sempre ben conformato. Le articolazioni (dell'emicinto anteriore con la testa dell'omero, o dell'emicinto posteriore con la testa del femore, a seconda che si tratti di arti anteriori o posteriori) sono costituite assai bene, il che può anche ritenersi ovvio; altrimenti, se fossero esistite fusioni tra l'emicinto e lo scheletro dello stilopodio vi sarebbe stata l'impossibilità materiale del relativo movimento. Per l'innervazione è da notare che essa fu abbondante e sempre in rapporto, o totalmente o in gran parte, con uno dei plessi normali degli arti. Nelle esperienze di trapianto dei due presunti abbozzi degli arti posteriori insieme con un tratto di midollo spinale si ebbe, in tutti i casi nei quali questi arti furono mobili, che il tratto di midollo spinale comprendeva o tutta l'intumescenza lombare (come avvenne in un caso) o una parte di essa con differenziamento dei corni ventrali e delle grosse cellule motorie. Adunque caratteri comuni agli arti mobili sono stati: muscolatura abbondante, innervazione abbondante e almeno in parte cospi-

(2) In questi « Rendiconti », 1954.

cua proveniente dai plessi normali degli arti, scheletro e articolazioni ben conformati.

Vediamo ora i casi con arti immobili, cui appartengono tutti i casi finora osservati di arti trapiantati, la maggior parte degli arti da induzione abnorme, e, nelle esperienze di trapianto dei presunti abbozzi degli arti posteriori insieme con midollo spinale, tutti quei casi dove il tratto di midollo trapiantato non comprendeva alcuna parte dell'intumescenza lombare, ma era una zona di midollo posteriore rispetto ad essa e non presentava nessun differenziamento di corni motori e di grosse cellule motorie.

Per quanto riguarda la muscolatura si rileva che può essere abbondante anche in casi di immobilità. Per l'innervazione mi sembra indicativo un caso ove vi sono due arti indotti, solo uno dei quali è mobile. Orbene, in questo caso il 3° nervo spinale (che costituisce la parte essenziale del plesso brachiale negli Anuri) dello stesso lato si biforca; un ramo è per l'arto normale e l'altro, di dimensioni pressoché uguali, è per la formazione soprannumeraria. Quest'ultimo ramo si porta quasi tutto all'arto soprannumerario mobile, mentre solo una piccola parte di esso va al soprannumerario immobile. Rammento che in ambedue gli arti soprannumerari l'articolazione tra l'emicinto e l'omero è ben conformata (vi è un'unica cavità glenoidea per i due omeri), e che anche nell'arto immobile vi è abbastanza muscolatura. In questo caso sembra che vi sia evidente indicazione che la quantità d'innervazione, supponendo che i due rami del nervo siano tanto sensitivi che motori, abbia la massima importanza nella mobilità degli arti.

In molti altri casi di arti immobili il nervo che penetra nell'arto è di piccole dimensioni, mentre in qualche altro è di dimensioni che sembrerebbero sufficienti. In tutti questi casi sarebbe assai utile conoscere la composizione di detti nervi, ossia la quantità presente di fibre motorie. L'esame, condotto anche con criteri quantitativi, delle terminazioni motorie nei muscoli mi sembra uno dei modi atti a chiarire la questione. Accanto alla quantità d'innervazione è da considerare la provenienza dei nervi. Come ho già detto nelle mie due Note precedenti, l'innervazione per gli arti trapiantati o per gli arti indotti può provenire o dai plessi normali degli arti (che, per gli Anuri, comprendono i nervi 2°, 3°, 4° per l'arto anteriore e i nervi 8°, 9°, 10° per il posteriore) o dai nervi intermedi (5°, 6°, 7°) o dagli uni e dagli altri. Tale provenienza è in rapporto sia con la zona dove trovasi l'arto trapiantato o indotto, sia con una attrazione che il blastema dell'arto trapiantato o indotto esercita sui nervi normali degli arti, per cui una parte di essi va all'arto normale del portatore e una parte devia dal percorso normale per innervare l'arto in più. Si è visto che la quantità d'innervazione proveniente dal plesso normale dell'arto è notevole negli arti mobili ed è molto scarsa negli immobili. È quindi da discutere la funzionalità, agli effetti della mobilità dell'arto, dei nervi non provenienti dai plessi normali degli arti. Il Detwiler, basandosi sia su ricerche proprie che di altri autori, considera i nervi cranici più facilmente funzionali che non gli spinali intermedi ai plessi normali degli arti. Per mio conto osservo che



l'immobilità che ottenni, nelle condizioni sperimentali attuate, degli arti trapiantati o indotti innervati solo o in massima parte da nervi spinali intermedi ai plessi normali degli arti, attende ancora una spiegazione sufficiente. Vi occorre ulteriore sperimentazione, particolarmente nei riguardi della quantità d'innervazione, della quale quantità si è vista sopra la chiara importanza nei casi ove all'innervazione dell'arto trapiantato o indotto partecipano i plessi normali degli arti.

Lo scheletro può essere conformato assai bene anche negli arti immobili.

Per le articolazioni (ho esaminato quella tra l'emicinto anteriore e l'omero o tra l'emicinto posteriore e il femore, a seconda dei casi) ribadisco che esse, come già dissi estesamente nel '51, possono essere ben conformate anche in arti non funzionanti, persino con muscolatura scarsissima e innervazione non rilevabile all'esame istologico. Questi risultati sono d'accordo con quanto fu affermato da vari autori (Banchi, Hamburger, Muratori, ed altri); me ne occupai anch'io negli anni scorsi per gli arti soprannumerari da induzione abnorme. In alcuni casi l'articolazione è mal conformata e, ciò che più interessa rilevare, vi sono zone di fusione tra l'emicinto e la testa femorale (o rispettivamente omerale); sono condizioni meccaniche le quali già per sé stesse impedirebbero il relativo movimento. Tra i miei casi sono molto significativi quelli dove ebbi due arti (o indotti o provenienti dal trapianto di un unico abbozzo d'arto) tra loro differentemente conformati; si ha che l'articolazione tra l'emicinto anteriore e la testa dell'omero (o rispettivamente tra l'emicinto posteriore e la testa del femore) è in condizioni strutturali migliori nell'arto meglio conformato.

Concludendo, da quanto ho sopra detto emerge che la differenza essenziale tra arti mobili ad arti immobili sta nell'innervazione; e precisamente nella sua quantità e nella sua provenienza, almeno in gran parte, dai normali plessi degli arti.

COMPORTAMENTO DEL MIDOLLO SPINALE E DEI GANGLI SPINALI. - Nei miei casi di trapianto di abbozzi di arto e in quelli d'induzione di arti soprannumerari, non ebbi evidenti modificazioni nella parte corrispondente di midollo spinale, ove particolarmente interessa il comportamento della parte motoria. Non ho ancora eseguito (e mi riprometto di farlo in seguito) esatte misurazioni; ma ad un primo esame dette differenze non risultano e d'altronde se sono troppo piccole non si può dar loro importanza. Anche nei casi con mobilità dell'arto, nei quali si è quindi ben sicuri della presenza di un'innervazione motoria, non ho riscontrato differenze tra i due lati della intumescenza interessata. Siamo di fronte alla questione se ad un maggior carico funzionale le cellule motorie reagiscano con modificazioni morfologiche ed istochimiche del pirenoforo oppure con modificazioni del loro neurite. Si tenga inoltre presente che, come ho già ricordato, dai miei trapianti dei presunti abbozzi degli arti posteriori insieme con midollo spinale, è risultato che per la mobilità degli arti non è indispensabile l'intera intumescenza lombare, ma è sufficiente una parte di essa.

Risultati concordi di vari autori (anche miei) sugli Anuri mostrano che l'asportazione di un arto fa scomparire sul lato dell'operazione le peculiarità di una intumescenza, ossia i corni ventrali con le grosse cellule motorie. Se ne deduce che cellule motorie delle intumescenze hanno la capacità, o competenza, di costituire i corni ventrali con grosse cellule motorie, ma la realizzazione di tali capacità è condizionata dalla presenza di arti innervati. Come ho detto poco sopra, anche quando l'arto trapiantato o indotto ha sufficiente muscolatura ed è innervato, non provoca nella corrispondente parte del midollo spinale una nuova intumescenza. Questo differente comportamento delle varie zone del midollo spinale conferma appunto che vi sono in esso differenze regionali già stabilmente determinate quando gli abbozzi degli arti cominciano ad esercitare la loro attrazione (comunque la si voglia intendere) sui nervi.

La reazione dei gangli spinali è bene evidente. Si è visto, sia per gli arti trapiantati che indotti, che l'aumento dei gangli spinali è molto maggiore quando l'arto in questione presenta muscolatura abbondante, altrimenti l'aumento è minore e talora non rilevabile. I gangli spinali sono, com'è ben noto, in rapporto sia con i muscoli (propriocettivi) sia con la cute. In alcuni casi ho osservato fascetti nervosi in rapporto con la cute degli arti indipendentemente dalla presenza o meno di muscolatura.

COMPARAZIONE DEI RISULTATI OTTENUTI IN ANURI, URODELI E POLLO. — È ora opportuno tracciare una breve comparazione tra i risultati ottenuti nello studio delle connessioni tra gli arti e il sistema nervoso, tenendo conto delle specie sulle quali si è sperimentato.

L'arto trapiantato, se fornito di una certa quantità almeno di muscolatura, esercita un'attrazione (la cui natura ed intensità furono assai variamente intese) sui nervi. Vi insistette particolarmente il Detwiler in *Amblystoma*, osservando che se un arto anteriore viene spostato indietro di alcuni segmenti si ha che i nervi del plesso deviano per innervarlo. Negli Anuri (*Bufo vulgaris*) ebbi anch'io alcuni casi di tale attrazione con meccanismo che merita di essere chiarito. Sia negli arti indotti che in quelli trapiantati (il trapianto avvenne in giovani embrioni) si ha che il blastema dell'arto viene a costituirsi pressoché contemporaneamente al normale. E perciò i due blastemi influenzano contemporaneamente i nervi in formazione che costituiranno i plessi degli arti normali, in misura probabilmente diversa a seconda delle dimensioni di essi blastemi e della loro distanza. Tutto lascia ritenere che sia questa azione duplice e contemporanea a produrre, se si tratta di arto anteriore, la biforcazione del 3° nervo spinale (che costituisce quasi da solo il plesso brachiale degli Anuri).

Vi è completa concordanza per quanto riguarda il comportamento dei gangli spinali nei casi di asportazione o di trapianto di arti, ottenendosi nel primo caso ipoplasia e nell'altro iperplasia. Un approfondito esame delle variazioni dei gangli in queste condizioni sperimentali fu eseguito nel pollo (Hamburger e Levi-Montalcini) ed andrebbe fatto anche negli Anfibi.

Vi sono invece molte incertezze per la parte motoria del midollo spinale. Negli Urodeli lo scambio di una regione con un'altra del midollo spinale porta al risultato che le regioni si sviluppano secondo il posto occupato, mostrando ampi poteri regolativi; a meno che non si tratti dei primi due segmenti che presentano un notevole grado di precoce determinazione. Per il trapianto di un arto, o per la sua asportazione, non si notano modificazioni. Questo comportamento degli Urodeli è interpretato dal Detwiler come causato dalle fibre longitudinali discendenti che provvedono alla normale coordinazione dei movimenti degli arti; le caratteristiche della regione brachiale si hanno dove terminano queste fibre. Sono esperienze che andrebbero estese ad altre specie di Urodeli.

Nel pollo, scambiando tra loro varie regioni del midollo spinale si ha che esse si differenziano secondo l'origine: sono già determinate. L'asportazione di un arto porta tuttavia ad ipoplasia del midollo, mentre il trapianto di un arto non vi causa variazioni. Questo comportamento, mentre è in contrasto con quanto si è notato in *Amblystoma*, è invece d'accordo con quanto ho potuto vedere in *Bufo vulgaris*.

Negli Anuri lo scambio tra regioni del midollo spinale non è stato ancora eseguito, ed ho esperienze in corso. L'asportazione di un arto (come risulta anche da alcune mie esperienze in *Bufo vulgaris*) porta alla scomparsa delle caratteristiche dell'intumescenza, ossia dei corni ventrali e delle grosse cellule motorie. Il trapianto di un arto, secondo le ricerche del May in *DiscoGLOSSUS pictus*, porta ad un aumento delle cellule motrici, aumento che in *Bufo vulgaris* non ho potuto osservare, come ho già detto. Nei casi di arti supranumerari trovati in natura in Anuri, un aumento della regione motoria del midollo spinale o mancò o fu scarsissima.

L'importanza delle fibre discendenti di coordinazione motoria degli arti, particolarmente quelle provenienti dal midollo allungato, fu, in seguito alle ricerche del Detwiler, esaminata sperimentalmente sia in *Amblystoma* che nel pollo. In tali esperienze la regione brachiale o la lombare fu isolata o mediante trapianto, o mediante separazione dagli altri segmenti lasciando *in situ* la regione in esame. Si è ottenuto lo sviluppo delle caratteristiche dell'intumescenza; in *Amblystoma* (Nicholas) dopo un certo tempo dall'isolamento, i movimenti degli arti prima normali divengono sempre più deficienti; sia in *Amblystoma* che nel pollo il pezzo trapiantato di midollo spinale è di volume minore del normale. Per gli Anuri me ne sono occupato con esperienze di trapianto degli abbozzi degli arti posteriori insieme con midollo spinale. Si è visto che un tratto isolato dell'intumescenza lombare ha presentato lo sviluppo caratteristico della regione (corni ventrali con grosse cellule motorie); inoltre questa regione ha manifestato la sua piena funzionalità (arti mobili), almeno sino alla metamorfosi. Si è pure visto, particolarmente in un caso, che le dimensioni delle sezioni del midollo trapiantato sono minori che nel corrispondente tratto del midollo spinale del portatore; ma questo non posso attribuirlo senz'altro all'isolamento della zona perché tutte le parti del trapiantato, anche le schele-

triche, sono proporzionalmente più piccole delle parti corrispondenti del portatore.

Come si vede da questo breve cenno comparativo, non mancano né punti di contatto né divergenze, che richiedono ulteriore sperimentazione per chiarire e approfondire i fattori che portano a tali diversità di risultati.

CONCLUSIONI. — Le ricerche, delle quali mi sono occupato in queste tre Note sulle connessioni tra arti e sistema nervoso negli Anuri, permettono di trarre le seguenti conclusioni.

1. Sia gli arti da induzione abnorme che gli arti trapiantati, se presentano una certa quantità, almeno, di muscolatura, risultano innervati.

2. I nervi possono provenire o dai nervi dei plessi normali degli arti o dai nervi intermedi non destinati agli arti normali o dagli uni e dagli altri. La provenienza dell'innervazione è in rapporto sia con la zona dove trovasi l'arto, sia con l'influenza che detto arto esercita sui nervi degli arti normali onde si ha che ramificazioni dei plessi degli arti normali deviano dal loro normale percorso per innervare l'arto in più.

3. Per i fattori che condizionano la mobilità degli arti, si è riscontrato che, mentre una buona struttura scheletrica e delle articolazioni nonché una buona quantità di muscolatura possono trovarsi sia in arti mobili che immobili, invece, secondo ciò che finora è risultato da queste mie ricerche, negli arti mobili non solo l'innervazione è cospicua ma si ha in più che essa proviene, in gran parte almeno, dai plessi normali degli arti.

4. Altri dati sulla mobilità degli arti provengono dai trapianti degli abbozzi degli arti posteriori insieme con midollo spinale, il quale fu di varia lunghezza e comprendeva o no una parte dell'intumescenza lombare. La presenza di una parte almeno di quest'ultima, con differenziamento dei corni motori e di grosse cellule motorie, è stata presente in tutti i casi di mobilità, onde la sua importanza. E poiché in queste condizioni la parte trapiantata è isolata rispetto al sistema nervoso del portatore, si vede come detta parte dell'intumescenza sia sufficiente alla mobilità degli arti indipendentemente dalle connessioni con gli altri centri del sistema nervoso.



**Genetica.** — *Il problema dell'equilibrio genico nelle popolazioni microcitemiche.* — II. *L'ipotesi del vantaggio selettivo a favore dell'eterozigote per il gene M.* Nota II di MARCELLO SINISCALCO, presentata (\*) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

Nella Nota precedente <sup>(1)</sup> discutendo il problema dell'equilibrio del gene *M* — autosomico letale in condizione omozigote — si sono esaminate alcune delle ipotesi più probabili per spiegare il determinismo del fenomeno.

In particolare si è dimostrato che l'ipotesi di una più elevata fecondità a favore di un dato tipo d'incrocio sarebbe stata sufficiente ad assicurare l'equilibrio solo nel caso di  $f > 2$  (dove *f* esprime l'aumento di fecondità negli incroci *Mm* × *Mm*), il che non si verifica nei dati raccolti.

Consideriamo qui un'altra ipotesi: un vantaggio selettivo a favore dell'eterozigote *Mm*.

Quest'ultima ipotesi è senza dubbio quella che si prospetta più plausibile. (Neel e Valentine, 1947 <sup>(2)</sup> Montalenti e coll. 1953) <sup>(3)</sup>.

Quanto a definire il particolare meccanismo attraverso il quale il genotipo eterozigote riesce ad assicurarsi il vantaggio selettivo, è problema tutt'altro che facile.

È fuori dubbio comunque che il fenomeno non debba spiegarsi soltanto con un aumento di fecondità del genotipo in questione.

In casi del genere infatti una serie di componenti entrano nel gioco selettivo e — per dirla in breve — l'equilibrio si può dire in definitiva assicurato dalla più elevata capacità di adattamento del genotipo eterozigote rispetto a quello dei due omozigoti (recessivo e dominante). Per misurare l'adattamento selettivo di un genotipo gli autori inglesi hanno proposto l'uso di uno speciale parametro statistico — ch'essi chiamano « fitness » e che qui tradurremo con il termine « adattanza » — che, secondo la definizione datane da Fisher (1930) <sup>(4)</sup>, è espresso dal numero atteso (in base alla media) dei figli di una persona di un determinato genotipo, contando solo i figli nati. Tale parametro risulta uguale all'unità se l'individuo produce un solo figlio che sopravviva fino alla medesima età del genitore.

L'adattanza di un incrocio viene misurata, a sua volta, dal prodotto dell'adattanza di ambedue i genitori (Haldane, 1949) <sup>(5)</sup>.

(\*) Nella seduta del 12 dicembre 1953.

(1) Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XVI, fasc. I, pp. 141-146 (1954).

(2) J. V. NEEL, W. N. VALENTINE, « Genetics », 32, 38 (1947).

(3) G. MONTALENTI, E. SILVESTRONI I. BIANCO, « Rend. Acc. Lincei » Cl. Sc. Fisiche, ser. VIII, vol. XIV, fasc. 2, 183 (1953).

(4) R. A. FISHER, *The genetical theory of natural selection*. Oxford, Clarendon Press, 1930.

(5) J. B. S. HALDANE, « Annals of Eugenics Lond. », 14, 288 (1949).

Penrose (1949) <sup>(6)</sup> ha mostrato infine che in realtà l'adattanza di un genotipo, o di un'incrocio, può venire anche espressa in funzione delle frequenze geniche, come si deduce chiaramente dalle seguenti considerazioni.

Si supponga di avere  $a$  che fare con una popolazione in equilibrio rispetto a due alleli  $a, A$  dalle rispettive frequenze  $p$  e  $q$ . Le proporzioni dei tre genotipi possibili in una determinata generazione saranno di conseguenza le seguenti:

$$aa = p^2 \quad ; \quad Aa = 2pq \quad ; \quad AA = q^2.$$

Chiamando ora, nell'ordine,  $f, g$  ed  $h$ , i valori di adattanza relativi a questi genotipi, sarà facile calcolare le frequenze attese per i vari tipi d'incrocio nella popolazione generale e le proporzioni zigotiche nella generazione successiva (Tabella I).

TABELLA I.

Tipo d'incrocio	Frequenza	Adattanza	Proporzioni zigotiche tra i figli		
			$aa$	$Aa$	$AA$
$aa \times aa$ . .	$p^4$	$f^2$	$f^2 p^4$	—	—
$aa \times Aa$ . .	$2p^3q$	$fg$	$fgp^3q$	$fgp^3q$	—
$aa \times AA$ . .	$p^2q^2$	$fh$	—	$fhp^2q^2$	—
$Aa \times aa$ . .	$2p^3q$	$fg$	$fgp^3q$	$fgp^3q$	—
$Aa \times Aa$ . .	$4p^2q^2$	$g^2$	$g^2 p^2 q^2$	$2g^2 p^2 q^2$	$g^2 p^2 q^2$
$Aa \times AA$ . .	$2p q^3$	$gh$	—	$ghp q^3$	$ghp q^3$
$AA \times aa$ . .	$p^2 q^2$	$fh$	—	$fhp^2 q^2$	—
$AA \times Aa$ . .	$2p q^3$	$gh$	—	$ghp q^3$	$ghp q^3$
$AA \times AA$ . .	$q^4$	$h^2$	—	—	$h^2 q^4$
Totali . . .			$(fp + gq)^2 p^2$	$(fp + gh)$ $(gp + hq)2pq$	$(gp + hq)^2 q^2$

Dai totali ottenuti si conclude che per avere equilibrio nella generazione filiale (ovvero perché sia ancora  $aa = p^2$ ;  $Aa = 2pq$ ;  $AA = q^2$ ) dovrà essere:

$$(fp + gq)^2 = 2(fp + gq)(gp + hq) = (gp + hq)^2 = 1$$

o, più semplicemente

$$fp + gq = 1 = gp + hq.$$

(6) L. S. PENROSE, « Annals of Eugenics Lond. », 14, 301 (1949).

Dalla soluzione di questa equazione si ottengono finalmente i valori di  $f$ ,  $g$  e  $h$  espressi in funzione delle frequenze geniche:

$$\begin{array}{llll} f = 1 - kq^2 & (\text{adattanza del genotipo } aa) \\ g = 1 + kpq & \text{»} & \text{»} & Aa \\ h = 1 - kp^2 & \text{»} & \text{»} & AA \end{array}$$

dove  $k$  = costante.

È di quest'ultimo metodo che ci siamo serviti per giudicare dell'eventualità che un'adattanza relativamente più elevata del genotipo  $Mm$  sia in effetti capace di compensare la perdita degli  $MM$ .

Sostituendo pertanto ad  $a$ ,  $A$ , dell'esempio su riportato, i nostri alleli  $m$ ,  $M$ , considerando la frequenza di  $M = 0.05$  <sup>(7)</sup> potremo riferire le espressioni per il calcolo di  $f$ ,  $g$  ed  $h$  ai nostri tre genotipi, e perciò:

$$\begin{array}{llll} f = 1 - kq^2 = 1 - k(0.05)^2 & \text{sarà l'adattanza di } mm \\ g = 1 + kpq = 1 + k(0.95)(0.05) & \text{»} & \text{»} & Mm \\ h = 1 - kp^2 = 1 - k(0.95)^2 & \text{»} & \text{»} & MM \end{array}$$

Il valore di  $k$  sarà ottenuto dall'ultima delle tre equazioni riportate, ricordando che l'adattanza degli  $MM$  è zero per essere gli omozigoti dominanti completamente eliminati dalla selezione:

$$\text{se } h = 0 \quad 1 - k(0.95)^2 = 0 \quad k = 1.108$$

e quindi:

$$\begin{array}{l} g = 1.053 \\ f = 0.997. \end{array}$$

Concludendo, un vantaggio del solo 5 % nel valore di adattanza degli  $Mm$  rispetto a quello degli  $mm$ , sarebbe sufficiente ad assicurare l'equilibrio genico.

Per quanto sia intuitiva la difficoltà che s'incontra quando si voglia dimostrare in pratica il verificarsi di un fenomeno del genere, abbiamo voluto comunque realizzare un confronto tra i valori teorici calcolati sopra e quelli effettivamente osservati nella nostra popolazione di microcitemici.

In pratica una stima approssimata dei valori reali di adattanza può essere rapidamente ottenuta dal rapporto diretto tra le frequenze dei vari genotipi nella generazione parentale ed in quella filiale, ovvero:

$$f, g, h = \frac{\text{Frequenza di } mm, Mm, MM \text{ tra genitori}}{\text{Frequenza di } mm, Mm, MM \text{ tra i figli}}$$

Nella tabella II vengono dunque riportati i particolari del calcolo dei valori di  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , realmente osservati, accanto ai valori teorici previsti nel caso che l'equilibrio genico venga assicurato attraverso il vantaggio selettivo a favore degli eterozigoti  $Mm$ .

(7) Cfr. E. SILVESTRONI, I. BIANCO, « Progresso Medico », 8, 757 (1952).

TABELLA II.

N. degli:	tra i genitori	tra i figli	Adattanza del genotipo	Adattanza ne- cessaria per l'equilibrio
<i>mm</i> . . . . .	5308 (0.899)	9266 (0.895)	$\frac{0.899}{0.895} = 1.004$	$1 - kq^2 = 0.997$
<i>Mm</i> . . . . .	596 (0.101)	1018 (0.098)	$\frac{0.101}{0.098} = 1.031$	$1 + k\dot{p}q = 1.053$
<i>MM</i> . . . . .	0 (0.000)	71 (0.007)	$\frac{0}{0.007} = 0$	$1 - kp^2 = 0$
Totale . . .	5904	10355		

 $\dot{p} = 0.95$  (frequenza di *m*) $q = 0.05$  (frequenza di *M*) $k = 1.108$ 

In parentesi le frequenze relative.

Da quanto sopra si può concludere che il meccanismo di compenso più probabile, capace di assicurare il mantenimento di un'elevata frequenza del gene *M* nelle popolazioni microcitemiche studiate, è quello di un valore selettivo positivo a favore degli eterozigoti.

Il valore di adattanza osservato per gli *Mm* è infatti lievemente più elevato che non quello degli *mm*. Ciò, pur non potendo costituire la prova definitiva dell'ipotesi — in quanto per provare la significatività di una così piccola differenza bisognerebbe disporre di un numero di osservazioni eccezionalmente elevato — concorda comunque con l'osservazione teorica che un minimo vantaggio selettivo dell'ordine del 5 % potrebbe essere sufficiente ad assicurare l'equilibrio.

D'altronde non bisogna escludere la possibilità che in realtà più di un fattore intervenga nel meccanismo di compenso; per esempio è fuori discussione che la mutazione  $m \rightarrow M$  debba senz'altro avere la sua importanza, sebbene — per quanto si è detto prima — non la si possa considerare la causa unica del fenomeno.

È chiaro però che tutte le considerazioni teoriche su riportate hanno il vizio comune di ammettere *a priori* che le popolazioni studiate siano in equilibrio nei confronti del gene *M*.

In realtà noi siamo in grado di ottenere tale informazione solo per via indiretta, avendo dimostrato che le popolazioni in oggetto s'incrociano a caso; e che è molto improbabile che l'elevata percentuale osservata di *Mm* sia da considerarsi come il livello attuale di una frequenza regolarmente in decremento secondo la legge della selezione negativa totale dell'omozigote.

Ci rimarrebbe infine da considerare un ultimo punto non privo d'interesse e purtroppo ben lungi dall'essere chiarito. Esso riguarda l'irregolare distribuzione del gene *M* in popolazioni relativamente limitrofe.



Qui non è possibile entrare nella discussione particolare del problema sul quale ci proponiamo d'altronde di ritornare quando disporremo delle informazioni e dei dati necessari <sup>(8)</sup>. Vogliamo però richiamare l'attenzione in questa occasione sulla possibilità teorica di spiegare anche questo fatto in base all'intervento del solo fenomeno segnalato sopra, cioè di un valore selettivo positivo a favore degli eterozigoti *Mm*.

Da quanto abbiamo visto nei paragrafi precedenti, infatti, l'adattanza deve intendersi nello stesso tempo funzione del genotipo e dell'ambiente. Quest'ultimo - come Penrose (1949) <sup>(6)</sup> ha opportunamente sottolineato - può avere notevole importanza nel meccanismo di variazione del valore di adattanza. La convinzione che l'ambiente si mantenga costante attraverso migliaia di anni sembra oggi - precisa il Penrose - difficilmente sostenibile. Piccole variazioni nell'ambiente possono certamente alterare i valori di adattanza di genotipi diversi e permettere così una maggior rapidità del processo selettivo.

Queste considerazioni ci danno l'opportunità di sottolineare l'utilità e l'importanza di intraprendere studi più estesi sul problema dell'adattanza nell'uomo, in quanto essi potrebbero essere di valido aiuto nella comprensione del meccanismo dei fenomeni evolutivi nella specie umana.

### COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che assistono alla seduta i proff. Kavaguchi dell'Università di Sapporo e Yano dell'Università di Tokio e porge agli illustri Colleghi giapponesi il cordiale saluto della Classe e suo personale.

Il Presidente informa i Colleghi che ieri, venerdì 12, ha avuto luogo in Accademia la riunione per la trattazione del tema «Libertà e responsabilità della cultura». Tale riunione è stata indetta dalla nostra Accademia, d'intesa con le Accademie Nazionali di San Luca e di Santa Cecilia, per associarsi alle celebrazioni del bicentenario della Columbia University. La riunione è stata organizzata e diretta, con la più grande competenza, dal Collega della Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche prof. Jemolo, al quale il prof. Giordani desidera rinnovare i più vivi ringraziamenti, anche a nome della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

### PERSONALE ACCADEMICO

Il prof. Giordani dà quindi la dolorosa notizia della morte, avvenuta in data 30 gennaio c. a., del Socio Nazionale Gino Loria, della Categoria I,

(8) Di recente E. SILVESTRONI, I. BIANCO e N. ALFIERI («Medicina», 2, 187 (1952) hanno enunciato a proposito una teoria etnica portando evidenze storiche ed archeologiche a favore dell'ipotesi che il gene *M* sarebbe stato importato dalla Grecia e facendo rilevare che le regioni italiane dove la microcitemia presenta le sue punte di massima frequenza sono quelle stesse che ebbero in passato larghi e prolungati contatti con la Grecia.

Sezione Matematica, Professore Emerito dell'Università di Genova e invia un pensiero di reverente omaggio alla Sua memoria.

Su proposta di alcuni Soci, la Classe dà mandato al Presidente di pregare il Collega A. Terracini di voler commemorare, in una delle prossime sedute, il compianto Socio Loria.

### PLICHI SUGGELLATI

Il prof. Giordani presenta un plico suggellato dell'ing. Guido Antoni, pervenuto all'Accademia in data 2 febbraio c. a.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico sia conservato nell'archivio accademico, a disposizione dell'interessato.

### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Beccari offre in omaggio l'intera serie degli Atti, da lui curati, della Società Italiana di Anatomia, della quale egli è stato uno dei promotori. La serie comprende 14 volumi e il prof. Beccari ne presenta l'ultimo, dedicato al XIV Convegno, tenuto dalla predetta Società in Napoli, nell'ottobre del 1952.

Il Socio Giovanni Sansone offre in omaggio il secondo volume delle Opere di Luigi Bianchi sull'*Applicabilità e problemi di deformazione*, edito a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, e ne parla.

Il volume si apre con un'ampia introduzione di Renato Calapso di carattere storico-critico, seguita da sedici Memorie del Nostro che da sole occupano trecento pagine del testo. Sono da menzionare la tesi di laurea con alcuni singolari teoremi sulle rigate applicabili e con un primo attacco del problema della ricerca delle superficie deformabili in superficie isoterme, la classica Nota del 1904 sulle deformazioni infinitesime, che segna un punto essenziale della Geometria Differenziale metrica per le molteplici ricerche che da questa scaturirono, le Memorie sulle coppie di superficie applicabili con assegnata rappresentazione sferica, quelle sulla deformazione delle superficie ottenuta mantenendo una sua asintottica rigida, o come si dice come linea di piegamento, due Note sulla deformazione delle superficie di rotazione e infine le due poderose Memorie del 1911 sulle deformazioni continue e isogonali delle superficie a curvatura costante di uno spazio euclideo, e più in generale di uno spazio a curvatura costante.

La Presidenza dell'Unione Matematica Italiana, grazie soprattutto alla generosa comprensione del Consiglio Nazionale delle Ricerche, che sentitamente ringrazia, e alla volenterosa cooperazione di alcuni suoi Soci, procede sistematicamente alla stampa delle Memorie dei grandi Matematici italiani e confida quest'anno, grazie anche alla preziosa collaborazione del-

l'Editore dott. Paolo Cremonese, di stampare un volume del Dini, uno del Bianchi, uno di Eugenio Elia Levi, di completare le Opere matematiche di Paolo Ruffini e di presentare i «Selecta» di Salvatore Pincherle.

Il Presidente rivolge un sincero ringraziamento ai Soci Beccari e Sansone e si compiace vivamente per l'importanza delle opere da loro offerte.

Il Segretario Accademico presenta le opere inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza i volumi I e II della parte II delle «Oeuvres complètes» di Elie Cartan, i volumi I e II del Trattato del Socio Biasutti dal titolo «Le razze e i popoli della terra», il volume «Convegno sulle Vitamine», contenente gli Atti della «Terza Giornata della Scienza», indetta dal Consiglio Nazionale delle Ricerche in occasione della XXXI Fiera di Milano e uno studio del Socio A. Russo dal titolo: «Per l'origine dei tumori un enigma da chiarire, un potere germinale da difendere. Nuovo indirizzo profilattico» (Estratto dal «Bollettino» dell'Accademia Gioenia in Catania, serie IV, volume II, fascicolo 7).

#### PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei «Rendiconti» i Soci Beccari, Segre, Cotronei, Graffi, Bompiani, Margaria, Silva e Caglioti.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

SILVA G. - Sull'uso attuale della gravimetria in sussidio della livellazione. Nota II. Condizioni che rendono trascurabile la riduzione di secondo ordine a quota dinamica.

AMICI A. - Ancora sugli effetti dell'iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili. II. Azione dell'associazione stricninasimpamina sulla rana spinale (pres. dal Corrisp. G. AMANTEA).

AMICI A. - Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili. III. Azione della stricnina e della simpamina iniettate contemporaneamente, ma in sede diversa (pres. dal Corrisp. G. AMANTEA).

AMICI A. - Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili. IV. Sul comportamento di una reazione colorata (pres. dal Corrisp. G. AMANTEA).

GUALTIEROTTI T. - Azione della caffeina sui riflessi spinali nella rana curarizzata e decerebrata. Nota II (pres. dal Socio R. MARGARIA).

NARDINI R. - Sul comportamento asintotico della soluzione di problema al contorno della magneto-idrodinamica. Nota II (pres. dal Corrisp. D. GRAFFI).

VANNINI E. - A proposito di recenti osservazioni sulle concentrazioni dei ribonucleoproteidi ed i volumi del nucleolo negli ovociti di «Antedon rosacea» (pres. dal Corrisp. U. D'ANCONA).

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 13 febbraio 1954*

- Atti della Società Italiana di Anatomia.* I-XIV Convegno, a. 1929-1952. Firenze, L. Niccolai, 1930-1948 e L. Macri, 1950-1953. Voll. 14, in-8° (Supplementi del «*Monitore Zoologico Italiano*»).
- BIANCHI Luigi. — *Opere.* A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. II: *Applicabilità e problemi di deformazione.* Roma, Edizioni Cremonesi, della Casa Perrella 1953. Pp. 334, in-8°.
- BONO Francesco. — *Attualità dell'urbanistica italiana con bibliografia 1950-52.* Bologna. Cappelli, 1953. Pp. 44, in-8°.
- CARTAN Elie. — *Oeuvres complètes.* Partie II, Paris, Gautier-Villars, 1953. Voll. 2, in-8°.
- CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE. — *Convegno sulle vitamine.* Milano, 12-16 aprile 1953. Roma, 1953. Pp. LIX-883, in-8°, con figg. («*3ª giornata della Scienza*» indetta dal Cons. Naz. delle Ricerche in occasione della 31ª fiera di Milano).
- GRANDI Guido. — *Introduzione allo studio dell'entomologia.* Aggiunte e correzioni (successive alla pubblicazione dell'opera). Estr. da «*Bullettino dell'Istituto di Entomologia dell'Università di Bologna*», vol. XIX, 1952-53.
- Jubilee volume dedicated to Emil Christoph Borell president of F. Hoffmann - La Roche e Co. Limited Company,* Basle, 1946.
- LOGAN John A. — *The Sardinian project: an experiment in the eradication of an indigenous malarious vector.* Baltimore, the Johns Hopkins Press, 1953. Pp. XXIX-415, in-8°.
- RUSO Achille. — *Per l'origine dei tumori un enigma da chiarire, un potere germinale da difendere. Nuovo indirizzo profilattico.* Estr. da «*Bollettino delle sedute dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania*», ser. 4ª, vol. II, fasc. 7.
- SOCIETÀ ITALIANA DI ANATOMIA. — Vedi: *Atti della Società Italiana di Anatomia.*

D. DE BLASI e U. AMALDI.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 13 marzo 1954*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Geodesia.** — *Sull'uso attuale della gravimetria in sussidio della livellazione.* — Parte II. *Condizioni che rendono trascurabile la riduzione di secondo ordine a quota dinamica.* Nota (\*) del Socio GIOVANNI SILVA.

7. Anche se i calcoli indicati nel n. 6 della Nota I permettono di determinare la riduzione di secondo ordine da quote osservate a quote dinamiche, è certo preferibile semplificare la questione ed esaminare in quali circostanze l'importo di quella riduzione è trascurabile, per modo da poter tralasciare i detti calcoli. Poiché le circostanze sono di assai varia natura, conviene limitare la condizione per questa ommissione alla sola lunghezza  $L$  del tronco di livellazione e ricercare per quali particolari tipi del percorso quella riduzione diviene massima in valore assoluto a parità di valore della  $L$ . L'entità di questo massimo, confrontato con l'errore probabile della differenza di quota osservata, nonché la maggiore o minore probabilità di presentarsi di percorsi simili a quello che dà origine al detto massimo permetteranno di concludere un limite da non superare per la distanza  $L$  affinché, nella grande generalità dei casi, l'abbandono della riduzione del secondo ordine non rechi sensibile danno alla precisione della quota dinamica.

Delle varie parti nelle quali la riduzione  $\Delta''q$  è stata scomposta, la prima  $\Delta''q_1$ , come già è stato osservato al n. 4 della Nota I, è nulla e le ultime due  $\Delta''q_4$ ,  $\Delta''q_5$ , insieme considerate, equivalgono alla  $\Delta''q_3$  in causa della (13) del n. 6; pertanto limiteremo la ricerca alle sole due parti  $\Delta''q_2$  e  $\Delta''q_3$  relative alla latitudine  $\varphi$  e all'anomalia gravimetrica  $\alpha$  secondo Faye.

8. Indichiamo con  $x$ , variabile da 0 ad  $L$ , la distanza, misurata orizzontalmente da A verso B, di un generico punto del tronco di livellazione e con

(\*) Presentata nella seduta del 13 febbraio 1954.

$p(x)$  la pendenza della linea nel detto punto, così che si possa scrivere  $\delta h = p(x) \delta x$ . Ammettiamo poi, come già si è fatto al n. 3, che la massima pendenza accettabile, senza che l'errore probabile chilometrico abbia a superare il valore prefissato, sia del 6 % ( $p = 0,06$ ) e scriviamo la correzione per la latitudine sotto forma di integrale. Sarà:

$$(14) \quad |\Delta'' q_2| = \left| \beta \sin 2 \varphi_m \int_0^L (\varphi - \varphi_m) p(x) dx \right| \leq 0,06 \beta \int_0^L |\varphi - \varphi_m| dx.$$

Evidentemente la funzione  $y(x) = |\varphi - \varphi_m|$  è rappresentata da un arco di curva situato per intero nel primo quadrante del sistema cartesiano  $x, y$  e l'ultimo integrale delle relazioni (14) rappresenta l'area compresa fra l'asse  $x$  delle ascisse, l'asse  $y$  delle ordinate, l'ordinata positiva  $x = L$  e l'arco in parola.

Poiché  $\varphi_m$  è la media dei due valori estremi  $\varphi_A, \varphi_B$ , la variabile  $\varphi$  dovrà assumere, quando  $x$  varia da 0 a  $L$ , una o più volte il valore  $\varphi_m$ , sicché la funzione  $y(x)$  deve avere almeno un punto comune con l'asse  $x$  delle ascisse. In tale punto (o in uno qualunque fra i punti in cui ciò avviene) la funzione  $\varphi - \varphi_m$ , di regola, cambia segno, ma la  $y = |\varphi - \varphi_m|$ , dopo essere scesa al valore zero, subito risale; ciò avviene con maggiore o minore velocità, al crescere di  $x$ , a seconda del maggiore o minore valore assoluto della  $d\varphi/dx$ , valore che raggiunge il suo massimo  $1/R$  quando lo spostamento  $dx$  è in meridiano,  $R$  essendo il raggio di curvatura del meridiano o più semplicemente un qualsiasi valore medio del raggio terrestre. In conseguenza di ciò non è difficile darsi ragione che l'area sopra indicata e quindi anche l'integrale che essa rappresenta raggiungono il loro valore massimo quando: 1° la linea di livellazione segue il meridiano ed è quindi  $|d\varphi/dx| = 1/R$ ; 2° il valore zero di  $\varphi - \varphi_m$  è raggiunto per un solo valore di  $x$ , salvo il caso in cui sia  $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_m$ , nel quale si ha lo zero sia per  $x = 0$ , sia per  $x = L$ ; 3° la spezzata, in cui la curva si converte a causa della costanza della  $|dy/dx|$ , ha un suo vertice ad una distanza dall'asse delle ascisse eguale a  $L/2R$ , che è la massima consentita dalle condizioni precedenti e dall'obbligo della curva di avere l'ordinata iniziale  $y_0 = |\varphi_A - \varphi_m|$  eguale all'ordinata finale  $y_L = |\varphi_B - \varphi_m|$ . In tutti i casi che soddisfanno alle dette condizioni l'area e l'integrale in parola hanno il valore  $L^2/4R$ .

I casi estremi fra quelli che soddisfanno alle dette condizioni sono i seguenti: a) le ordinate estreme hanno il massimo valore  $L/2R$  e l'ordinata nulla è alla metà del percorso; b) le ordinate estreme sono nulle e l'ordinata massima è a metà percorso. Entrambi corrispondono ad una linea di livellazione situata in meridiano; nel primo caso  $\varphi$  varia sempre nello stesso senso e  $\varphi - \varphi_m$  ha segni opposti nelle due metà del percorso, ma nell'una metà la linea deve essere in salita, nell'altra metà in discesa e i termini  $(\varphi_i - \varphi_m) \delta h_i$  della sommatoria che dà  $\Delta'' q_2$  hanno tutti lo stesso segno. Nel secondo caso si può pensare la linea di livellazione scavata su una parete rocciosa verticale, sempre in salita o sempre in discesa, e divisa per metà da una svolta a  $180^\circ$  che dà anche a  $\varphi_i - \varphi_m$  sempre lo stesso segno.

Facendo  $\beta = 0.00529$ ,  $R = \text{km } 6370$  e, come s'è già scritto nell'ultimo membro delle (14), sen  $2 \varphi_m = 1$ , esprimendo  $L$  in km e riducendo il risultato in mm, la correzione di secondo ordine per la latitudine ha dunque quale massimo valbre

$$\Delta'' q_2 = \frac{0.06 \beta L^2}{4 R} = \text{mm } 0.0125 L^2.$$

Per  $L = \text{km } 5, 10, 15, 20$ , tale massimo è rispettivamente di mm 0.3, 1.2, 2.8, 5.0. I punti rappresentativi di questi valori stanno sulla parabola definita dalla precedente equazione ed avente per asse l'asse delle ordinate  $\Delta'' q_2$ . I corrispondenti punti rappresentativi degli errori probabili  $\tau_L \sqrt{L}$  di  $q$ , indicati al n. 3 della Nota I, stanno su una curva molto simile ad una parabola avente per asse l'asse delle ascisse  $L$ . Le due curve hanno un punto in comune nell'origine, ove si staccano ad angolo retto, sicché, in prossimità dell'origine, il rapporto fra l'errore  $\Delta'' q_2$  e l'errore  $\tau_L \sqrt{L}$  è straordinariamente piccolo. Il rapporto sale al valore 1 per  $L = 13 \text{ km}$ , ove le dette curve hanno un secondo punto in comune.

Si tenga dunque conto che, per una lunghezza  $L$  del percorso inferiore al detto valore di 13 km, la correzione di secondo ordine  $\Delta'' q_2$  è inferiore a quell'errore probabile  $\tau_L \sqrt{L}$ ; si tenga pure conto che condizioni simili a quelle qui sopra schematizzate ben difficilmente possono presentarsi in natura, e che infine, se esistessero, un operatore esperto che può disporre come crede i caposaldi nei quali misurare la gravità, saprebbe facilmente evitarle. È allora da concludere che, per quanto riguarda la correzione di secondo ordine per la latitudine, si può generalmente trascurarla senza tema di recar danno sensibile alla precisione del risultato finché la lunghezza  $L$  del percorso rimane inferiore al limite suddetto di 13 km. Su tale conclusione, che ha soltanto valore orientativo, non occorre indugiarsi, in quanto le considerazioni del numero seguente conducono a un limite più ristretto.

9. Resta ora da riconoscere quale possa essere l'effetto della irregolarità delle variazioni dell'anomalia  $\alpha$ , che, congiunte alle irregolarità della distribuzione dei dislivelli  $\delta h$ , danno origine alla correzione  $\Delta'' q_3$ . Il fatto che l'anomalia  $\alpha$  varia da luogo a luogo senza regola rende meno facile il calcolo di un massimo valore di questa correzione. Possiamo tuttavia estendere al caso attuale buona parte dei ragionamenti svolti nel numero precedente.

Sostituendo anche qui l'integrale alla sommatoria, risulta

$$(15) \quad |\Delta'' q_3| = \left| \frac{1}{\gamma_*} \int_0^L (\alpha - \alpha_m) p(x) dx \right| \leq \frac{0.06}{\gamma_*} \int_0^L |\alpha - \alpha_m| dx.$$

L'integrale del terzo membro di queste relazioni misura l'area compresa fra la curva rappresentata dall'equazione  $y(x) = |\alpha - \alpha_m|$ , l'asse delle ascisse e le due ordinate iniziale e finale, che hanno i valori  $y_0 = |\alpha_A - \alpha_m|$ ,  $y_L = |\alpha_B - \alpha_m|$ , eguali fra loro. Integrale ed area sono tanto più grandi quanto maggiore è, in valore assoluto, la  $d\alpha/dx$  e ciò richiede che il percorso sia ovunque diretto normalmente alle linee isoanomale.



Ciò ammesso, supponiamo per un momento che il valore della  $d\alpha/dx$  coincida con la variazione della gravità normale lungo un meridiano, a  $45^\circ$  di latitudine, e cioè che sia

$$\left| \frac{d\alpha}{dx} \right| = \beta \Gamma \left| \frac{d\varphi}{dx} \right| = \frac{\beta \Gamma}{R} = 0,81 \text{ milligal/km.}$$

Se, fatte le opportune modifiche negli enunciati, sono soddisfatte le condizioni 1), 2) e 3) elencate nel numero precedente, il massimo della correzione  $|\Delta''q_3|$  verrebbe a coincidere con il massimo della  $|\Delta''q_2|$  e ciò condurrebbe alle medesime conclusioni di detto numero.

Ma la variazione dell'anomalia  $\alpha$  per km può raggiungere valori ben più forti di quello ora supposto. Se si ammette un valore quattro volte maggiore (3 milligal per km), i valori della correzione di secondo ordine  $\Delta''q_3$  e dell'errore probabile  $\tau_L/\bar{L}$  coincidono per  $L = \text{km } 4,5$  e, se si segue il ragionamento del numero precedente, si dovrebbe restringere a questo valore la distanza fra i caposaldi nei quali deve essere eseguita la misura diretta della gravità terrestre, se si vuole trascurare la correzione  $\Delta''q_3$  senza pericolo, almeno nella generalità dei casi, di alterare sensibilmente la precisione del dislivello osservato e ridotto a dislivello dinamico con la sola correzione di prim'ordine.

Il criterio di considerare trascurabile una correzione  $\Delta''q_3$ , che in casi particolari possa raggiungere l'importo dell'errore probabile della grandezza  $q$  alla quale essa dovrebbe essere applicata, può apparire troppo largo, specialmente se si considera che la variazione dell'anomalia  $\alpha$  per km potrebbe essere anche maggiore di 3 milligal e potrebbe quindi dare origine ad un massimo della correzione  $\Delta''q_3$  anche superiore a quell'errore probabile. Ma devesi ricordare che a questo massimo si arriva soltanto: 1° se valgono le condizioni eccezionali analoghe a quelle necessarie per il massimo della correzione  $\Delta''q_2$  per la latitudine e cioè se il percorso ha direzione particolare, se la sua pendenza è massima, se questa pendenza o il gradiente dell'anomalia cambiano improvvisamente di segno a metà del percorso, o se tale cambiamento avviene per entrambi in due punti determinati; 2° se vale inoltre la condizione specifica per la  $\Delta''q_3$  che il tronco di livellazione si trovi in territorio ove l'anomalia ha un forte gradiente. E a questo riguardo devesi osservare che le stesse osservazioni gravimetriche che accompagnano la livellazione possono mettere sull'avviso tutte le volte che la variazione per chilometro dell'anomalia  $\alpha$  è notevole, consigliando allora un esame più accurato.

Alle considerazioni precedenti vanno aggiunte ulteriori e non meno importanti osservazioni.

Per uniformità con l'opinione generale che prevale in questa materia si è qui adottato come errore probabile di un dislivello  $q$  il valore  $\tau_L/\bar{L}$  ove, per la livellazione italiana, secondo il Salvioni,  $\tau_L$  ha, per  $L = \text{km } 5$ , il valore 0.48, molto più prossimo a quello 0.40 del coefficiente  $\eta$  (errore probabile accidentale) che non a quello 0.72 del coefficiente  $\tau$  (errore probabile totale). Ma è anche sostenibile l'opinione che tutte le possibili cause di errore

di una livellazione dieno all'effettivo errore probabile di un dislivello  $q$  fra gli estremi di una linea di lunghezza  $L$  un errore probabile sempre espresso da  $\tau\sqrt{L}$ , qualunque sia  $L$ , e che soltanto negli scostamenti dai quali praticamente si calcolano i coefficienti  $\eta$  e  $\tau_L$  una o più cause di errore non influiscano affatto, o influiscano solo parzialmente.

Se così è, ai valori  $\tau_L$  fin qui adottati dovrebbe essere sostituito il predetto valore  $\tau = 0.72$ , che rimane ad ogni modo molto piccolo, poiché è circa un terzo del valore  $\tau = \text{mm } 2$  ammesso dalla convenzione internazionale vigente per le livellazioni di alta precisione.

L'eccezionalità, o piuttosto l'impossibilità del verificarsi simultaneo di tutte le condizioni che danno origine al massimo valore teorico della correzione  $\Delta''q_3$  autorizza poi a paragonare questo massimo piuttosto con l'errore medio che non con l'errore probabile del dislivello  $q$ , ed allora, in luogo dei valori  $\tau_L$  considerati al n. 3, si dovrebbe porre l'unico valore 1.08 e, in luogo degli errori probabili indicati allo stesso numero, si dovrebbero scrivere quali errori medi di  $q$  per  $L = \text{km } 5, 10, 15, 20$ , rispettivamente mm. 2.4, 3.4, 4.2, 4.8. Nell'ipotesi che la variazione per km dell'anomalia  $\alpha$  rimanga sempre inferiore o eguale a 3 milligal, il valore massimo di  $\Delta''q_3$  coincide allora con l'errore medio di  $q$  per  $L = \text{km } 8.2$  e a questo valore potrebbe dunque essere portato il limite della distanza fra i caposaldi nei quali eseguire la misura diretta della gravità terrestre.

Le varie considerazioni precedenti e i due valori di km. 4.5 e 8.2 qui indicati per il limite in parola costituiscono buoni criteri orientativi per una convenzione che precisi il limite stesso; sarebbe tuttavia utile suffragarli mediante esempi pratici e mediante dati sperimentali opportuni.

**Fisiologia.** — *La determinazione del metabolismo con l'ossimetro di Pauling* (\*). Nota di R. MARGARIA, G. MESCHIA, F. MARRO, presentata (\*\*) dal Socio R. MARGARIA.

INTRODUZIONE E SCOPO DEL LAVORO. — La determinazione del consumo di ossigeno nelle ricerche di calorimetria indiretta può essere effettuata con metodi a circuito chiuso e aperto.

Il primo metodo offre il vantaggio di una facile e rapida esecuzione, ma implica un tipo di respirazione molto regolare, senza il quale i dati che si ottengono non sono più attendibili. Il secondo metodo consente una maggiore precisione, ma l'analisi chimica dell'aria espirata è lunga e indagginosa.

La recente introduzione nella tecnica dell'analisi dei gas di un ossimetro (Pauling, Wood e Sturdivant, 1946) il cui principio di costruzione è basato sulle peculiari proprietà paramagnetiche dell'ossigeno rispetto agli altri gas, ci ha suggerito la possibilità di applicare questo apparecchio alla determi-

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

nazione del consumo di  $O_2$ . Si sarebbero così avuti tutti i vantaggi del metodo della respirazione a circuito chiuso, senza averne gli svantaggi fondamentali: sopra tutto non sarebbe stata richiesta quella regolarità nella respirazione che è necessaria nelle analisi a circuito chiuso, regolarità che di solito è così difficile da ottenere. Tale analisi sarebbe stata anche, presumibilmente, più rapida, più facile, e più economica poiché nella analisi con l'ossimetro di Pauling non vengono usati reattivi o fissatori chimici come negli attuali metabolimetri.

Essa ha inoltre il vantaggio di fornire i dati in pressione parziale di ossigeno anziché in percentuale di questo gas nella miscela, poiché l'effetto paramagnetico è proporzionale al numero di molecole di ossigeno nella unità di volume, indipendentemente dalla presenza di altri gas, che hanno un effetto magnetico assai più piccolo: il vantaggio di avere i dati in pressione parziale consiste, come si vedrà in seguito, nel semplificare il calcolo per la correzione del gas a condizioni standard. Abbiamo perciò fatto costruire appositamente dalla ditta Beckmann un ossimetro con limitazione dei valori di lettura da 100 a 160 mm Hg di  $O_2$  e con una sensibilità di lettura di 0,2 mm Hg.

L'ossigeno consumato da un soggetto che respira aria pura, avente quindi una percentuale di  $O_2$  del 20.94 %, è dato dalla seguente equazione:

$$(1) \quad V_{O_2}^S = 2094 V_I^S - F_{E_{O_2}} (V_I^S - V_{O_2}^S + V_{CO_2}^S)$$

ove  $V_{O_2}^S$  e  $V_{CO_2}^S$  sono rispettivamente il volume di ossigeno consumato e di  $CO_2$  prodotto a  $0^\circ C$  760 mm Hg a secchezza,  $V_I^S$  il volume dell'aria inspirata ridotto a condizioni standard e  $F_{E_{O_2}}$  la frazione di ossigeno nell'aria espirata (E).  $V_I^S - V_{O_2}^S + V_{CO_2}^S$  rappresenta quindi il volume dell'aria espirata. Poiché il quoziente respiratorio R è definito da:

$$R = \frac{V_{CO_2}}{V_{O_2}}$$

sostituendo questo valore nella (1) e risolvendo per  $V_{O_2}^S$  otteniamo:

$$(2) \quad V_{O_2}^S = V_I^S \frac{2094 F_{E_{O_2}}}{1 - F_{E_{O_2}} (1 - R)}$$

Conoscendo  $F_{E_{O_2}}$ , non possiamo risalire al volume di ossigeno consumato se non conosciamo R: ciò non pertanto, in determinate circostanze si può assegnare ad R un valore approssimato sufficientemente probativo; queste condizioni si verificano quasi esclusivamente nel lavoro muscolare compiuto in condizioni aerobiche e protratto, quando cioè la respirazione abbia raggiunto una condizione di equilibrio e il quoziente respiratorio esterno rispecchi fedelmente il quoziente respiratorio dei tessuti. È da tenere presente che R nella (2) si riferisce al quoziente respiratorio esterno e non a quello dei tessuti, e perciò non è possibile assegnare ad R un valore attendibile, sia pure approssimativo, in condizioni di metabolismo basale. In tali condizioni infatti, malgrado che il valore di R dei tessuti sia comunemente considerato costante e uguale a 0.825, il valore di R respiratorio, quale si ottiene sperimentalmente nel corso di una determinazione di metabolismo può essere molto diverso, frequentemente anche  $> 1$ .

Ci è parso perciò che sarebbe stato più opportuno dosare l'O<sub>2</sub> nell'aria espirata privata del CO<sub>2</sub>.

Denominando  $F'_{E_{O_2}}$  la frazione di O<sub>2</sub> nell'aria così trattata otteniamo, analogamente alla (1)

$$(3) \quad V_{O_2}^S = \cdot 2094 V_I^S - F'_{E_{O_2}} (V_I^S - V_{O_2}^S)$$

dalla quale:

$$(4) \quad V_{O_2}^S = V_I^S \frac{\cdot 2094 - F'_{E_{O_2}}}{1 - F'_{E_{O_2}}}$$

ed è indipendente da R, cioè dal quoziente respiratorio esterno, e quindi da eventuali irregolarità della ventilazione polmonare. Dall'O<sub>2</sub> consumato ( $V_{O_2}^S$ ) si può risalire al calcolo del valore calorico (C) quando sia noto il quoziente respiratorio dei tessuti ( $R_t$ ) secondo la nota formula:

$$(5) \quad C = V_{O_2}^S (3,814 + 1,233 R_t)$$

dalla (5) è facile costruire un nomogramma che dia i valori di C per ogni valore di  $V_{O_2}^S$  e di  $R_t$  (Margaria, 1937): ma, limitatamente a condizioni basali, ad  $R_t$  può essere assegnato il valore convenzionale di 0.825 e la (5) diventa allora:

$$(6) \quad C = 4,832 V_{O_2}^S$$

dalla (4) e dalla (6) otteniamo:

$$(7) \quad \frac{C}{V_I^S} = 4,832 \frac{\cdot 2094 - F'_{E_{O_2}}}{1 - F'_{E_{O_2}}}$$

dalla quale appare evidente che il valore calorico per litro di aria inspirata  $C/V_I^S$  corrisponde ad un solo valore di  $F'_{E_{O_2}}$ . Tale valore, anziché calcolato con la (7) può essere facilmente determinato valendosi del nomogramma della figura (1).

I valori riscontrati sull'ossimetro non sono effettivamente  $F_{O_2}$  ma  $P_{O_2}$ , poiché lo strumento è sensibile alla pressione parziale dell'O<sub>2</sub> nella miscela gassosa in esame. E poiché per l'aria priva di umidità vale la relazione:

$$(8) \quad F_{O_2} = \frac{P_{O_2}}{P_b}$$

e nel caso specifico (aria priva di umidità e di CO<sub>2</sub>):

$$(9) \quad F'_{E_{O_2}} = \frac{P'_{E_{O_2}}}{P_b}$$

ove con  $P_b$  si intende la pressione barometrica, sarà facile per la (9) costruire un nomogramma a tre variabili (fig. 2) conoscendo due delle quali,  $P'_{E_{O_2}}$  e  $P_b$ , si potrà conoscere la terza  $F'_{E_{O_2}}$ ; per di più non ci interessa conoscere  $F'_{E_{O_2}}$  se non in quanto da questo valore

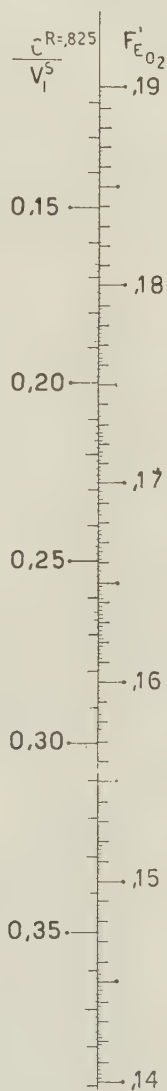


Fig. 1. — Nomogramma che stabilisce la relazione fra la frazione di O<sub>2</sub> nell'aria espirata secca privata di CO<sub>2</sub> ( $F'_{E_{O_2}}$ ) e le calorie corrispondenti a 1 litro di aria inspirata in condizioni standard: le calorie sono state calcolate con la formula (5) per  $R = 0.825$ .



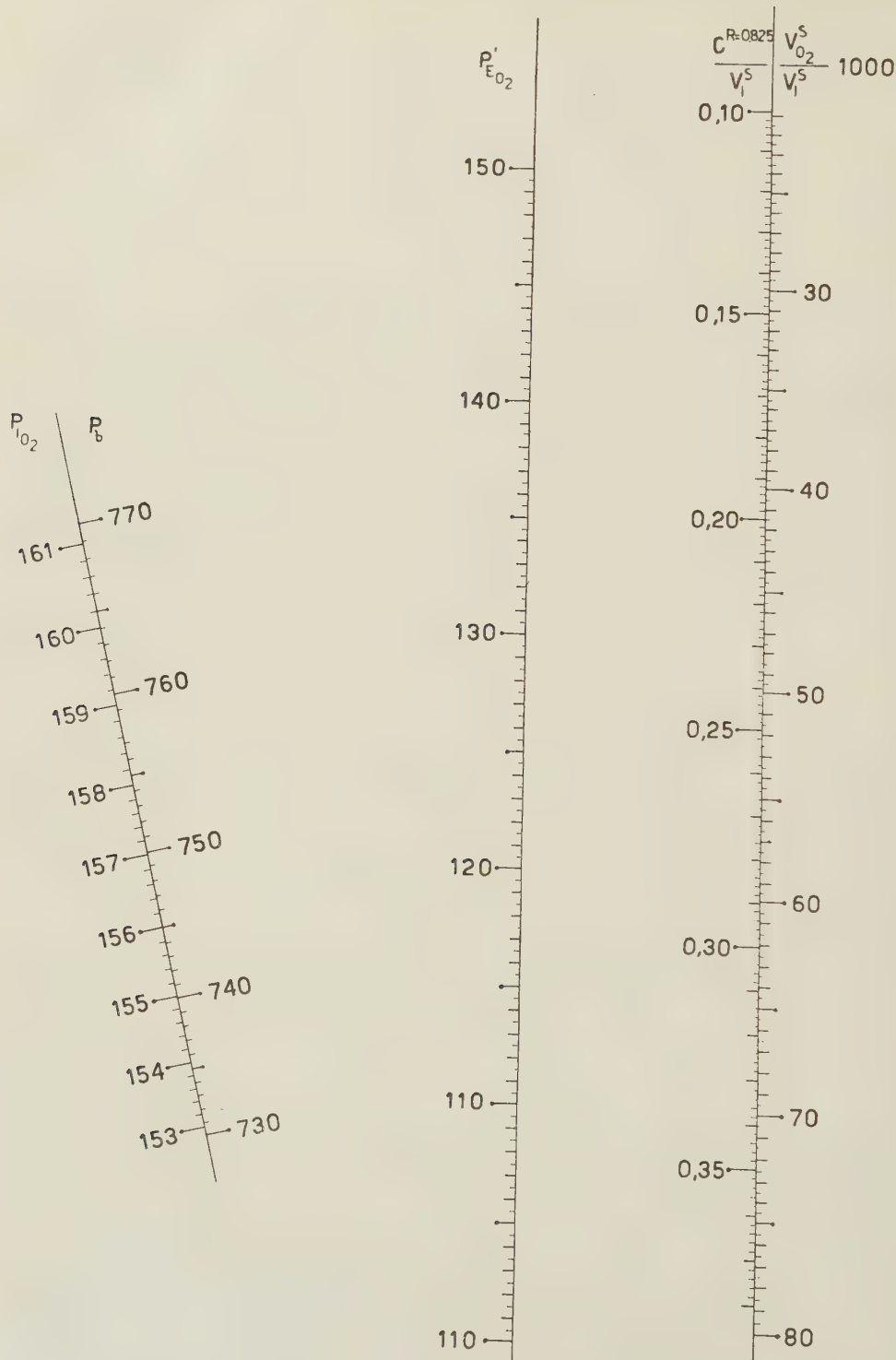


Fig. 2. - Nomogramma per calcolare il consumo di  $O_2$  in ml/min o il valore calorico ( $R = 0.825$ ) per litro di aria inspirata in condizioni standard quando siano noti  $P_{I_{O_2}}$  (o  $P_b$ ) e  $P'_{E_{O_2}}$  secondo la (7) e (9).

possiamo calcolare  $C/V_I^S$  come indicato nella (7) e nel nomogramma della fig. 1. Valendosi perciò di questa relazione possono addirittura essere omesse le indicazioni numeriche di  $F'_{E_{O_2}}$  sulla linea corrispondente a questa variabile, e sostituite da quelle relative a  $C/V_I^S$ , che è la variabile che direttamente ci interessa. Ottenuto tale valore basterà moltiplicarlo per il volume di aria inspirata ridotta a condizioni standard, per ottenere il valore calorico.

La riduzione del volume di aria inspirata ( $V_I$ ) a condizioni standard ( $V_I^S$ ) implica un calcolo che, se pure semplificato da metodi nomografici (Margaria, 1937) può essere evitato, almeno in parte, quando i dati dell' $O_2$  siano in termini di  $P_{O_2}$ , anziché di  $F_{O_2}$ . E infatti, poiché, limitandoci alla sola riduzione a 760 mm Hg

$$(10) \quad V_I^S = V_I^{o^\circ C, \text{ secc, Pb}} \cdot \frac{Pb}{760}$$

sostituendo nella (4) abbiamo:

$$(11) \quad \frac{V_{O_2}^S}{V_I^{o^\circ C, \text{ secc, Pb}}} = \frac{Pb}{760} \cdot \frac{2094 - F'_{E_{O_2}}}{1 - F'_{E_{O_2}}}$$

sostituendo a  $F'_{E_{O_2}}$  il valore della (9) si ottiene:

$$(12) \quad \frac{V_{O_2}^S}{V_I^{o^\circ C, \text{ secc, Pb}}} = \frac{Pb}{760} \cdot \frac{2094 Pb - P'_{E_{O_2}}}{Pb - P'_{E_{O_2}}}$$

Poiché  $0.2094 Pb$  non è altro che la pressione parziale dello  $O_2$  nell'aria inspirata secca,  $P_{I_{O_2}}$ , valore che può essere letto all'ossimetro facendovi passare aria inspirata, ponendo:

$$(13) \quad P_{I_{O_2}} - P'_{E_{O_2}} = \Delta P_{O_2}$$

la (12) diventa:

$$(14) \quad \frac{V_{O_2}^S}{V_I^{o^\circ C, \text{ secc, Pb}}} = \frac{Pb \cdot \Delta P_{O_2}}{760 (\cdot 7906 Pb + \Delta P_{O_2})}$$

e cioè

$$(15) \quad \frac{1}{\frac{V_{O_2}^S}{V_I^{o^\circ C, \text{ secc, bP}}}} = 760 \left( \frac{\cdot 7906}{\Delta P_{O_2}} + \frac{1}{Pb} \right)$$

Dalla (15) appare chiaramente che, mantenendo costante una delle tre variabili  $\left( \frac{V_{O_2}^S}{V_I^{o^\circ C, \text{ secc, Pb}}}, \Delta P_{O_2}, Pb \right)$  sussiste una relazione lineare tra i reciproci delle altre due.

È pertanto possibile costruire un nomogramma, mediante il quale, assegnato un determinato valore a  $\Delta P_{O_2}$  e  $Pb$  si ottiene il valore di  $\frac{V_{O_2}^S}{V_I^{o^\circ C, \text{ secc, Pb}}}$  corrispondente.

Senonché assegnando a  $\Delta P_{O_2}$  un determinato valore, e facendo variare  $Pb$  di  $\pm 20$  mm Hg che è la massima possibile variazione della pressione barometrica, si constata che

il valore di  $\frac{V_{O_2}^S}{V_I^{o^\circ C, \text{ secc, Pb}}}$  ha una variazione di solo  $\pm 0.2\%$ . Assegnando perciò a  $Pb$  un valore medio costante di 750 mm Hg, ad ogni valore di  $\Delta P$  corrisponde un solo valore di

$$\frac{V_{O_2}^S}{V_I^{o^\circ C, \text{ secc, Pb}}}$$

Per di più, sussistendo per la (13) una relazione lineare tra  $\Delta P_{O_2}$ ,  $P_{IO_2}$  e  $P'_{EO_2}$  si può costruire un nomogramma a tre variabili dal quale, assegnato un determinato valore a  $P_{IO_2}$  e  $P'_{EO_2}$  si ottiene il valore di  $\Delta P_{O_2}$  corrispondente.

Nel nomogramma precedentemente considerato, costruibile secondo la (15), esistono già le linee corrispondenti alle variabili  $\Delta P_{O_2}$  e  $P_{IO_2}$ : quest'ultima infatti coincide con la linea Pb poiché basta moltiplicare i valori indicati per  $F_{IO_2} = 0.2094$  per ottenere  $P_{IO_2}$ . Su quello stesso nomogramma si può quindi costruire la linea corrispondente alla terza variabile,  $P'_{EO_2}$ . La linea retta che passerà per i valori sperimentali di  $P_{IO_2}$  e  $P'_{EO_2}$  taglierà la retta  $\Delta P$  al valore corrispondente e conseguentemente anche la retta  $\frac{V_{O_2}^S}{V_I^{20^\circ C, \text{secc}, Pb}}$  al valore corrispondente. I valori  $\Delta P_{O_2}$  non ci interessano direttamente, e perciò tale retta può senz'altro essere omessa.

Poiché in Laboratorio le determinazioni si compiono ordinariamente a  $20^\circ C$  ed a saturazione di vapore acqueo, ci è parso opportuno apportare a  $V_I^{20^\circ C, \text{secc}, Pb}$  una correzione per queste condizioni ambiente:

$$(16) \quad V_I^{20^\circ C, \text{secc}, Pb} = V_I^{20^\circ C, \text{sat}, Pb} \frac{273 (Pb - 17.53)}{293 Pb}$$

17.53 essendo la pressione di vapor d'acqua in mm Hg a  $20^\circ C$ . Anche in questo caso si può attribuire a Pb il valore medio 750 mm Hg poiché una variazione di  $\pm 20$  mm Hg non implica che un errore di  $\pm 0.06\%$  nel fattore  $\frac{Pb - 17.53}{Pb}$ . La (15) diventa allora:

$$(17) \quad \frac{I}{\frac{V_{O_2}^S}{V_I^{20^\circ C, \text{sat}, Pb}}} = 760 \left( \frac{.866}{\Delta P_{O_2}} + \frac{I}{.914 Pb} \right) = \frac{660}{P_{IO_2} - P'_{EO_2}} + \frac{175}{P_{IO_2}}$$

Sulla base della (17) è possibile costruire un nomogramma che permette di leggere il valore  $\frac{V_{O_2}^S}{V_I^{20^\circ C, \text{sat}, Pb}}$  per un determinato valore di  $P_{IO_2}$  e di  $P'_{EO_2}$ : esso è rappresentato in fig. 3.

L'uso di tale nomogramma semplifica notevolmente il procedimento necessario per determinare il metabolismo. Letti direttamente sull'ossimetro i valori di  $P_{IO_2}$  e di  $P'_{EO_2}$  si ricava dal nomogramma il valore di  $\frac{V_{O_2}^S}{V_I^{20^\circ C, \text{sat}, Pb}}$ .

Se la temperatura dell'aria inspirata è di  $20^\circ C$ , basterà moltiplicare il valore  $\frac{V_{O_2}^S}{V_I^{20^\circ C, \text{sat}, Pb}}$  letto al nomogramma per il volume di aria inspirata letto al contatore, per ottenere il consumo di ossigeno in ml in condizioni standard.

Se l'aria inspirata ha una temperatura diversa da  $20^\circ C$  è necessario correggere tale volume riportandolo a  $20^\circ C$ . Tale correzione è molto facile, poiché è con sufficiente approssimazione del  $+ 0 - 0.5\%$  per ogni grado di temperatura in meno o in più di  $20^\circ C$ , come è dimostrato dai dati della Tabella I nella quale sono riportati i valori comparativi di coefficiente calcolato applicando le leggi dei gas e portando la correzione suddetta.

TABELLA I.

Temperatura	Fattore di correzione calcolato applicando le leggi dei gas	Fattore di correzione calcolato come indicato nel testo	Errore
10	1.047	1.050	+ 0.27 %
15	1.024	1.025	+ 0.10 %
20	1.000	1.000	—
25	0.9745	0.9750	+ 0.05 %
30	0.9479	0.9500	+ 0.21 %

Nel nomogramma di fig. 3, sulla retta sulla quale si trovano i valori di  $\frac{V_{O_2}^S}{V_{I, 20^\circ C, sat, Pb}}$  sono riportati anche i valori delle calorie/litro,  $\frac{C}{V_{I, 20^\circ C, sat, Pb}}$  calcolate per un quoziente respiratorio di 0.825. Eseguendo la determinazione su un soggetto in condizioni basali, moltiplicando questo valore per il volume dell'aria inspirata corretto per la temperatura nel modo anzidetto è perciò possibile ottenere il metabolismo basale in Cal.

METODO. — Il soggetto in esame respirava attraverso un boccaglio provvisto di valvole in- ed espiratoria. Sul tubo di inspirazione era intercalato un contatore per la misura dell'aria inspirata. L'aria espirata veniva raccolta in un sacco Douglas.

La determinazione della pressione dell'ossigeno nell'aria privata del  $CO_2$  e del vapore acqueo era eseguita facendo defluire aria nell'ossimetro attraverso una bottiglia di lavaggio contenente KOH a saturazione e che aveva uno spazio morto (volume del gas) di 5 ml: veniva così anche asportata oltre la metà del vapore acqueo.

Questo veniva poi asportato quasi totalmente facendo passare il gas in un tubo spirale di rame del diametro di 0,2 mm e del volume complessivo di 8 ml, tenuto in una miscela frigorifera. Il deflusso dell'aria era effettuato da una pompa intercalata fra il sacco e l'assorbitore di  $CO_2$ . La lettura del valore della tensione parziale dell'ossigeno veniva eseguita alla tensione atmosferica ambiente, arrestando per un istante il deflusso dell'aria nell'ossimetro.

L'ossimetro veniva tarato periodicamente. A questo scopo veniva immessa nell'ossimetro dell'aria atmosferica secca ( $F_{O_2} = 0.2093$ ) e per mezzo di una pompa ad acqua si variava la pressione del gas che veniva letta ad un manometro a mercurio; la pressione parziale dell' $O_2$ ,  $P_{O_2}$ , poteva così essere calcolata e raffrontata coi valori letti sull'ossimetro. Ma nell'analisi di aria espirata non può essere senz'altro utilizzato questo coefficiente di correzione perchè la taratura aveva luogo a più bassa pressione di azoto della analisi, e



questo gas ha un certo potere diamagnetico: passando dal vuoto alla introduzione nell'ossimetro di azoto puro a 760 mm Hg l'indice si sposta in misura corrispondente a quella di una diminuzione di 2.72 mm Hg di  $O_2$ .

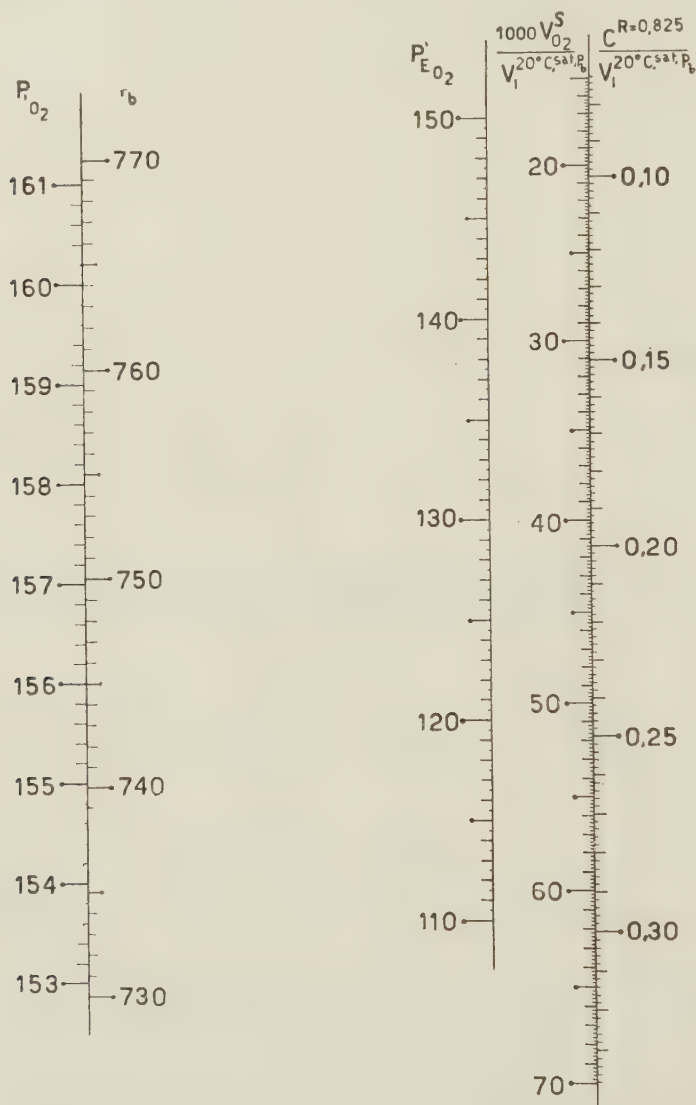


Fig. 3. - Nomogramma per calcolare il consumo di  $O_2$  in ml/min o le Calorie/minuto ( $R = 0.825$ ) per 1 litro di aria inspirata a pressione ambiente e a  $20^\circ C$ , quando si conoscano  $P_{I_{O_2}}$  (o  $P_b$ ) e  $P'E_{O_2}$ , secondo la (17). Per ogni  $1^\circ C$  di aumento (o di diminuzione) della temperatura rispetto a  $20^\circ C$  il fattore deve essere diminuito (o aumentato) del 0.5 %.

Il valore effettivo di pressione dell'ossigeno  $P_{O_2}$  in presenza di  $N_2$  alla pressione totale  $P_b$  veniva calcolato tenendo conto di questi due coefficienti di correzione con la formula:

$$(17) \quad P_{O_2} = L + fc + \frac{2,72}{760} (P_b - P)$$

ove  $L$  rappresenta il valore letto sulla scala dell'ossimetro quando si analizzi un campione di aria,  $f_c$  il fattore di correzione di tale lettura in base alla taratura e  $P$  la pressione nell'ossimetro a quel valore di taratura al quale corrisponde un valore di lettura uguale a  $L$ . Se ad esempio  $P_b = 750$ ,  $L = 110$  e nella taratura ad una lettura di 110 corrispondeva un valore di pressione effettiva di  $O_2$ ,  $P = 108.2$ ,

$$(18) \quad P_{O_2} = 110 + (108.2 - 110) + \frac{2.72}{760} \cdot \left( 750 - \frac{108.2}{.2093} \right) = 109.$$

ESPERIMENTI. — Al fine di confrontare i dati forniti dal metodo suesposto con quelli forniti dal metodo gas-analitico, sono stati eseguiti dapprima degli esperimenti in cui l'aria espirata dal soggetto e raccolta nei sacchi Douglas veniva analizzata con l'ossimetro e con l'apparecchio di Haldane-Margaria. Ogni campione di aria veniva analizzato in doppio al fine di stabilire la variabilità di ciascuno dei due metodi.

In un secondo tempo sono stati eseguiti esperimenti comparativi tra il metodo ossimetrico e il metodo a circuito chiuso, per l'esecuzione del quale è stato utilizzato l'apparecchio di Benedict. I suddetti esperimenti venivano eseguiti con le seguenti modalità: nella stessa mattinata erano effettuate sullo stesso soggetto 4 determinazioni di metabolismo basale di cui alternativamente due con il metodo ossimetrico usando due differenti ossimetri, e due con l'apparecchio di Benedict. Su quattro individui maschi di età compresa fra i 20 e i 22 anni sono state complessivamente eseguite 55 determinazioni di metabolismo basale.

#### RISULTATI E DISCUSSIONE.

*Variabilità delle determinazioni con il metodo ossimetrico.* — La differenza fra due determinazioni sullo stesso campione espressa in mm Hg risulta essere di  $0.36 \pm 0.06$  col metodo ossimetrico, di  $0.30 \pm 0.06$  col metodo gas-analitico: questi valori rappresentano la media di 15 doppie determinazioni per ciascun metodo. L'errore è praticamente lo stesso e sufficientemente piccolo perché il dato possa essere considerato attendibile.

Non esiste correlazione tra i valori assoluti di  $P_{O_2}$  e la differenza fra le due determinazioni sullo stesso campione, essendo il coefficiente di correlazione  $r = -0.14$ : l'errore della lettura è cioè indipendente dal valore di  $P_{O_2}$ .

La differenza fra i risultati dell'analisi del metabolismo eseguita col metodo ossimetrico e col metodo gas-analitico è stata di  $0.10 \pm 0.28$  C/m<sup>2</sup>·h, che è statisticamente insignificante: questo valore risulta da nove coppie di determinazioni.

*Confronto fra i valori del metabolismo basale determinati con il metodo ossimetrico e con il metodo convenzionale a circuito chiuso.* — I risultati delle determinazioni di metabolismo basale eseguite con il metodo ossimetrico e

con l'apparecchio di Benedict sono riportati nella Tabella II. Per ogni soggetto è stata calcolata la deviazione quadratica media dei valori di metabolismo basale raccolti con due metodi.

TABELLA II.

Casi	I		II		III		IV	
Metodo	Ossimetro	Benedict	Ossimetro	Benedict	Ossimetro	Benedict	Ossimetro	Benedict
N° determinazioni	6	4	10	6	7	6	8	8
Metabolismo basale medio . . . . .	42.90	40.16	37.62	38.30	41.91	43.91	40.72	41.21
Deviazione quadratica media . . . .	$3.94 \pm 1.14$	$5.59 \pm 1.98$	$3.43 \pm 0.77$	$2.59 \pm 0.75$	$3.70 \pm 0.99$	$3.90 \pm 1.13$	$1.3 \pm 0.32$	$3.12 \pm 0.77$

Le differenze delle suddette deviazioni sono state comparate tra loro con il metodo della  $z$  di Fisher (Fisher, 1944).

Tali deviazioni non differiscono significativamente tra loro in tre dei 4 casi esaminati; nel quarto caso invece si hanno 95 probabilità su 100 che la differenza fra le due deviazioni quadratiche indichi una reale differenza tra le variabilità dei valori ottenuti con i due metodi, essendo più precisa la misura del metabolismo basale eseguita con il metodo a circuito aperto.

Il soggetto del quarto caso aveva una respirazione assai irregolare. Questo fatto comporta la impossibilità di stabilire con esattezza l'inclinazione del tracciato spirografico. All'errore che è perciò facile commettere in questi casi si può attribuire la maggiore variabilità dei valori riscontrati con il metodo a circuito chiuso rispetto a quello aperto. Negli altri tre casi in cui la respirazione era molto regolare non si hanno differenze significative dello scarto quadratico medio, e si può quindi concludere che, nel caso di una respirazione regolare, l'errore del metodo a circuito chiuso è dello stesso ordine di grandezza di quello del metodo a circuito aperto.

## BIBLIOGRAFIA.

- PAULING L., WOOD R. E., STURDIVANT J. H., « J. Am. Chem. Soc. », 68, 795 (1946).  
 MARGARIA R., « Arch. Sc. Biol. », XXIII, 266 (1937).  
 FISHER R. A., *Statistical methods for research workers Oliver and Boyd Edinburgh: Tweeddale Court London 98 Great Russel Str. W. C.* 1944.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse.* Nota III (\*) di MICHELE SCE, presentata (\*\*) dal Socio B. SEGRE.

7. Siano  $x$  ed  $y$  elementi dell'algebra  $\mathfrak{A}$  del n. 1 e  $y^{(k)}$  indichi la derivata parziale di  $y(x)$  rispetto a  $x_k$ ; affinché la forma differenziale pfaffiana  $y dx$  sia chiusa occorre che

$$(10) \quad y^{(k)} u_h - u_k y^{(h)} = 0 \quad (h, k = 1, \dots, n)$$

e quindi che  $y(x)$  sia una funzione totalmente derivabile destra (1). Quando — effettuando eventualmente un cambiamento di base — si assuma  $u_i$  come l'unità di  $\mathfrak{A}$ , dalle (10) si desumono le

$$(11) \quad y^{(1)} (u_k u_h - u_h u_k) = 0 \quad (h, k = 1, \dots, n);$$

onde, se  $\mathfrak{A}$  non è commutativa,  $y^{(1)}$  è un divisore dello zero e la matrice che gli corrisponde nell'algebra  $\mathfrak{A}'$ , prima rappresentazione regolare di  $\mathfrak{A}$ , è degenere. Poiché questa matrice, per l'asserita totale derivabilità, è la matrice jacobiana di  $y(x)$  si ha che *le funzioni  $y(x)$  a jacobiano non nullo tali che  $y dx$  sia chiusa sono le funzioni totalmente derivabili in un'algebra commutativa.*

Poiché poi la forma  $y dx$  è cochiusa se e soltanto se la funzione  $y(x)$  è monogena (2), in forza dei risultati del n. 2, possiamo affermare che *nelle algebre commutative solenoidali le forme chiuse sono anche cochiuse e quindi sono armoniche sia nel senso di Hodge che nel senso di de Rham* (3).

8. Sia  $S_n$  lo spazio vettoriale associato ad  $\mathfrak{A}$  e sia  $y$  una funzione monogena destra in un dominio  $D$ ,  $y'$  una funzione monogena sinistra in un dominio  $D'$ ; allora se  $V_{n-1}$  è un ciclo  $(n-1)$ -dimensionale contenuto in  $D \cap D'$

(\*) Continuazione delle Note I e II pubblicate in questi « Rendiconti » pp. 30-35 e pp. 188-193.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) A. KRISZTEN, *Hyperkomplexe und pseudo-analytische Funktionen*. « Comm. Math. Helv. », v. 26 (1952), pp. 6-35, § 2; sotto forma integrale il risultato si trova già in RIZZA cit. in I (2), n. 11. Se si indica con  $dy/dx$  la matrice jacobiana di  $y(x)$  e con  $T$  la tabella di moltiplicazione di  $\mathfrak{A}$ , si vede che le (10) si possono scrivere nella forma compatta  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{-1} T = T_{-1} \frac{dy}{dx}$  che è evidentemente invariante rispetto ai cambiamenti di base.

(2) KRISZTEN cit. in (1) § 3; il risultato, sia pure sotto forma integrale si trova però già in RIZZA cit. in I (2) n. 7 e SEGRE cit. in I (2) p. 446.

(3) L'enunciato del testo migliora quello dato da KRISZTEN cit. in (1) § 4, questo Autore non tenendo conto che la monogeneità dipende dalla base.



ed ivi omologo a zero e  $dx^*$  è la forma aggiunta di  $dx = \sum_i u_i dx_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) si ha

$$(12) \quad \int_{V_{n-1}} y dx^* y' = 0^{(4)}.$$

Supponiamo ora che per le funzioni monogene di  $\mathfrak{A}$  sussista una formula integrale del tipo di Cauchy. Più precisamente, supponiamo che esista in  $\mathfrak{A}$  una funzione  $f(x, \xi)$  che, fissato  $\xi$ , sia una funzione monogena destra di  $x$  in tutto  $S_n$  tranne un insieme  $\mathfrak{I}$ , al più  $(n-1)$ -dimensionale, di punti in cui non sia definita, di guisa che per ogni funzione  $g(x)$  monogena sinistra in un dominio  $D'$  si abbia:

$$(13) \quad \int_{V_{n-1}} f(x, \xi) dx^* g(x) = g(\xi)$$

dove  $V_{n-1}$  è un ciclo  $(n-1)$ -dimensionale racchiudente  $\xi$  ed omologo a zero in  $D'$ ; la  $V_{n-1}$ , per il teorema testé enunciato, non può essere omologa a zero nel dominio di monogeneità di  $f(x, \xi)$ , e dovrà racchiudere punti di  $\mathfrak{I}$ . In particolare, la formula (13) dovrà valere quando  $g(x)$  è l'unità dell'algebra e la  $V_{n-1}$  è una sfera  $S$  di centro  $\xi$  e raggio  $r$ ; posto dunque

$$x_1 = \xi_1 + r \cos \varphi_1 \cdots \cos \varphi_{n-1}, \quad x_2 = \xi_2 + r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cdots \cos \varphi_{n-1}, \dots$$

$$\dots, x_n = \xi_n + r \sin \varphi_{n-1} \left( 0 \leq \varphi_1 < 2\pi; -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}, \dots, i=2, \dots, n-1 \right),$$

poiché risulta

$$dx^* = r^{n-2} (x - \xi) d\sigma,$$

dove  $d\sigma = \cos^{n-2} \varphi_{n-1} \cdots \cos \varphi_2 d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1}$  è l'elemento d'area della sfera di raggio unitario <sup>(5)</sup>, la (13) dà luogo alla

$$(14) \quad \int_S f(x, \xi) r^{n-2} (x - \xi) d\sigma = 1.$$

Perciò nelle algebre in cui la funzione  $r^{2-n} (x - \xi)^{-1}$ , ove è definita, è monogena destra, cioè soddisfa la

$$(15) \quad \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} [r^{2-n} (x - \xi)^{-1}] u_k =$$

$$= r^{-n} (x - \xi)^{-1} [(n-2) (x - \xi) + r^2 \sum_k u_k (x - \xi)^{-1} u_k] = 0,$$

(4) FUETER cit. in I <sup>(2)</sup> e RIZZA cit. in <sup>(2)</sup>.

(5) Cfr. W. NEF, *Ueber eine Verallgemeinerung des Satzes von Fatou für Potentialfunktionen*. «Comm. Math. Helv.», vol. 13 (1943-44), pp. 215-241, a cavallo delle pp. 231-232.

possiamo presumere che valga la formula integrale (13) dove si è posto

$$(16) \quad f(x, \xi) = k^{-1} r^{2-n} (x - \xi)^{-1} \quad , \quad k = \int_S d\sigma.$$

Poiché nelle algebre di Clifford, per ogni elemento  $x$  non divisore dello zero si ha  $\sum_k u_k x u_k = -(n-2) \bar{x}$  con  $x \bar{x} = r^2$ , la (15) è soddisfatta e resta da stabilire se la (13) con la posizione (16) dia effettivamente una formula integrale per le algebre di Clifford <sup>(6)</sup>.

9. Per ottenere qualche soluzione reale della equazione

$$(17) \quad \Omega h(x_1 \cdots x_p) \equiv \sum_{k=1}^p \alpha_k (x_1 \cdots x_p) \frac{\partial^2 h}{\partial x_k^2} = 0$$

si può considerare l'equazione

$$(18) \quad \Omega f(x) = 0$$

dove  $f(x)$  è una funzione totalmente derivabile dall'elemento  $x = x_1 u_1 + \cdots + x_p u_p$  dell'algebra  $\mathfrak{A}$  di ordine  $n$  ( $p \leq n$ ). La (18) è risolubile se e soltanto se, rispetto ad una qualche base di  $\mathfrak{A}$ , risulta

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k u_k^2 = 0 \quad (7).$$

Dunque se  $p = n$  e le  $\alpha_k$  sono costanti, la (18) è risolubile nelle algebre solenoidali nel campo complesso; in particolare, se la (17) è ellittica, la (18) è risolubile nelle algebre solenoidali nel campo reale.

Il metodo sopra indicato si estende facilmente ad equazioni alle derivate parziali di grado superiore al secondo; ad esempio per risolvere l'equazione

$$\Delta^n h(x_1 x_2) = 0$$

possiamo ricondurci a funzioni totalmente derivabili in un'algebra in cui  $(u_1^2 + u_2^2)^n = 0$ . Tra le algebre di questo tipo sono particolarmente notevoli quelle potenziali di ordine  $2n$  la cui base  $1, j, j^2, \dots, j^{2n-1}$  soddisfa alla relazione  $(1 + j^2)^n = 0$ . Quando si ponga  $\omega = 1 + j^2$ , si può esprimere  $j$  mediante l'unità immaginaria e le potenze di  $\omega$ ; onde si riconosce che tali algebre sono quelle prodotto diretto dell'algebra dei numeri complessi per le algebre dei

(6) La formula integrale data da R. FUETER, *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen*  $\Delta u = 0$ , und  $\Delta \Delta u = 0$  mit vier reellen Variablen. «Comm. Math. Helv.», v. 7 (1934-35), pp. 307-330, n. 4 per l'algebra dei quaternioni e quelle date da vari Autori per sistemi lineari in algebre di Clifford sono del tipo indicato. G. B. RIZZA ha promesso un lavoro sulle formule integrali generali nelle algebre di Clifford.

(7) P. W. KETCHUM: *Analytic functions of hypercomplex variables*. «Trans. Am. Math. Soc.», v. 30 (1928), pp. 641-667, n. 25.

numeri  $n$ -potenziali di base  $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$  <sup>(8)</sup>. Questo assicura che si tratta di algebre solenoidali in cui le funzioni totalmente derivabili  $y(x_0 \dots x_{2n-1})$  sono armoniche; di più, la semplice ispezione della matrice jacobiana che, per la definizione di totale derivabilità è del tipo

$$(19) \quad \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha_k = \begin{pmatrix} a_{2k} & -a_{2k+1} \\ a_{2k+1} & a_{2k} \end{pmatrix}$$

assicura che ogni  $y$  è funzione armonica di tutte le coppie  $x_{2k}, x_{2k+1}$ . È poi da notare che le funzioni monogene che non siano totalmente derivabili non sono nemmeno armoniche.

10. Consideriamo ora le algebre non commutative  $\mathfrak{A}_n$  di ordine  $2n$  la cui base

$$1, i, \omega, i\omega, \dots, \omega^{n-1}, i\omega^{n-1}$$

soddisfa le relazioni

$$i^2 = -1 \quad \omega^n = 0 \quad \omega i + i\omega = 0^{(9)};$$

un qualunque elemento  $a$  di  $\mathfrak{A}_n$  lo potremo scrivere nella forma

$$(20) \quad a = \alpha_0 + \alpha_1 \omega + \dots + \alpha_{n-1} \omega^{n-1}$$

dove le  $\alpha_k = a_{2k} + i a_{2k+1}$  si comportano tra loro come ordinari numeri complessi, mentre

$$(21) \quad \alpha_k \omega = \omega \bar{\alpha}_k.$$

Insieme alle algebre  $\mathfrak{A}_n$  considereremo le algebre  $\mathfrak{Q}_n$  di ordine  $4n$  che si hanno tenendo fissa la condizione  $\omega^n = 0$  e supponendo che le  $\alpha_k$  delle (20), (21) si comportino tra loro come gli ordinari quaternioni.

Tenendo conto dell'espressione del prodotto di due elementi  $a = \sum_k \alpha_k \omega^k$ ,  $b = \sum_k \beta_k \omega^k$

$$ab = \sum_k \alpha_r \tilde{\beta}_s \omega^k \quad (r + s = k),$$

$\tilde{\beta}_s = \beta_s$  oppure  $\tilde{\beta}_s = \bar{\beta}_s$  secondo che  $r = k - s$  è pari o dispari, con calcoli un po' lunghi ma privi di difficoltà si possono stabilire i seguenti risultati:

*gli elementi del centro di un'algebra  $\mathfrak{A}_n$  o  $\mathfrak{Q}_n$  definita mediante le (20), (21) e la  $\omega^n = 0$  hanno la forma  $\sum \alpha_{2k} \omega^{2k}$  con  $\alpha_{2k} = \bar{\alpha}_{2k}$ .*

(8) Per  $n = 2$  si ha l'algebra studiata da SOBRERO cit. in I <sup>(1)</sup> e che, da un altro punto di vista era già stata incontrata da KETCHUM cit. in (7), n. 31. In questo caso le trasformazioni che fanno passare da una base all'altra si esprimono mediante le relazioni  $2i = 3j + j^3$ ,  $\omega = a(1 + j^2) + b(j + j^3)$ ,  $i\omega = -b(1 + j^2) + a(1 + j^3)$  con  $a$  e  $b$  numeri reali arbitrari (non entrambi nulli); non ci risulta che queste relazioni generali siano mai state considerate.

(9) Per  $n = 2$  si ha l'algebra LXXXI del n. 5.

*i divisori dello zero sono della forma  $\omega^i a$  e quindi sono tutti e soli gli elementi pseudonulli dell'algebra; questi costituiscono il radicale che è di indice  $n$  e di ordine  $2(n-1)$  per le  $\mathfrak{A}_n$ ,  $4(n-1)$  per le  $\mathfrak{Q}_n$ .*

*l'unico omopotente non pseudonullo è l'unità e quindi le  $\mathfrak{A}_n$  e le  $\mathfrak{Q}_n$  sono algebre completamente primarie.*

Quando ci si limiti al caso  $n = 2$ , come ora faremo, dal primo enunciato si ha subito che  $\mathfrak{A}_2$  e  $\mathfrak{Q}_2$  sono normali. Inoltre, posto  $\bar{a} = \bar{\alpha}_0 - \alpha_1 \omega$ , se diciamo norma di  $a$  il numero reale  $a\bar{a} = \alpha_0 \bar{\alpha}_0$ , si vede che *i divisori dello zero sono tutti e soli gli elementi a norma nulla.*

Posto  $y = \alpha + \beta\omega$  ed  $x = \xi + \eta\omega$ , le funzioni monogene  $y(x)$  sono armoniche nelle componenti di  $\xi$ .

È infatti noto<sup>(10)</sup> che la condizione di monogeneità per  $y(x)$  si può scrivere  $Dy = 0$  dove  $D$  è un operatore che si comporta come un elemento dell'algebra; poiché la norma di  $D$  è il laplaciano relativo alle componenti di  $\xi$ , applicando alla  $Dy = 0$  l'operatore  $\bar{D}$  si ottiene il risultato.

II. Le considerazioni sin qui esposte, per quanto forse in sé non prive di interesse, abbisognerebbero di venire ulteriormente approfondite quando se ne volessero trarre risultati più concreti; d'altronde, crediamo che risultati siffatti si possano ottenere soltanto con riferimento a particolari tipi di algebre come, ad esempio, le  $\mathfrak{A}_n$ .

A proposito di queste ultime rileviamo che i loro divisori dello zero, nello spazio  $S_{2n}$  rappresentativo, costituiscono uno spazio lineare  $S_{2(n-1)}$ ; quindi, in questo caso, lo studio delle varietà dei divisori dello zero — preliminare necessario alla ricerca di formule integrali — risulta banale. La difficoltà che si presenta in questo tipo di problemi può invece ascriversi alla scarsità degli esempi noti concreti di funzioni monogene, specialmente nel caso delle algebre non commutative<sup>(11)</sup>; ad esempio, in  $\mathfrak{A}_2$  né le potenze né l'esponenziale sono funzioni monogene, e si può soltanto dire che tali funzioni sono del tipo

$$w = u(x_1, x_2) + \frac{v(x_1, x_2)}{x_2}(x_2 i + x_3 \omega + x_4 i\omega)$$

con  $u + iv$  funzione olomorfa. Nell'algebra dei quaternioni, da una proprietà di questo genere si deduce che le funzioni  $\Delta w$  (in particolare le  $\Delta x^n$ ) sono funzioni monogene; analogo risultato non valendo in  $\mathfrak{A}_2$ , si pone il problema di sapere se in  $\mathfrak{A}_2$  esista un operatore differenziale  $\Omega$  tale che le  $\Omega w$  siano monogene.

Per il modo in cui questi problemi ed altri consimili appaiono tra loro connessi, una risposta anche soltanto parziale dovrebbe gettar luce sull'intera questione: è quel che speriamo di poter fare in altro lavoro.

(10) Cfr. SEGRE cit. in I<sup>(2)</sup> p. 442.

(11) Questa difficoltà è assai meno sentita nelle algebre commutative solenoidali, poiché in queste algebre le funzioni più comuni dell'analisi risultano totalmente derivabili.



**Geometria algebrica.** — *Superficie algebriche ottuple canoniche di genere geometrico qualunque.* Nota di POL BURNIAT, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

1. Consideriamo un campo di razionalità  $H = \{x, \sqrt{f_1(x)}, \dots, \sqrt{f_n(x)}\}$ ,  $n \geq 1$ , essendo le  $f_i(x)$  polinomi nelle coordinate d'un punto  $x$  appartenente ad una superficie algebrica irriducibile  $F$ . I radicali sono supposti indipendenti.

Lo scambio delle due determinazioni del radicale  $\sqrt{f_i(x)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , definisce un automorfismo di  $H$ . Sono così definiti sopra  $H$   $n$  automorfismi, i quali generano un 2-gruppo abeliano,  $G_0$ : il gruppo dei  $\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} = 2^n$  automorfismi scambianti le determinazioni degli  $n$  radicali dati, presi ad  $s$  ad  $s$ ,  $s = 0, 1, \dots, n$ .

Rappresentiamo con  $\sqrt{f_r(x)}$ ,  $r = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ , i  $\sum_{s=1}^n \binom{n}{s} = 2^n - 1$  radicali prodotti degli  $n$  radicali dati presi ad  $s$  ad  $s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ . Gli automorfismi che conservano ciascuna delle due determinazioni d'un radicale  $\sqrt{f_s(x)}$  formano un sottogruppo  $G_s$ , d'ordine  $2^{n-1}$ , di  $G_0$ : questo possiede così  $2^n - 1$  tali sottogruppi  $G_s$ .

2. Sia  $F_0$  una superficie corrispondente al campo  $H: F_0$  è algebrica. Il gruppo  $G_0$ , operando sopra  $H$ , induce sopra  $F_0$  un'involuzione abeliana  $J_0$ , d'ordine  $2^n$ , birazionalmente identica alla data superficie  $F$ . L'involuzione  $J_0$  è composta con le  $2^n - 1$  involuzioni  $I_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ , d'ordine 2, a due a due permutabili, che corrispondono agli automorfismi di  $G_0$ , differenti dall'identità.  $G_0$  è anche composto con le  $2^n - 1$  involuzioni  $J_s$ , d'ordine  $2^{n-1}$  associate, sopra  $F_0$ , ai  $2^n - 1$  sottogruppi  $G_s$  di  $G_0$ .

Converremo in modo generale di rappresentare con  $X^\circ$  l'ente di  $F_0$ , composto con  $J_0$ , che possiede sopra  $F$  una data immagine  $X$ . Sia  $u_r$  la curva dei punti uniti di  $I_r$ . Vi sono  $2^n - 1$  curve  $u_r$  sopra  $F_0$ . Ne rappresentiamo la somma con  $U$ . Abbiamo  $I_s I_r = I_s I_r$  e, di conseguenza,  $I_s u_r = u_r$ . La curva  $u_r$  è dunque composta con tutte le involuzioni  $I_s$ ,  $r \neq s$ . Le curve  $2u_r$  ed  $2U$  sono quindi composte con  $J_0$ . Le loro immagini rispettive  $e_r$  ed  $E$  sopra  $F$  forniscono le relazioni  $e_r^\circ = 2u_r$ ,  $E^\circ = 2U$ .

Sia  $V_r$  la somma delle  $2^{n-1} - 1$  curve  $u_r$  dei punti uniti per le  $I_t \subset I_r$ . Ciascuna di queste involuzioni conserva le due determinazioni di  $\sqrt{f_r(x)}$ .

Le  $2^{n-1}$  involuzioni  $I_t$  le cui curve di punti uniti compongono la curva  $U_r = U - V_r$  scambiano quelle determinazioni fra loro. Conseguentemente, le immagini  $e_s$  delle curve  $2u_s$ ,  $u_s \in U_r$ , compongono la curva di diramazione effettiva  $E_r$  di  $\sqrt{f_r(x)}$  sopra  $F$ ;  $E^\circ = 2U$ .

(\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

Si vede facilmente che, nella congruenza modulo  $2$   $e_t$ ,  $t=1, 2, \dots, 2^n-1$ , le  $2^n-1$  curve  $E_r$  appartengono ad un  $2$ -modulo d'ordine  $2^n$ .

3. Non è restrittivo supporre che il polinomio  $f_r(x)$  sia d'ordine pari,  $2m_r$ . Siano  $c$  la sezione iperpiana all'infinito di  $F$ ,  $A_r$  la curva di diramazione apparente di  $\sqrt{f_r(x)}$  sopra  $F$ . Le funzioni  $f_r(x)$ ,  $\sqrt{f_r(x)}$  sono razionali rispettivamente sopra quelle superficie, ove inducono le equivalenze lineari

$$E_r \equiv 2(m_r c - A_r) \quad \text{e} \quad U_r \equiv m_r c - A_r.$$

Le metà lineari  $\varepsilon_r \equiv m_r c - A_r$  di  $E_r$  sono dunque tali che  $\varepsilon_r^o \equiv U_r$ .

I sistemi canonici virtuali impuri  $|k_o|$  e  $|k|$  di  $F_o$  e  $F$  sono legati dalla relazione di Enriques-Castelnuovo  $k_o \equiv U + k$ . Le curve  $V_i$  non sono composte con  $J_o$ , ma si ha  $\varepsilon_i^o \equiv U_i$ ,  $U = V_i + U_i$ . Dunque:

1° Il sistema canonico  $|k_o|$  di  $F_o$  è combinazione lineare di quelli fra i sistemi lineari di curve

$$U + |k|^o \quad \text{e} \quad V_i + |k + \varepsilon_i|^o = V_i + |\varepsilon_i^o|^o, \quad i = 1, 2, \dots, 2^n - 1,$$

che sono effettivi.

Allo stesso modo, poiché  $2k_o \equiv 2U + 2k \equiv E^o + 2k$  ed  $U_i \equiv \varepsilon_i^o$ :

2° Il sistema bicanonico  $|2k_o|$  di  $F_o$  è combinazione lineare di quelli fra i sistemi lineari di curve

$$|E''|^o \quad \text{e} \quad U_i + |2k + E - \varepsilon_i|^o = U_i + |E'' - \varepsilon_i|^o$$

che sono effettivi.

Con  $a$  sezione iperpiana generica di  $F$ , si può scrivere

$$(a^o)' \equiv a^o + k_o \equiv U + k^o + a^o \equiv V_i + (k + \varepsilon_i + a)^o,$$

sicch :

3° Il sistema aggiunto alla curva  $a^o$    combinazione lineare di quelli fra i sistemi lineari di curve  $U + |a'|^o$  e  $V_i + |\varepsilon_i' + a|^o$  che sono effettivi.

4. Supponiamo che  $F$  sia un piano. La conoscenza delle curve di diramazione  $E_1, E_2, \dots, E_n$  equivale a quella degli  $n$  radicali  $\sqrt{f_r(x)}$ . Nel caso d'un piano 8-plo  $F_o = 8F$ , vi sono 7 curve  $E_r$  definite a partire da tre fra esse (n  2). Vogliamo esaminare le superficie  $F_o = 8F$  per le quali  $e_5, e_6, e_7$  sono d'ordine zero ed inoltre:

$$E_1 = e_1 + e_4, \quad E_2 = e_2 + e_4, \quad E_3 = e_3 + e_4.$$

Disponendo degli indici, potremo scrivere per esse:

$$\left. \begin{aligned} E_4 &\equiv E_1 + E_2 \equiv e_1 + e_2, & E_5 &\equiv E_1 + E_3 \equiv e_1 + e_3, & E_6 &\equiv E_2 + E_3 \equiv e_2 + e_3 \\ E_7 &\equiv E_1 + E_2 + E_3 \equiv e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \end{aligned} \right\} \text{mod. } 2e_t, \quad t=1, 2, \dots, 4.$$

Rappresenteremo con  $C_m(\Sigma A_i^{n_i})$  una curva del piano  $F$ , d'ordine  $m$ , con dati punti base  $A_i$  di molteplicità assegnata  $n_i$ .

5. Un piano 8-*plo* abeliano  $F_0 = 8F$  colle curve di diramazione  $E_1 = e_1 + e_4$ ,  $E_2 = e_2 + e_4$ ,  $E_3 = e_3 + e_4$ ,  $e_4 = C_{2r-1}(O^{2r-1})$ ,  $e_1 \equiv e_2 \equiv e_3 \equiv C_3(O + A^2)$ ,  $r > 1$ , possiede i generi aritmetico, geometrico, lineare:  $p_a = p_g = 2r$ ,  $p^{(1)} = 8p_g - 15$  ed il bigenere:  $P_2 = 9p_g - 15$ . Il suo sistema canonico puro è irriducibile e risulta composto con l'involuzione d'ordine 8 (identica ad  $F$ ) portata da  $F_0$ .

Si vede anzitutto che la curva  $V_7 = e_5 + e_6 + e_7$  di  $F_0$  non esiste (n. 2), e che

$$\varepsilon_7 \equiv C_{r+4}(O^{r+1} + A^3), \quad \varepsilon_i \equiv C_{r+1}(O^r + A), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\varepsilon_j \equiv C_3(O + A^2), \quad j = 4, 5, 6, \quad E \equiv C_{2r+8}(O^{2r+2} + A^5).$$

Le aggiunte alle curve  $\varepsilon_r$  mancano, tranne quelle di  $\varepsilon_7$ ,  $|k|$  è virtuale. Il sistema canonico  $|k_0|$  di  $F_0$  si riduce dunque a (n. 3, 1°):

$$|k_0| = |\varepsilon_7|^0 = |C_{r+1}(O^r + A^2)| = C_1^0(O + A) + |C_r(O^{r-1} + A)|^0.$$

Questo sistema essendo  $\infty^{2r-1}$ , abbiamo  $p_g = 2r$ .

La retta  $C_1(O + A)$  non porta diramazione. Il suo grado virtuale vale  $-1$ . La curva  $C_1^0(O + A)$  di  $F^0$  è dunque la somma di 8 curve eccezionali sconnesse di prima specie e  $|C_r(O^{r-1} + A)|^0$  è il sistema canonico puro di  $F_0$ . Giacché il suo grado vale  $8(2r-2)$ ,  $F_0$  ha il genere lineare  $p^{(1)} = 8(2r-2) + 1 = 8p_g - 15$ . Il sistema considerato è evidentemente irriducibile e composto con  $J_0$ .

Il sistema di curve

$$|E''| = 2C_1(O + A) + |C_{2r}(O^{2r-2} + A)|$$

è  $\infty^{6r-4}$ . Il sistema  $|E'' - \varepsilon_7|$  manca. I sistemi

$$|E'' - \varepsilon_i| = 2C_1(O + A) + |C_{r-1}(O^{r-2} + A)|,$$

$$|E'' - \varepsilon_j| = 2C_1(O + A) + |C_{2r-3}(O^{2r-3})|,$$

sono  $\infty^{2r-3}$ . Da ciò si deduce (n. 3, 2°) che  $F_0$  possiede il bigenere

$$P_2 = (6r-4) + 3(2r-3) + 3(2r-3) + 7 = 9p_g - 15.$$

La regolarità di  $F_0$  si può verificare servendosi di un classico teorema di De Franchis. Ma si può anche stabilire direttamente come segue.

Una retta generica  $a$  del piano  $F$  dà luogo alla relazione  $a(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 2r + 8$ . La retta 8-*pia*  $a^0 = 4a$ , portando  $4(2r+8)$  punti di diramazione, ha il genere  $4r+9$ . D'altra parte, i sistemi  $|\varepsilon_r + a|$  effettivi sono il sistema  $\infty^{3r+2}|C_{r+2}(O^r + A^2)|$ , tre sistemi  $\infty^{r-1}|C_{r-1}(O^{r-1})|$  e tre sistemi  $\infty^1|C_1(A)|$ . L'aggiunto di  $a^0$ , (n° 3, 3°), possiede dunque la

dimensione  $(3r+2) + 3(r-1) + 3 + 6 = 6r + 8$  e taglia sopra  $\alpha^0$  una serie canonica di dimensione  $6r + 8 - p_g = 4r + 8$ , cioè la serie canonica completa. La superficie  $F_0$  è dunque regolare in base ad un noto teorema di Picard.

6. *Un piano 8-plo abeliano  $F_0 = 8F$  colle curve di diramazione*

$$E_1 = e_1 + e_4, \quad E_2 = e_2 + e_4, \quad E_3 = e_3 + e_4, \quad e_4 = C_{2r}(O^{2r}), \quad e_1 \equiv e_2 \equiv e_3 \equiv C_2, \quad r \geq 1,$$

*possiede i generi:  $p_a = p_g = 2r + 1$ ,  $p^{(1)} = 8p_g - 15$  ed il bigenere:  $P_2 = 9p_g - 15$ . Il suo sistema canonico puro è irriducibile e risulta composto coll'involuzione d'ordine 8 (identica ad  $F$ ) portata da  $F_0$ .*

La dimostrazione di questa proposizione si svolge come quella della precedente.

Ora abbiamo

$$\varepsilon \equiv C_{r+3}(O^r), \quad \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \equiv \varepsilon_3 \equiv C_{r+1}(O^r), \quad \varepsilon_4 \equiv \varepsilon_5 \equiv \varepsilon_6 \equiv C_2, \\ E \equiv C_{2r+6}(O^{2r}).$$

Si trova dapprima che:

$$(1) \quad |k_0| = |\varepsilon'_7|^0 = |C_r(O^{r-1})|^0,$$

eppertanto:  $p_g = 2r + 1$ ,  $p^{(1)} = 8(2r - 1) + 1 = 8p_g - 15$ . Ovviamente (1) è il sistema canonico puro di  $F_0$ , irriducibile e composto con  $J_0$ .

D'altra parte, la dimensione del sistema bicanonico, ancora una volta, dipende solamente dalle dimensioni dei sistemi  $|E''| = |C_{2r}(O^{2r-2})|$  e  $|E'' - \varepsilon_r|$ ,  $r \neq 7$  i quali sono rispettivamente  $\infty^{6r-1}$  ed  $\infty^{2r-2}$ . Se ne deduce:

$$P_2 = (6r - 1) + 6(2r - 2) + 7 = 9p_g - 15.$$

La regolarità di  $F_0$  si prova facilmente.

7. Da ciò che precede si trae l'esistenza, per ogni valore di  $p_g$ , di superficie regolari il cui sistema canonico puro è irriducibile e composto con una involuzione dell'ottavo ordine. E basta porre una proiettività tra le curve canoniche di una siffatta superficie e gli iperpiani d'uno spazio lineare a  $p_g - 1$  dimensioni (per  $p_g > 4$ ), per trasformare quelle superficie  $F_0$  in superficie canoniche normali. Si ha così il teorema:

*Per tutti i valori di  $p_g > 4$ , esistono superficie 8-plo canoniche regolari.*

8. Per (almeno) ogni valore pari di  $p_g$  esistono anche superficie canoniche irregolari. Ecco due esempi provanti tale risultato.

1° *Un piano 8-plo abeliano  $F_0 = 8F$  colle curve di diramazione*

$$E_1 = e_1 + e_4, \quad E_2 = e_2 + e_4, \quad E_3 = e_3 + e_4,$$

$$e_4 = C_{2r}(O^{2r}), \quad e_1 = C_4(O^2 + A^2), \quad e_2 \equiv e_3 \equiv C_2(A^2), \quad r \geq 2,$$



ha i generi:  $p_a = p_g - 1$ ,  $p_g = 2r$ ,  $p^{(1)} = 8p_g - 15$  ed il bigenere:  $P_2 = 9p_g - 16$ . Il suo sistema canonico puro è irriducibile e risulta composto con un'involuzione dell'ottavo ordine.  $F_0$  porta un fascio di genere uno di curve di genere  $p_g - 1$ .

Attualmente abbiamo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_7 &\equiv C_{r+4}(O^{r+1} + A^3) \quad , \quad \varepsilon_1 \equiv C_{r+2}(O^{r+1} + A) \quad , \quad \varepsilon_2 \equiv \varepsilon_3 \equiv C_{r+1}(O^r + A), \\ \varepsilon_4 &\equiv \varepsilon_5 \equiv C_3(O + A^2) \quad , \quad \varepsilon_6 \equiv C_2(A^2) \quad , \quad E \equiv C_{2r+8}(O^{2r+2} + A^6). \end{aligned}$$

Si trova inoltre

$$|k_0| = |\varepsilon_7|^0 = C_1^2(O + A) + |C_r(O^{r-1} + A)|^0.$$

Ragionando come al n. 5, si vede che  $C_1^0(O + A)$  rappresenta 8 curve eccezionali di prima specie, fra loro a due a due sconnesse, di  $F_0$ . Il sistema canonico puro di  $F_0$  è dunque il sistema  $|C_r(O^{r-1} + A)|^0$ , che è  $\infty^{2r}$  e di grado  $8(2r - 2)$ . Se ne deduce  $p_g = 2r$  e  $p^{(1)} = 8(2r - 2) + 1 = 8p_g - 15$ . Il calcolo di  $P_2$  si conduce come sopra.

Ora le curve  $a^0$  sono di genere  $4r + 9$ , ed il loro aggiunto è  $\infty^{6r+7}$ , come si verifica facilmente. Tale aggiunto taglia su  $a^0$  una serie di dimensione  $6r + 7 - p_g = 4r + 7$ , cioè una serie canonica di deficienza 1, talché  $F_0$  possiede la irregolarità 1.

Si poteva prevedere questo fatto osservando che il campo  $H$  è anche il campo  $\{x, \sqrt{f_2(x)f_3(x)}, \sqrt{f_1(x)}, \sqrt{f_2(x)}\}$ .  $F^0$  è dunque una superficie quadrupla il cui sostegno corrisponde al campo  $\{x, \sqrt{f_2(x)f_3(x)}\}$ , cioè il piano doppio  $2F$  dotato della curva di diramazione effettiva  $E_2 + E_3 \equiv C_4(A^4)$ , mod  $2e_1$ . Le rette doppie  $2C_1(A)$  di  $2F$  sono senza diramazione. Esse sono coppie di curve razionali di  $2F$ , le quali appartengono ad un fascio  $\{Y\}$ . Questo fascio, doppiamente rappresentato sopra il fascio  $|C_1(A)|$  di  $F$  con 4 elementi di diramazione, ha il genere uno.

Al fascio  $\{Y\}$  corrisponde su  $F_0$  un fascio ellittico  $\{Z\}$  di curve  $Z$  le quali, contate due volte, sono curve  $C_1^0(A)$ . Queste ultime, portando  $4(2r + 2)$  punti di diramazione, sono di genere virtuale  $4r - 3$ . Di conseguenza, le curve  $Z$  sono di genere  $2r - 1$ .

2° Un piano 8-plo abeliano  $F_0 = 8F$  colle curve di diramazione

$$E_1 = e_1 + e_4 \quad , \quad E_2 = e_2 + e_4 \quad , \quad E_3 = e_3 + e_4 \quad , \quad e_4 = C_{2r+2}(O^{2r+2}) \quad ,$$

$$e_1 \equiv e_2 \equiv e_3 \equiv C_2(A^2) \quad , \quad r > 1 \quad ,$$

possiede i generi:  $p_a = p_g - 3$ ,  $p_g = 2r$ ,  $p^{(1)} = 8p_g - 15$  ed il bigenere:  $P_2 = 9p_g - 18$ . Il suo sistema canonico puro è irriducibile e risulta composto con un'involuzione dell'ottavo ordine.  $F_0$  possiede un fascio di genere 3 di curve di genere  $r$ .

I valori dei generi, del bigenere, della irregolarità, si calcolano ora come dianzi. La composizione del sistema canonico puro si constata nello stesso modo.

Osserviamo poi che il campo  $H$  da cui siamo partiti è anche il campo

$$\{x, \sqrt{f_1(x)f_2(x)}, \sqrt{f_2(x)f_3(x)}, \sqrt{f_3(x)}\}.$$

$F_0$  è dunque una superficie doppia, il cui sostegno è un piano quadruplo abeliano,  $4F$ , corrispondente al campo  $\{x, \sqrt{f_1(x)f_2(x)}, \sqrt{f_2(x)f_3(x)}\}$ . Questo piano quadruplo è dotato delle due curve di diramazione  $E_1^* = e_1 + e_2$  ed  $E_2^* = e_2 + e_3$ , le quali sono curve  $C_4(A^4)$  e danno luogo ad una curva totale  $E \equiv e_1 + e_2 + e_3 \equiv C_6(A^6)$ , mod.  $2e_i$ . Le rette quaduple  $4C_i(A)$  di  $4F$  non hanno diramazione. Esse sono quaterne di curve razionali appartenenti ad un fascio  $\{Y\}$  il quale, risultando quadruplamente rappresentato sopra il fascio  $|C_i(A)|$  con sei elementi di diramazione, è di genere 3. Ad  $\{Y\}$  corrisponde sopra  $F_0$  un fascio  $\{Z\}$  di genere 3 di curve  $Z$  che, contate quattro volte, sono curve  $C_i^3(A)$ . Queste ultime il cui gruppo di diramazione consta di  $4(2r-2)$  punti, sono di genere virtuale  $4r-3$ , sicché le curve  $Z$  risultano di genere  $r$ .

Abbiamo così dimostrato che:

*Per tutti i valori pari di  $p_g$ , esistono superficie algebriche 8-ple irregolari canoniche.*

**Topologia.** — *Interpretazione topologica dei covarianti di Beniamino Segre.* Nota di HEINRICH GUGGENHEIMER, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

I. Beniamino Segre ha introdotto, in una recente Memoria <sup>(1)</sup>, delle varietà covarianti d'immersione  $\tilde{P}_{V,i}$  di una sottovarietà algebrica  $P$  in una varietà algebrica  $V$ . Il Segre ha già messo in rilievo che questi covarianti, essendo definiti nell'anello d'intersezione della  $V$ , variano in una classe di omologia se la  $P$  varia in una tale classe, di modo che le classi d'omologia delle  $\tilde{P}_{V,i}$ , sono degli invarianti topologici della  $P$  in  $V$ . Ne discende il problema di dare una caratterizzazione topologica intrinseca di questi invarianti, e di collegarli con gli invarianti topologici noti. Proveremo in questa Nota che le classi d'omologia delle  $\tilde{P}_{V,i}$  sono i *quadrati dello Steenrod* della classe d'omologia della  $P$  in  $V$ .

Norman Steenrod ha definito i suoi  $i$ -quadrati nell'anello di coomologia di uno spazio topologico  $X$  <sup>(2)</sup>, per studiare le trasformazioni topolo-

(\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) BENIAMINO SEGRE, *Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche*. « Annali di Mat. » (4), 35, 1-128, (1953).

(2) NORMAN E. STEENROD, *Products of cocycles and extensions of mappings*. « Ann. of Math. », 48, 290-320, (1947); *Reduced powers of cohomology classes*. « Ann. of Math. », 56, 47-67, (1952).

giche di tali spazi. Essi sono stati studiati poi dal Bott <sup>(3)</sup> e dal Thom <sup>(4)</sup>, e sono i risultati ottenuti da quest'ultimo che ci serviranno per la dimostrazione e per le conseguenze che potremo trarre dal nostro risultato.

L' $i$ -quadrato  $Sq^i$  è un'operazione che associa ad una classe  $u^p$  di coomologia, di dimensione coomologica  $p$ , una classe  $Sq^i u^p$  di dimensione  $p + i$ . Se supponiamo che  $u^p$  sia il cociclo fondamentale di una sottovarietà  $U_{x-p}$ , di dimensione  $x - p$ , di una varietà differenziabile  $X_x$ , il Thom ha mostrato che le  $Sq^i u^p$  sono le ostruzioni <sup>(5)</sup> dei campi di vettori *normali* alla  $U_{x-p}$  nella  $X_x$ . Una condizione necessaria per l'esistenza di  $k$  campi di vettori normali alla  $U_{x-p}$  nella  $X_x$ , senza singolarità e linearmente indipendenti, è allora

$$Sq^p u = Sq^{p-1} u = \dots = Sq^{p-k+1} u = 0.$$

In più, il Thom ha mostrato che le ostruzioni dei campi di vettori normali sono identiche alle ostruzioni dei campi di vettori tangenziali nel caso di una varietà diagonale di un prodotto diretto ( $U_p$  diagonale di  $X_{2p} = U_p \times U_p$ ). Nel caso di una varietà a struttura complessa, queste ostruzioni sono le classi caratteristiche del Chern <sup>(6)</sup>, di modo che il teorema da provare implica una nuova dimostrazione del fatto, già contenuto nel lavoro del Segre <sup>(7)</sup>, che le alternanti delle classi  $P_{p \times p, i}$  sono le classi canoniche nel caso della diagonale di un prodotto diretto. Ma risulta in più che, nel caso di una varietà algebrica  $P$  immersa in una varietà algebrica  $V$ , non solo le classi (d'omologia) del Chern contengono dei cicli algebrici <sup>(8)</sup>, ma anche *le classi (d'omologia) caratteristiche dei campi normali sono classi algebriche d'omologia*.

2. La dimostrazione è basata sul seguente risultato del Thom: In ogni anello di coomologia, esiste un *unico* sistema d'operazioni  $Sq^i$ , associante ad una classe di dimensione  $p$  una di dimensione  $p + i$ , che soddisfa alle condizioni: (coefficienti mod. 2)

- a)  $Sq^0 u = u$ ,
- b)  $Sq^p u = u \cup u$ ,
- c)  $Sq^r u = 0$  se  $r > p$  o  $r < 0$ .

(3) RAOUL BOTT, *On symmetric products and the Steenrod squares*. «Ann. of Math.», 57, 579-590, (1953).

(4) RENÉ THOM, *Classes caractéristiques et  $i$ -carrés*. «C. R. Acad. Sci.», Paris, 230, 427-429, (1950); *Variétés plongées et  $i$ -carrés*. «C. R. Acad. Sci.», 230, 508-511 (1950); *Une théorie intrinsèque des puissances de Steenrod*, Colloque de Topologie de Strasbourg 1951. «Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.» (3), 69, 109-182 (1952).

(5) N. STEENROD, *The Topology of fibre bundles*, n. 32, Princeton 1951.

(6) Loc. cit. <sup>(5)</sup> n. 41.

(7) Loc. cit. <sup>(1)</sup> cap. VII.

(8) SHIING-SHEN CHERN, *On the characteristic classes of complex sphere bundles and algebraic varieties*. «Amer. J. Math.», LXXV, 565-597 (1953); W. V. D. HODGE, *The characteristic classes on algebraic varieties*. «Proc. London Math. Soc.», I, (3), 138-151 (1951).

$$d) Sq^i(u \cup v) = \sum Sq^j u \cup Sq^{i-j} v,$$

e)  $\delta^* Sq^i u = Sq^i \delta^* u$ , ove  $\delta^*$  è l'omomorfismo di cobordo della coomologia relativa.

Dobbiamo ora verificare queste cinque condizioni per le classi di coomologia *duali* alle classi d'omologia rappresentate dalle  $\tilde{P}_{V,i}$ . All'uopo ricordiamo che la dimensione del cociclo duale ad un ciclo di dimensione  $2p$  in uno spazio di dimensione  $2v$  è  $2(v-p)$ , e che il prodotto «cup» è duale all'intersezione. La condizione a) esprime per dualità la

$$\tilde{P}_{V,0} = P,$$

risultando dalle  $(5_{13})$  e  $(3_6)$  del lavoro citato sotto <sup>(1)</sup>. La condizione b) diventa per dualità, cioè sostituendo  $\tilde{P}_{V,v-i}$  a  $Sq^i u$  e l'intersezione in  $V$  al prodotto cup,

$$\tilde{P}_{V,v-p} = [P]_V^2$$

che non è altro che la  $(1_{23})$  del Segre. Nello stesso modo, la c) diventa identica al teorema del n. 22 del lavoro <sup>(1)</sup>, e la d) esprime ed il teorema dell'appartenenza (n. 18), e quello del prodotto (n. 20). Resta sola a verificare la condizione e).

Premettiamo a tal uopo il seguente risultato. Consideriamo in una varietà algebrica  $V$  il seguente sistema di operazioni  $Sq^i$ : per le classi algebriche prendiamo le operazioni duali a quelle del Segre, per le classi trascendenti prendiamo le operazioni dello Steenrod; allora il sistema totale verifica le condizioni a)-e) eppertanto è unico ed identico al sistema di tutte le operazioni dello Steenrod. Per provarlo, basta mostrare che  $\delta^*$  non muta cocicli algebrici in trascendenti e viceversa; o anche, in virtù della sequenza esatta d'omologia <sup>(9)</sup>, che ogni ciclo algebrico non omologo a zero in una sottovarietà algebrica è l'immagine di un ciclo algebrico della varietà intera  $V$ . Questo risultato è noto per le varietà effettive <sup>(10)</sup> e per i cicli (varietà virtuali) giacenti in una sezione iperpiana della  $V$  <sup>(11)</sup>.

Sia  $V$  una varietà algebrica,  $V'$  una sottovarietà effettiva,  $W = \sum c_i W_i$  una sottovarietà virtuale della  $V'$ , legate fra loro dalle operazioni d'immersione identica <sup>(9)</sup>:

$$i_{V'} : V' \rightarrow V,$$

$$i_{W_i} : W_i \rightarrow V'.$$

La dimensione complessa della  $W$  è  $w$ .

(9) S. EILENBERG-N. STEENROD, *Foundations of algebraic topology*, Princeton 1952; J. L. KELLEY and E. PITCHER, *Exact homomorphism sequences in homology theory*. «Ann. of Math.», 48, 682-709, (1947); H. GUGGENHEIMER, *Introduzione nella topologia algebrica*. «Mem. Accad. Sci. Ist.», (in stampa) Bologna.

(10) B. ECKMANN, *Quelques propriétés globales des variétés kählériennes*, «C. R. Acad. Sci.», 229, pp. 577-579, Paris (1949).

(11) S. LEFSCHETZ, *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Paris 1924.



La metrica dello spazio proiettivo ambiente induce sopra la  $V$  una forma quadratica esterna,  $\Omega$ , di rango massimo <sup>(12)</sup>. Da questa forma chiusa si deducono le forme analoghe  $i_{V'}^* \Omega$  sopra la  $V'$  e  $i_{W_i}^* i_{V'}^* \Omega$  sopra le  $W$ . L'integrale

$$\int_{W_i} [i_{W_i}^* i_{V'}^* \Omega]^w = m_i$$

(opportunamente normato) è l'ordine  $m$  della  $W_i$  <sup>(13)</sup> e, pertanto,  $\neq 0$ . Si ha dunque un cociclo in  $V$  non nullo sopra il ciclo fondamentale della  $W_i$ , onde quest'ultima non può essere omologa allo zero in  $V$ . Da questa proprietà dovuta all'Eckmann <sup>(10)</sup>, possiamo trarre la conseguenza da noi ricercata. La forma  $[i_{W_i}^* i_{V'}^* \Omega]^w$  corrisponde ovviamente al ciclo fondamentale della  $W_i$  nella dualità dell'Eckmann <sup>(10)</sup>. I gruppi di coomologia essendo lineari, la condizione necessaria e sufficiente affinché la classe duale dello Eckmann alla classe d'omologia della  $W$  sia nulla è allora la

$$\sum c_i m_i = 0.$$

Questa condizione risulta la stessa considerata in  $V'$  od in  $V$ , q.e.d.

La sequenza esatta d'omologia ci dice allora che ogni ciclo in  $V'$ , immagine d'un ciclo in  $V$ , è annullato dall'operatore  $\partial_*$ , duale di  $\delta^*$ . Poiché le classi del Segre sono anch'esse algebriche, la formola corrispondente alla  $e$ ) in omologia risulta ovviamente soddisfatta, riducendosi alla  $0 = 0$ .

3. Le operazioni dello Steenrod  $Sq^i$  che alterano la dimensione reale di un numero pari d'unità possono essere definite in generale soltanto per i coefficienti mod 2. Il nostro risultato mostra che, nel caso delle varietà algebriche, la definizione può essere estesa ai coefficienti interi.

ADDENDUM. - Correggendo le bozze di stampa, avvertiamo che il risultato principale di questa Nota può ottenersi dalla Nota di Edoardo Vesentini (seduta del 13 febbraio 1954) cominciando l'induzione completa per i quadrati di Steenrod di una ipersuperficie virtuale invece di cominciare col considerare le ostruzioni dei campi di vettori normali ad una ipersuperficie effettiva.

(12) W. V. D. HODGE, *The theory and applications of harmonic integrals*, Cambridge 1942.

(13) E. CARTAN, *Oeuvres complètes*, Partie I, vol. 2, pp. 1081-1126; S. S. CHERN, *Characteristic classes of hermitian manifolds*. « Ann. of Math. », 47, p. 119, (1946).

**Meccanica dei fluidi.** — *Sulla trasmissione termica per una piastra piana in corrente incompressibile non permanente; applicazione all'anemometria elettrica.* Nota di ALDO MUGGIA, presentata (\*) dal Corrisp. C. FERRARI.

1. Consideriamo una piastra piana investita da una corrente di fluido incompressibile con velocità parallela alla piastra stessa e variabile nel tempo (moto bidimensionale). Riferendoci a un sistema cartesiano  $xy$ , siano  $(0, 0)$  e  $(0, l)$  gli estremi della piastra e  $V(x, y, t)$  la velocità (diretta come l'asse  $x$ ) della corrente. Supponiamo che la piastra sia mantenuta a temperatura costante. Sia  $T$  la differenza fra la temperatura in un punto generico e la temperatura a distanza infinita dalla piastra. L'equazione dell'energia nello strato limite, nelle ipotesi consuete, è:

$$(1) \quad cV(x, y, t) \frac{\partial T}{\partial x} + c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

essendo  $c$  la capacità termica del fluido per unità di volume e  $\lambda$  il suo coefficiente di conducibilità;  $c$  e  $\lambda$  si suppongono costanti.

Semplifichiamo la (1) sostituendo alla  $V(x, y, t)$  una quantità  $V(t)$  dipendente soltanto dal tempo. Nel caso in cui il moto è permanente  $V(t)$ , che è allora costante, si può assumere proporzionale alla velocità indisturbata secondo un certo fattore che tiene conto dell'attenuazione della velocità nello strato limite; se il moto non è permanente, per il momento pensiamo  $V(t)$  ottenuta moltiplicando la velocità indisturbata per il medesimo fattore, riservandoci di ritornare sull'argomento quando una ricerca in corso avrà determinato l'attenuazione nello strato limite alle varie frequenze.

La (1) diventa

$$(2) \quad V(t) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Le condizioni al contorno sono:

$$T = 0 \quad \text{all' } \infty$$

$$T = T_f \text{ (costante) per } 0 \leq x \leq l, \quad y = 0.$$

Sia

$$V(t) = V_0 + \sum_{-\infty}^{+\infty} v_n e^{in\omega t}$$

con  $v_0 = 0$  e  $v_n, v_{-n}$  complessi coniugati. Supponiamo  $|v_n| \ll V_0$ .

(\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

Scriviamo anche

$$T(x, y, t) = T_0(x, y) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_n(x, y) e^{in\omega t}$$

con  $\vartheta_0 = 0$ ,  $\vartheta_n$  e  $\vartheta_{-n}$  complessi coniugati,  $|\vartheta_n| \ll T_0$ .

Trascurando i termini di grado maggiore di uno rispetto alle  $v_n$ ,  $\vartheta_n$ , si ha allora dalla (2):

$$(3) \quad V_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2}$$

$$(4) \quad V_0 \frac{\partial \vartheta_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial T_0}{\partial x} + in\omega \vartheta_n = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial y^2}.$$

Essendo la (2) di tipo parabolico, si ha  $T = 0$  nel semipiano  $x < 0$  e inoltre non si modifica nulla per  $x \leq l$  supponendo che sia  $T = T_f$  su tutto il semiasse positivo delle  $x$ . Inoltre, data la simmetria rispetto all'asse  $x$ , basterà considerare  $y \geq 0$ . Ci riduciamo così allo studio delle (3), (4) nel primo quadrante ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ) con le seguenti condizioni al contorno:

$$T_0 = 0, \quad \vartheta_n = 0 \quad \text{per } y = \infty \quad \text{e per } x = 0$$

$$T_0 = T_f, \quad \vartheta_n = 0 \quad \text{per } y = 0.$$

2. Cominciamo a risolvere la (3). Posto

$$z = \sqrt{\frac{V_0 c}{\lambda}} \frac{y}{\sqrt{x}},$$

la (3) e le relative condizioni al contorno si possono soddisfare con una opportuna funzione  $T_0 = T_0(z)$ . Infatti la (3) diventa:

$$-\frac{z}{2} \frac{dT_0}{dz} = \frac{d^2 T_0}{dz^2}$$

e quindi:

$$T_0 = T_f \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2/4} dz \right].$$

3. Per risolvere la (4) introduciamo le trasformate di Laplace rispetto a  $x$  delle  $v_n$ ,  $\vartheta_n$ :

$$\bar{v}_n(p, y) = \int_0^\infty e^{-px} v_n(x, y) dx$$

$$\bar{\vartheta}_n(p, y) = \int_0^\infty e^{-px} \vartheta_n(x, y) dx.$$

La (4) diventa allora:

$$\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 \bar{\vartheta}_n}{dy^2} - (V_0 p + i n \omega) \bar{\vartheta}_n = v_n T_f e^{-\sqrt{\frac{p V_0 c}{\lambda}} \cdot y}$$

e quindi, tenendo conto che deve essere  $\bar{\vartheta}_n = 0$  per  $y = 0$  e per  $y = \infty$ , si ha:

$$\bar{\vartheta}_n = i \frac{v_n T_f}{n \omega} \left[ e^{-\sqrt{\frac{p V_0 c}{\lambda}} \cdot y} - e^{-\sqrt{\frac{c V_0}{\lambda} \left( p + \frac{i n \omega}{V_0} \right)} \cdot y} \right]$$

in cui il segno meno davanti alla seconda radice vuol indicare che delle due radici quadrate (complesse) del radicando si deve prendere quella con parte reale negativa.

Di conseguenza:

$$\vartheta_n = i \frac{v_n T_f}{2 n \omega} \sqrt{\frac{V_0 c}{\pi \lambda}} \frac{y}{x^{3/2}} \left( 1 - e^{-\frac{i n \omega}{V_0} x} \right) e^{-\frac{V_0 c}{4 \lambda} \frac{y^2}{x}}.$$

4. Calcoliamo ora il calore sottratto alla piastra nell'unità di tempo. Esso è:

$$Q(t) = -2 \lambda \int_0^l \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx = Q_0 + \sum_{-\infty}^{+\infty} q_n e^{i n \omega t}$$

( $q_0 = 0$ ,  $q_n$  e  $q_{-n}$  coniugati). Si ha:

$$\begin{aligned} Q_0 &= -2 \lambda \int_0^l \left( \frac{\partial T_0}{\partial y} \right)_{y=0} dx = 4 T_f \sqrt{\frac{V_0 c \lambda}{\pi}} \\ q_n &= -2 \lambda \int_0^l \left( \frac{\partial \vartheta_n}{\partial y} \right)_{y=0} dx = -i \frac{v_n T_f}{n \omega} \sqrt{\frac{V_0 c \lambda}{\pi}} \int_0^l \frac{1 - e^{-\frac{i n \omega}{V_0} x}}{x^{3/2}} dx = \\ &= 2 v_n T_f \sqrt{\frac{c \lambda}{V_0}} \left\{ -\sqrt{\frac{V_0}{\pi n \omega l}} \left( \sin \frac{n \omega l}{V_0} + i \cos \frac{n \omega l}{V_0} - i \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} \left[ C \left( \sqrt{\frac{2 n \omega l}{\pi V_0}} \right) - i S \left( \sqrt{\frac{2 n \omega l}{\pi V_0}} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

essendo:

$$C(u) = \int_0^u \cos \left( \frac{\pi}{2} u^2 \right) du, \quad S(u) = \int_0^u \sin \left( \frac{\pi}{2} u^2 \right) du.$$

Nel caso del moto permanente appare che la dipendenza di  $Q$  dalla velocità indisturbata  $V_\infty$  è formalmente identica a quella data dalla formula di King <sup>(1)</sup> e il coefficiente di  $\sqrt{V_\infty}$  può essere reso uguale nei due casi con una scelta opportuna del coefficiente di attenuazione.

(1) L. V. KING, *On the convection of heat from small cylinders...* « Phil. trans. Roy. Soc. », London (A), vol. n. 214 (1914).



5. Sia ora

$$V^*(t) = V_0^* + \sum_{-\infty}^{+\infty} v_n^* e^{in\omega t}$$

( $v_0^* = 0$ ,  $v_n$  e  $v_{-n}$  coniugati) la velocità del fluido che corrisponderebbe a  $Q(t)$  se il legame calore-velocità fosse istante per istante quello che si ha nel caso di moto permanente. È allora:

$$\begin{aligned} Q_0 + \sum_{-\infty}^{+\infty} q_n e^{in\omega t} &= 4 T_f \sqrt{\frac{V^*(t) c \lambda l}{\pi}} = \\ &= 4 T_f \sqrt{\frac{V_0^* c \lambda l}{\pi}} + 2 T_f \sqrt{\frac{c \lambda l}{\pi V_0^*}} \sum_{-\infty}^{+\infty} v_n^* e^{in\omega t} \end{aligned}$$

(sempre trascurando, come già detto al n. 1, i termini piccoli del secondo ordine), e quindi:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} V_0^* &= V_0 \\ \frac{v_n^*}{v_n} &= -\frac{1}{n\gamma} (\sin n\gamma + i \cos n\gamma - i) + \\ &+ \sqrt{\frac{2\pi}{n\gamma}} \left[ C\left(\sqrt{\frac{2n\gamma}{\pi}}\right) - iS\left(\sqrt{\frac{2n\gamma}{\pi}}\right) \right] = f(n\gamma) \end{aligned} \right.$$

avendo posto  $\gamma = \frac{\omega l}{V_0}$ . Si ha:

$$f(n\gamma) = 1 - \frac{1}{6} in\gamma - \frac{1}{30} n^2 \gamma^2 + \dots$$

$$\frac{1}{f(n\gamma)} = 1 + \frac{1}{6} in\gamma + \frac{1}{180} n^2 \gamma^2 + \dots$$

6. Quanto ora esposto trova applicazione nello studio dell'anemometria elettrica, precisamente nello studio del comportamento di un anemometro a filo caldo a temperatura costante in corrente non permanente (filo normale alla corrente). La taratura del filo permette di conoscere qual'è, nel caso del moto permanente, il legame fra la velocità del fluido e il calore sottratto al filo dalla corrente. Tale legame varia se il moto non è permanente <sup>(2)</sup>. Ammettendo che ai fini di questa ricerca il filo caldo (schematizzabile con un cilindro indefinito) non si comporti in modo molto diverso dalla piastra piana, le formule dei numeri precedenti mostrano appunto che il legame fra  $Q(t)$  e  $V(t)$  è diverso da quello fra  $Q(t)$  e  $V^*(t)$ ; una volta determinata la  $V^*(t)$  servendoci della taratura del filo, dobbiamo mediante la (5) rica-

(2) P. VERNOTTE, *L'anémométrie des courants turbulents par le fil chaud*. «Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences», Paris, vol. n. 230 (1950).

vare la  $V(t)$  (questa correzione, come si è detto, vale solo per un anemometro a temperatura costante; per un anemometro a temperatura non costante è necessaria una ulteriore ricerca).

C'è da osservare però subito che queste correzioni usualmente sono piccole. Infatti le esperienze sui moti turbolenti dimostrano che le componenti della velocità a frequenza molto elevata sono trascurabili; e considerando ad esempio la frequenza di 20.000 Hz (che è fra le più elevate tra quelle che interessano nei moti turbolenti), ponendo cioè  $n\omega = 4\pi \cdot 10^4 \text{ sec}^{-1}$ , per  $l = \pi \cdot 10^{-5} \text{ m}$  (il che, se assumiamo la lunghezza della piastra uguale alla semicirconferenza del filo, corrisponde a un filo col diametro di 20  $\mu$ ) e  $V_0 = 10 \text{ m/sec}$ , si ha  $n\gamma \cong 0,4$ , il che dà luogo a un valore di  $f(n\gamma)$  molto prossimo a 1.

7. Esplicitiamo alcune delle formule correttive, fra quelle che più interessano nelle misure relative ai moti turbolenti, nell'ipotesi che l'anemometro a filo si comporti come la piastra.

Il valore efficace della componente turbolenta della velocità è:

$$\sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} |v_n|^2} = \sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} v_n v_{-n}} = \sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_n^* v_{-n}^*}{f(n\gamma) f(-n\gamma)}} = \sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} |v_n^*|^2 \left(1 + \frac{7}{180} n^2 \gamma^2 + \dots\right)}.$$

Se si hanno due fili caldi, che misurano rispettivamente le velocità

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n e^{in\omega t}, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} v_n e^{in\omega t},$$

il valor medio del prodotto di queste velocità è:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n v_{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n^* v_{-n}^* \left(1 + \frac{7}{180} n^2 \gamma^2 + \dots\right).$$

Se i due fili si trovano a distanza  $x$ , si può assumere<sup>(3)</sup> che il valor medio di questo prodotto sia anche il valor medio del prodotto della velocità in un punto all'istante  $t$  per la velocità nello stesso punto all'istante

$t + \frac{x}{V_0}$ . Posto:

$$R_x(x) = \overline{v(t) v\left(t + \frac{x}{V_0}\right)}$$

$$R_x^*(x) = \overline{v^*(t) v^*\left(t + \frac{x}{V_0}\right)}$$

(3) G. I. TAYLOR, *The spectrum of turbulence*, «Proc. of Roy. Soc.», London (A), n. 919, vol. 164 (1938).

(la sopralineatura significa « valor medio »), si ha allora:

$$\begin{aligned} R_x(x) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} |v_n|^2 e^{in\omega x/V_0} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |v_n^*|^2 e^{in\omega x/V_0} \left( 1 + \frac{7}{180} n^2 \gamma^2 + \dots \right) = \\ &= \overline{v^*(t) v^* \left( t + \frac{x}{V_0} \right)} + \frac{7}{180} \frac{l^2}{V_0^2} \overline{\frac{\partial v^*}{\partial t}(t) \frac{\partial v^*}{\partial t} \left( t + \frac{x}{V_0} \right)} + \dots = \\ &= \left( 1 - \frac{7}{180} l^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) R_x^*(x) + \dots \end{aligned}$$

Se si hanno tre fili, che misurano le velocità

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n e^{in\omega t}, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} v_n e^{in\omega t}, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} w_n e^{in\omega t},$$

il valor medio del prodotto di queste tre velocità è:

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} u_m v_n w_{-m-n} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_m^* v_n^* w_{-m-n}^*}{f(m\gamma) f(n\gamma) f(-m\gamma - n\gamma)} = \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} u_m^* v_n^* w_{-m-n}^* \left[ 1 + \frac{7}{180} (m^2 + n^2 + mn) \gamma^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Se  $x_1$  è la distanza fra il primo e il secondo filo e  $x_2$  la distanza fra il primo e il terzo, servendoci anche qui dell'ipotesi di Taylor, si ha che tale valor medio è:

$$\begin{aligned} S_x(x_1, x_2) &= \overline{v(t) v \left( t + \frac{x_1}{V_0} \right) v \left( t + \frac{x_2}{V_0} \right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} v_m v_n v_{-m-n} e^{in\omega x_1/V_0} e^{-i(m+n)\omega x_2/V_0} = \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} v_m^* v_n^* v_{-m-n}^* e^{in\omega x_1/V_0} e^{-i(m+n)\omega x_2/V_0} \left[ 1 + \frac{7}{180} (m^2 + n^2 + mn) \gamma^2 + \dots \right] = \\ &= \overline{v^*(t) v^* \left( t + \frac{x_1}{V_0} \right) v^* \left( t + \frac{x_2}{V_0} \right)} + \frac{7}{180} \frac{l^2}{V_0^2} \left[ \overline{\frac{\partial v^*}{\partial t}(t) \frac{\partial v^*}{\partial t} \left( t + \frac{x_1}{V_0} \right) v^* \left( t + \frac{x_2}{V_0} \right)} + \right. \\ &\quad \left. + \overline{v^*(t) \frac{\partial v^*}{\partial t} \left( t + \frac{x_1}{V_0} \right) \frac{\partial v^*}{\partial t} \left( t + \frac{x_2}{V_0} \right)} + \overline{\frac{\partial v^*}{\partial t}(t) v^* \left( t + \frac{x_1}{V_0} \right) \frac{\partial v^*}{\partial t} \left( t + \frac{x_2}{V_0} \right)} \right] + \dots = \\ &= \left[ 1 - \frac{7}{180} l^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] S_x^*(x_1, x_2) + \dots \end{aligned}$$

essendo

$$S_x^*(x_1, x_2) = \overline{v^*(t) v^* \left( t + \frac{x_1}{V_0} \right) v^* \left( t + \frac{x_2}{V_0} \right)}.$$

Possiamo ancora considerare ciò che Townsend chiama *skewness factor*, e cioè:

$$\frac{\overline{\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^3}}{\left[ \overline{\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \right]^{3/2}} = \frac{\overline{\left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^3}}{\left[ \overline{\left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2} \right]^{3/2}} = \frac{\overline{\left( \frac{\partial v^*}{\partial t} \right)^3} + \frac{7}{60} \frac{l^2}{V_0^2} \overline{\left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2} \right)^2} \frac{\partial v^*}{\partial t} + \dots}{\left[ \overline{\left( \frac{\partial v^*}{\partial t} \right)^2} + \frac{7}{180} \frac{l^2}{V_0^2} \overline{\left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2} \right)^2} + \dots \right]^{3/2}}.$$

**Fisica matematica.** — *Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica.* Nota II di RENATO NARDINI, presentata (\*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

5. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA II. — Poniamo

$$H(t, z, a) = G\left(t - \frac{z}{V}\right) + R_1(t, z, a) \cdot a^2$$

con  $G(\tau) \equiv 0$  per  $\tau < 0$ . Sostituendo in (1) e tenendo conto che  $G(t - z/V)$  soddisfa l'equazione (8), si ha che  $R_1(t, z, a)$  soddisfa l'equazione non omogenea

$$(18) \quad \frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial z^2} + a^2 \frac{\partial^3 R_1}{\partial t \partial z^2} + \frac{\partial^3 G(t - z/V)}{\partial t \partial z^2}$$

dove si può porre

$$\frac{\partial^3 G}{\partial t \partial z^2} = \frac{1}{V^2} G''' \left( t - \frac{z}{V} \right).$$

Le (2) e (3) forniscono per  $R_1(t, z, a)$  le seguenti condizioni iniziali

$$(19) \quad \lim_{t \rightarrow +0} R_1 = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial R_1}{\partial t} = 0 \quad (0 < z < +\infty)$$

e le seguenti condizioni al contorno

$$(20) \quad \lim_{z \rightarrow +0} R_1 = 0 \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} R_1 = 0 \quad (0 < t < +\infty).$$

Osserviamo ora che per  $z > 0$  la trasformata secondo Laplace rispetto alla variabile  $t$  della funzione  $G(t - z/V)$  e delle sue derivate parziali rispetto a  $t$  e a  $z$  fino al terz'ordine contengono il fattore  $e^{-\frac{z}{V}s}$ , per cui in un opportuno semipiano risultano (uniformemente rispetto a  $z$  se è  $z \geq z_1$ , con  $z_1 > 0$  arbitrario) dell'ordine  $O(s^{-k})$  con  $k > 0$  qualunque; di tale proprietà gode anche la trasformata di  $H(t, z)$  data dalla (7). Poiché è

$$R_1(t, z, a) = \frac{1}{a^2} \left[ H(t, z) - G\left(t - \frac{z}{V}\right) \right],$$

in base a teoremi noti <sup>(14)</sup> si ricava che, per  $z \geq z_1$ ,  $a > 0$ , le  $\frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 R_1}{\partial z^2}$  e  $\frac{\partial^3 R_1}{\partial t \partial z^2}$  sono L-trasformabili e nelle ultime due la derivazione rispetto a  $z$  è invertibile con la trasformazione.

Ricordando poi che la  $g(s)$  è, in un opportuno semipiano, dell'ordine  $O(s^{-2})$ , si deduce che per ogni valore di  $z$ , ivi compreso il valore zero, le trasformate di  $G(t - z/V)$  e di  $H(t, z)$  e quindi la loro differenza risultano nel detto semipiano dell'ordine almeno  $O(s^{-2})$ : per il citato teorema segue che nelle (20) l'operazione di limite è invertibile con la trasformazione di Laplace.

(\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(14) R. V. CHURCHILL, op. cit., cap. VI, teor. 8 e 9.



Applicando allora tale trasformazione e ponendo

$$\mathfrak{L}\{R_1(t, z, a)\} = r_1(s, z, a)$$

nel campo delle trasformate si ha l'equazione

$$(21) \quad (a^2 s + V^2) \frac{d^2 r_1(s, z, a)}{ds^2} - s^2 r_1(s, z, a) = -\frac{1}{V^2} \mathfrak{L}\left\{G''' \left(t - \frac{z}{V}\right)\right\}$$

con le condizioni al contorno

$$(22) \quad \lim_{z \rightarrow 0} r_1(s, z, a) = 0 \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} r_1(s, z, a) = 0.$$

La funzione di Green relativa al problema (21) e (22) è data da

$$\gamma(s, z, \zeta, a) = \frac{1}{2s\sqrt{a^2 s + V^2}} \left( e^{-\frac{s|z-\zeta|}{\sqrt{a^2 s + V^2}}} - e^{-\frac{s(z+\zeta)}{\sqrt{a^2 s + V^2}}} \right)$$

e perciò

$$(23) \quad r_1(s, z, a) = \frac{1}{V^2} \int_0^\infty \gamma(s, z, \zeta, a) \mathfrak{L}\left\{G''' \left(t - \frac{\zeta}{V}\right)\right\} d\zeta.$$

Con lo stesso procedimento applicato per giungere alla relazione (13) si ricava che in tutto il semipiano  $\Re(s) > \alpha$  (con  $\alpha > 0$ ) si ha

$$|\gamma(s, z, \zeta, a)| \leq \frac{1}{V|s|}$$

per qualunque valore attribuito ad  $a$  (compreso il valore zero). D'altra parte

$$\mathfrak{L}\left\{G''' \left(t - \frac{\zeta}{V}\right)\right\} = e^{-\frac{\zeta}{V}s} \mathfrak{L}\{G'''(t)\}$$

e, per le ipotesi poste sulla  $G'''(t)$ , esiste un numero positivo  $N$  tale che in tutto un opportuno semipiano risulta

$$\left| \mathfrak{L}\left\{G''' \left(t - \frac{\zeta}{V}\right)\right\} \right| \leq e^{-\frac{\zeta}{V}\Re(s)} \cdot \frac{N}{|s|^h} \quad (h > 0).$$

Nel detto semipiano si ha perciò, per qualunque valore attribuito ad  $a$

$$(24) \quad |r_1(s, \zeta, a)| \leq \frac{N}{V^3|s|^{1+h}} \int_0^\infty e^{-\frac{\zeta}{V}\Re(s)} d\zeta = \frac{N}{V^2\Re(s)} \frac{1}{|s|^{1+h}} \quad (h > 0).$$

Ora l'antitrasformata di  $\gamma(s, z, \zeta, a)$  è data da <sup>(15)</sup>

$$(25) \quad \Gamma(t, z, \zeta, a) = \frac{1}{2} * e^{-\frac{V^2}{a^2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^{2n}}{n! a^{3n}} \left\{ (z - \zeta)^n B_{n+1} \left( \frac{z - \zeta}{a}, t \right) - \right. \\ \left. - (z + \zeta)^n B_{n+1} \left( \frac{z + \zeta}{a}, t \right) \right\}$$

(15) Si veda op. cit. in <sup>(11)</sup> n. 2; vi si ponga  $u = \frac{z}{a}$ ,  $\xi = \frac{\zeta}{a}$ ,  $c = \frac{V^2}{a^2}$ .

e quindi si ha dalla (23)

$$(26) \quad R_I(t, z, a) = \frac{1}{V^2} \int_0^{Vt} \Gamma(t, z, \zeta, a) * G''' \left( t - \frac{\zeta}{V} \right) d\zeta;$$

si noti che nell'integrale si è posto come estremo superiore  $Vt$  al posto di  $+\infty$  in quanto è  $G'''(\tau) \equiv 0$  per  $\tau < 0$ .  $R_I(t, z, a)$  risulta perciò finito per ogni valore di  $a$  non nullo. Per calcolarne il limite per  $a \rightarrow 0$  basta, tenendo conto della (24), ripetere il ragionamento che si è introdotto dopo la formula (14) per portare a termine la dimostrazione del primo teorema; risulta cioè che anche in tale caso la trasformazione di Laplace è continua per  $a \rightarrow 0$  e il  $\lim_{a \rightarrow 0} R_I(t, z, a)$  è dato dall'antitrasformata di

$$\lim_{a \rightarrow 0} r_I(s, z, a) = \frac{1}{2V^3 s} \int_0^\infty \left( e^{-\frac{s|z-\zeta|}{V}} - e^{-\frac{s(z+\zeta)}{V}} \right) \mathcal{L} \left\{ G''' \left( t - \frac{\zeta}{V} \right) \right\} d\zeta$$

e quindi dalla funzione limitata

$$\frac{1}{2V^3} \int_0^\infty d\zeta \int_0^t \left[ \mathbf{I} \left( \tau - \frac{|z-\zeta|}{V} \right) - \mathbf{I} \left( \tau - \frac{z+\zeta}{V} \right) \right] G''' \left( t - \tau - \frac{\zeta}{V} \right) d\tau$$

dove col simbolo  $\mathbf{I}(t - \sigma)$  si intende la funzione  $F(t)$  definita come segue:

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t > \sigma \\ 0 & \text{per } t < \sigma. \end{cases}$$

Sviluppando i calcoli nell'espressione ottenuta si ha

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} R_I(t, z, a) &= \frac{1}{2V^3} \int_0^\infty d\zeta \int_{\frac{|z-\zeta|}{V}}^{\frac{z+\zeta}{V}} G''' \left( t - \tau - \frac{\zeta}{V} \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2V^3} \int_0^z \left[ G'' \left( t - \frac{z}{V} \right) - G'' \left( t - \frac{z}{V} - \frac{2\zeta}{V} \right) \right] d\zeta + \\ &+ \frac{1}{2V^3} \int_z^\infty \left[ G'' \left( t + \frac{z}{V} - \frac{2\zeta}{V} \right) - G'' \left( t - \frac{z}{V} - \frac{2\zeta}{V} \right) \right] d\zeta = \frac{z}{2V^3} G'' \left( t - \frac{z}{V} \right). \end{aligned}$$

Si può quindi rilevare che  $\lim_{a \rightarrow 0} R_I(t, z, a)$  è in generale diverso da zero per  $z < Vt$  e cioè al di qua del fronte d'onda della propagazione ondosa che si avrebbe se fosse  $a = 0$ , mentre è sempre nullo al di là del detto fronte d'onda: si conclude che la differenza fra il campo magnetico  $H(t, z)$  e il campo  $G(t - z/V)$ , che si avrebbe a conducibilità infinita, se è infinitesima con  $a^2$  al di qua del fronte d'onda, al di là di esso, dove tale differenza rappresenta esattamente tutto il campo magnetico, risulta rispetto ad  $a^2$  infinitesima di ordine superiore.

Posto ora

$$(27) \quad H(t, z) = G\left(t - \frac{z}{V}\right) + \frac{z}{2V^3} G''\left(t - \frac{z}{V}\right) \cdot a^2 + R_2(t, z, a) \cdot a^4,$$

estendendo le ipotesi sulle derivate successive della  $G(t)$  e procedendo analogamente, si vede che  $R_2(t, z, a)$  soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 R_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^3 R_2}{\partial t \partial z^2} + V^2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial z^2} + \frac{1}{V^4} \left[ \frac{z}{2V} G^v\left(t - \frac{z}{V}\right) - G^{iv}\left(t - \frac{z}{V}\right) \right]$$

con le solite condizioni iniziali e al contorno omogenee; applicando a tale problema la trasformazione di Laplace si ottiene

$$R_2(t, z, a) = \frac{1}{V^4} \int_0^{Vt} \Gamma(t, z, \zeta, a) * \left[ \frac{\zeta}{2V} G^v\left(t - \frac{\zeta}{V}\right) - G^{iv}\left(t - \frac{\zeta}{V}\right) \right] d\zeta.$$

Se poi si cerca il  $\lim_{a \rightarrow 0} R_2(t, z, a)$ , si riscontra che esso si può desumere dal limite della sua trasformata e, facendo i relativi calcoli si trova

$$\lim_{a \rightarrow 0} R_2(t, z, a) = \frac{z}{8V^5} \left[ \frac{z}{V} G^{iv}\left(t - \frac{z}{V}\right) - 3 G''' \left(t - \frac{z}{V}\right) \right].$$

Posto ancora

$$(28) \quad H(t, z) = G\left(t - \frac{z}{V}\right) + \frac{z}{2V^3} G''\left(t - \frac{z}{V}\right) + \frac{z}{8V^5} \left[ \frac{z}{V} G^{iv}\left(t - \frac{z}{V}\right) - 3 G''' \left(t - \frac{z}{V}\right) \right] + R_3(t, z, a) \cdot a^6,$$

si trova che  $R_3(t, z, a)$  soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 R_3}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 R_3}{\partial t \partial z^2} + V^2 \frac{\partial^2 R_3}{\partial z^2} + \frac{1}{V^6} \left[ \frac{z^2}{8V^2} G^{vii}\left(t - \frac{z}{V}\right) - \frac{7z}{8V} G^{vi}\left(t - \frac{z}{V}\right) + G^v\left(t - \frac{z}{V}\right) \right]$$

e così si può continuare pur di poter estendere alle derivate successive di  $G(t)$  le condizioni sufficienti per rendere valido il procedimento <sup>(16)</sup>.

(16) Un procedimento euristico per giungere rapidamente alle (27), (28) e successive è il seguente: considerando lo sviluppo della funzione  $h(s, z, a)$  in serie di MAC LAURIN relativa alla variabile  $a$ , si ponga

$$h(s, z, a) = g(s) e^{-\frac{z}{V}s} \left[ 1 + \frac{zs^2}{2V^3} a^2 + \frac{zs^3}{8V^5} \left( \frac{zs}{V} - 3 \right) a^4 + \dots \right];$$

per antitrasformare tale espressione si può assumere formalmente quale antitrasformata di  $e^{-\frac{z}{V}s} s^n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) la funzione impulsiva di ordine  $n$   $\delta^{(n)}(t - z/V)$  e valersi formalmente della relazione

$$\int_0^t \delta^{(n)}\left(t - \frac{z}{V} - \tau\right) G(\tau) d\tau = G^{(n)}\left(t - \frac{z}{V}\right).$$

Ciò è in accordo con quanto esposto sulle funzioni impulsive di ordine superiore nel trattato di VAN DER POL-BREMMER, *Operational Calculus*, Cambridge Univ. Press, 1950, Cap. V.

6. CONSIDERAZIONI SULLA FUNZIONE  $H_0(\tau, z)$ . — Da quanto precede si può osservare che la funzione  $H_0(\tau, z)$  definita dalla (5), ha il comportamento di una funzione impulsiva nei confronti di una  $G(t)$  che soddisfi alle condizioni enunciate.

Non sembra facile verificare tale proprietà direttamente sulla  $H_0(\tau, z)$ .

Qui, mediante una valutazione approssimata, mostreremo che la funzione  $H_0(\tau, z)$  per  $a$  molto piccolo è praticamente trascurabile per  $z > 3,79 V\tau$  e per  $0 < z < 0,41 V\tau$ . Tale risultato, col quale si profila quanto si è presunto, serve ad apportare una semplificazione nella formula (1) nel caso in cui non si possano applicare i teoremi I o II.

Supponendo  $z > 0$ , scriviamo a tale scopo per esteso

$$(29) \quad H_0(\tau, z) = e^{-\frac{V^2}{a^2}\tau} \left\{ \psi\left(\frac{z}{a}, \tau\right) + \frac{V^2 z}{a^3} \chi\left(\frac{z}{a}, \tau\right) + \right. \\ \left. + \sum_2^\infty \frac{V^2 z^n}{n! a^3} \int_0^\tau \frac{(\tau - \sigma)^{\left[\frac{n}{2}\right] - 1}}{\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1\right)!} \left\langle \psi\left(\frac{z}{a}, \sigma\right) \right. \right. \\ \left. \left. \chi\left(\frac{z}{a}, \sigma\right) \right\rangle d\sigma \right\}$$

dove il simbolo  $\langle$  va riferito al fattore  $\psi$  se  $n$  è pari, al fattore  $\chi$  se  $n$  è dispari. Si vuole esaminare il comportamento di tale funzione quando  $a$  tende a zero. Cominciamo ad osservare che il termine  $e^{-\frac{V^2}{a^2}\tau} \left\{ \psi + \frac{V^2 z}{a^2} \chi \right\}$ , ( $z > 0$ ), tende a zero per  $a \rightarrow 0$  e perciò lo considereremo trascurabile. Indicata con  $S$  la  $\sum_2^\infty$ , la si può scrivere sotto la forma

$$(30) \quad S = \sum_2^\infty \frac{\left(\alpha V^2 \tau \frac{1}{a^2}\right)^n \left(\frac{z^2}{\alpha^2 a^2 \tau}\right)^{n/2}}{n! \left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1\right)!} \int_0^\tau \frac{(\tau - \sigma)^{\left[\frac{n}{2}\right] - 1}}{\tau^{n/2}} \left\langle \psi\left(\frac{z}{a}, \sigma\right) \right. \\ \left. \chi\left(\frac{z}{a}, \sigma\right) \right\rangle d\sigma$$

dove  $\alpha$  è un numero positivo arbitrario <sup>(17)</sup>.

Si tenga presente che, essendo  $0 \leq \sigma \leq \tau$ , per  $n$  dispari

$$\frac{(\tau - \sigma)^{\left[\frac{n}{2}\right] - 1}}{\tau^{n/2}} \leq \frac{\tau^{\frac{n-1}{2} - 1}}{\tau^{n/2}} = \frac{1}{\tau^{3/2}},$$

per  $n$  pari

$$\frac{(\tau - \sigma)^{\left[\frac{n}{2}\right] - 1}}{\tau^{n/2}} \leq \frac{\tau^{\frac{n}{2} - 1}}{\tau^{n/2}} = \frac{1}{\tau}.$$

(17) La scomposizione del fattore che nella serie a secondo membro di (29) precede l'integrale è suggerita dal criterio di ottenere nella (32) esponenti di dimensione zero: il numero  $\alpha$  si intende di dimensioni zero.



Introducendo tali maggiorazioni nella (30) e tenendo conto che, per

$a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$ , è  $\sum_2^\infty a_n b_n \leq \sum_2^\infty a_n \sum_2^\infty b_n$ , si ha

$$(31) \quad S \leq \sum_2^\infty \frac{1}{n!} \left( \alpha V^2 \tau \frac{1}{a^2} \right)^n \sum_2^\infty \frac{\left( \frac{z^2}{\alpha^2 a^2 \tau} \right)^{n/2}}{\left( \left[ \frac{n}{2} \right] - 1 \right)!} \int_0^\tau \left[ \frac{1}{\tau} \psi \left( \frac{z}{a}, \sigma \right) + \frac{1}{\tau^{3/2}} \chi \left( \frac{z}{a}, \sigma \right) \right] d\sigma.$$

Ci serviamo anche delle seguenti maggiorazioni:

$$a) \quad \int_0^\tau \psi \left( \frac{z}{a}, \sigma \right) d\sigma = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{z}{a\sigma^{3/2}} e^{-\frac{z^2}{4a^2\sigma}} d\sigma = \\ = \frac{2a}{\sqrt{\pi}z} \int_0^\tau \sqrt{\sigma} \frac{z^2}{4a^2\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{4a^2\sigma}} d\sigma \leq \frac{2a\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}z} e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau}}$$

$$b) \quad \int_0^\tau \chi \left( \frac{z}{a}, \sigma \right) d\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{4a^2\sigma}} d\sigma = \\ = \frac{4a^2}{\sqrt{\pi}z^2} \int_0^\tau \sigma^{2/3} \frac{z^2}{4a^2\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{4a^2\sigma}} d\sigma \leq \frac{4a^2\tau^{3/2}}{\sqrt{\pi}z^2} e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau}}$$

$$c) \quad \sum_2^\infty \frac{A^{n/2}}{\left( \left[ \frac{n}{2} \right] - 1 \right)!} = \sum_1^\infty \frac{A^h}{(h-1)!} + \sum_1^\infty \frac{A^{1/2} A^h}{(h-1)!} = A(1 + \sqrt{A}) e^A \left( A = \frac{z^2}{\alpha^2 a^2 \tau} \right).$$

Maggiorando ulteriormente nella (31) la prima sommatoria con il relativo esponenziale, si conclude che è per  $\tau > 0$  <sup>(18)</sup>

$$(32) \quad H_0(\tau, z) \leq e^{-\frac{V^2}{a^2} \tau} \cdot e^{\frac{\alpha V^2 \tau}{a^2}} \cdot e^{\frac{z^2}{\alpha^2 a^2 \tau}} \cdot e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau}} \cdot \frac{z^2}{\alpha^2 a^2 \tau} \left( 1 + \sqrt{\frac{z^2}{\alpha^2 a^2 \tau}} \right) \frac{2a}{\sqrt{\pi}z} \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} + \frac{2a}{z} \right).$$

Da tale risultato si deduce che per  $a \rightarrow 0$  la funzione  $H_0(\tau, z)$  è trascurabile se è negativo l'esponente  $\mathfrak{G}$  di  $e$  che compare in essa e che è dato da

$$\mathfrak{G} = \frac{V^2}{a^2} \tau \left( -1 + \alpha + \frac{z^2}{\alpha^2 V^2 \tau^2} - \frac{z^2}{4V^2 \tau^2} \right).$$

Posto  $z = \lambda V\tau$ , con  $\lambda$  positivo arbitrario, si ha

$$\mathfrak{G} = \frac{V^2 \tau}{4a^2 \alpha^2} [(4 - \alpha^2) \lambda^2 + 4\alpha^2(\alpha - 1)];$$

(18) Per  $\tau \rightarrow 0$  è  $H_0(\tau, z) \rightarrow 0$  per ogni  $z > 0$ ; si veda a tale riguardo op. cit. in nota (1) n. 9.

perciò  $\mathcal{E}$  risulta negativo se è tale la forma lineare in  $\lambda$  racchiusa fra parentesi quadre: ciò avviene nei due seguenti casi:

$$A) \quad 0 < \alpha < 1, \quad \lambda^2 < \frac{4\alpha^2(1-\alpha)}{4-\alpha^2}$$

$$B) \quad 2 < \alpha, \quad \lambda^2 > \frac{4\alpha^2(1-\alpha)}{4-\alpha^2}.$$

(Per  $1 \leq \alpha \leq 2$  è certamente  $\mathcal{E} > 0$  per qualunque  $\lambda$ ).

Ora si può facilmente verificare che per  $0 < \alpha < 1$  la funzione  $\sqrt{\frac{4\alpha^2(1-\alpha)}{4-\alpha^2}}$  ha un solo massimo relativo nel punto  $\alpha_1 = 0,695$  e tale massimo vale  $0,41$ ,

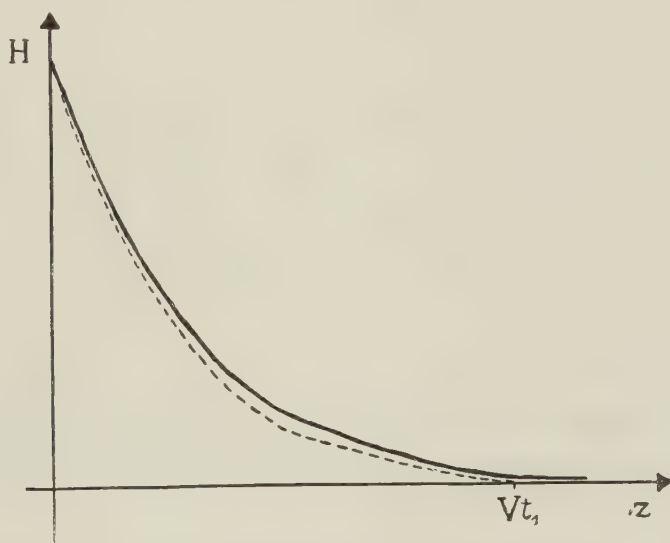


Fig. 1.

mentre per  $\alpha > 2$  la stessa funzione ha un solo minimo relativo nel punto  $\alpha_2 = 3,06$  del valore  $3,79$ . Ne risulta che  $\mathcal{E}$  è negativo per  $\lambda < 0,41$  e per  $\lambda > 3,79$  e perciò  $H_0(\tau, z)$  è trascurabile sia per  $z = \lambda V\tau < 0,41 V\tau$  che per  $z = \lambda V\tau > 3,79 V\tau$ . Si conclude che per  $a$  molto piccolo la (4) sarà, con buona approssimazione, sostituibile con

$$H(t, z) = \int_{\frac{z}{3,79 V}}^{\frac{z}{0,41 V}} G(t - \tau) H_0(\tau, z) d\tau$$

se è  $0 < \frac{z}{3,79 V} \leq t$ , mentre  $H(t, z)$  è praticamente nulla per  $t < \frac{z}{3,79 V}$ .

## 7. ESEMPIO. - Posto

$$G(t) = K t^3 \mathbf{I}(t) \quad (K \text{ costante})$$

tale funzione soddisfa alle ipotesi del teorema II ed è perciò

$$H(t, z) = K \left(t - \frac{z}{V}\right) \cdot \mathbf{I} \left(t - \frac{z}{V}\right) + R_1(t, z, a) \cdot a^2$$

con

$$\begin{aligned} R_1(t, z, a) &= \frac{6K}{V^2} \int_0^{Vt} d\zeta \int_0^t \Gamma(t - \tau, z, \zeta, a) \mathbf{I} \left(\tau - \frac{\zeta}{V}\right) d\tau \\ &= \frac{6K}{V^2} \int_0^{Vt} d\zeta \int_{z/V}^t \Gamma(t - \tau, z, \zeta, a) d\tau. \end{aligned}$$

Se  $a$  è molto piccolo, fissato un valore  $t_1$  di  $t$ , possiamo rappresentare l'andamento del campo magnetico  $H(t_1, z)$  in funzione della coordinata  $z$  mediante l'allegato diagramma indicativo, nel quale con la linea punteggiata si è rappresentata la funzione  $K \left(t_1 - \frac{z}{V}\right)^3 \mathbf{I} \left(t_1 - \frac{z}{V}\right)$  che dà il campo quando  $a = 0$ . Ammesso  $a$  molto piccolo, si può pensare  $R_1(t_1, z, a)$  molto prossimo al suo valore limite  $R_1(t_1, z, 0) = \frac{6K}{2V^3} \mathbf{I} \left(t_1 - \frac{z}{V}\right)$ .

**Fisica matematica.** — *Le soluzioni generali della statica a simmetria sferica nell'ultima teoria unitaria di Einstein.* Nota di FRANCO DE SIMONI, presentata (\*) dal Corrisp. B. FINZI.

1. Nell'ultima edizione <sup>(1)</sup> del libro *The meaning of Relativity* Einstein dà una nuova forma alle equazioni del campo unitario, modificando alcune di quelle poste nell'edizione precedente <sup>(2)</sup>, tornando così sostanzialmente alla formulazione già data con Straus nel 1946 <sup>(3)</sup>. È noto che il Papapetrou <sup>(4)</sup> iniziò nel 1948 lo studio del campo unitario a simmetria sferica, nella versione

(\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) A. EINSTEIN, *The meaning of Relativity*, 4<sup>a</sup> ed., Princeton Un. Press., pp. 133-165 (1953).

(2) A. EINSTEIN, idem, 3<sup>a</sup> ed., Princeton Un. Press, pp. 127-141 (1950). Si veda anche B. FINZI, *Su le equazioni di campo della teoria relativistica unitaria di Einstein*. Questi « Rend. », VIII, XIV, pp. 581-588 (1953).

(3) A. EINSTEIN-E. G. STRAUS, *A generalization of the relativistic theory of gravitation*, II. « Ann. of Math. », XLVII, 4, pp. 731-741 (1946).

(4) A. PAPAPETROU, *Static spherically symmetric solutions in the unitary field theory*. « Proc. Roy. Irish Ac. », LII A, 6, pp. 69-86 (1948).

del 1946, e diede la soluzione del caso magnetostatico; nel 1950 Wyman<sup>(5)</sup> risolse le equazioni trovate dal Papapetrou per il caso elettrostatico. Nel 1951 Bonnor<sup>(6)</sup> completò la trattazione di questi due casi e nel 1952 risolse il caso generale (elettromagnetostatico) con le equazioni del 1950. Lo scopo di questa Nota è di dare le soluzioni del caso generale secondo la versione del 1953. Seguendo il procedimento tracciato dai predetti Autori, si ottengono delle soluzioni, le quali includono, come casi particolari, tutte quelle già trovate.

2. Le equazioni del campo unitario nella teoria del 1953 sono:

$$(1) \quad g_{ik,l} - g_{sk} \Gamma_{il}^s - g_{is} \Gamma_{lk}^s = 0,$$

$$(2) \quad (\sqrt{-|g_{ik}|} g^{\dot{ik}})_{,s} = 0,$$

$$(3) \quad R_{ik} = 0,$$

$$(4) \quad R_{ik,l} + R_{kl,i} + R_{li,k} = 0,$$

in cui  $g_{ik}$  è il tensore fondamentale,  $\Gamma_{ik}^s$  sono i coefficienti di connessione, entrambi non simmetrici né emisimmetrici rispetto agli indici  $ik$ ;  $R_{ik}$  è il tensore contratto di curvatura, espresso da

$$R_{ik} = \Gamma_{ik,s}^s - \frac{1}{2} (\Gamma_{is,k}^s + \Gamma_{ks,i}^s) + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{st}^t - \Gamma_{it}^s \Gamma_{sk}^t;$$

inoltre, seguendo le notazioni di Einstein, il segno — sotto due indici indica simmetria, mentre il segno  $\dot{\phantom{x}}$  indica emisimmetria rispetto agli indici stessi. Facendo uso delle notazioni introdotte da Papapetrou, il tensore fondamentale è:

$$(5) \quad g_{11} = -\alpha, g_{22} = -\beta, g_{33} = -\beta \sin^2 \theta, g_{44} = \gamma, g_{14} = w, g_{23} = f \sin \theta,$$

e rimanenti tutte nulle, essendo  $\alpha, \beta, \gamma$  funzioni reali positive,  $w$  ed  $f$  funzioni reali o immaginarie di un'unica coordinata raggio  $r$ .

Per le (5), le (2) danno l'unica equazione

$$(6) \quad w (\beta^2 + f^2)^{1/2} (\alpha\gamma - w^2)^{-1/2} = l,$$

in cui  $l$  è una costante reale o immaginaria secondoché  $w$  è reale o immaginario. Dalla (6), posto

$$(7) \quad C = \frac{l^2}{l^2 + \beta^2 + f^2},$$

si ricava  $w$  in funzione dell'unica variabile  $r$ , tramite  $\alpha, \beta, \gamma$  ed  $f$ :

$$(8) \quad w^2 = \alpha\gamma C.$$

(5) M. WYMAN, *Unified field theory*. «Can. Journ. Math.», II, 4, pp. 427-439 (1950).

(6) W. B. BONNOR, *Static spherically etc.* «Proc. Roy. Soc.», 209, pp. 353-368 (1951); *The general static etc.* «Proc. Roy. Soc.», 210, pp. 427-434 (1952).



Si noti che, se  $w = 0$ , è  $l = 0$ , quindi per la (7) è  $C = 0$  e si ricade nel caso elettrostatico. Inoltre è noto che le (2) quindi la (8), equivalgono alla condizione che il vettore di Einstein,  $\Gamma_i = \Gamma_{ii}^i$ , sia nullo, per cui risolvendo le (1) si ottengono i seguenti valori delle componenti della connessione

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = \alpha'/2\alpha, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = A/2, \Gamma_{12}^3 = -B/2 \sin \theta, \Gamma_{13}^2 = (B \sin \theta)/2, \\ \Gamma_{14}^1 = \varepsilon A (\gamma C/\alpha)^{1/2}, \Gamma_{14}^4 = \gamma'/2\gamma + AC, \Gamma_{22}^1 = (fB - \beta A)/2\alpha, \\ \Gamma_{23}^3 = \cotg \theta, \Gamma_{23}^1 = (fA + \beta B) \sin \theta/2\alpha, \Gamma_{24}^2 = \Gamma_{34}^3 = -\varepsilon A (\gamma C/\alpha)^{1/2}/2, \\ \Gamma_{24}^3 = -\varepsilon B (\gamma C/\alpha)^{1/2}/2 \sin \theta, \Gamma_{33}^1 = (fB - \beta A) \sin^2 \theta/2\alpha, \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{34}^2 = \varepsilon B \sin \theta (\gamma C/\alpha)^{1/2}/2, \Gamma_{44}^1 = \gamma'/2\alpha + 2\gamma AC/\alpha, \end{array} \right.$$

in cui, con Papapetrou, si è posto:

$$(10) \quad A = \frac{\beta\beta' + ff'}{\beta^2 + f^2}, \quad B = \frac{\beta'f - \beta f'}{\beta^2 + f^2},$$

dove l'apice indica derivazione ordinaria rispetto ad  $r$ , ed  $\varepsilon = \pm 1$ . Derivando la (7) rispetto ad  $r$ , per la prima delle (10), si ha:

$$(11) \quad C' = 2AC(1 - C).$$

Per le (9), le (3) danno le seguenti tre equazioni:

$$(12) \quad [R_{11} \equiv] - A' - \frac{1}{2}(A^2 + B^2) + A \frac{\alpha'}{2\alpha} + \Gamma_{14}^4 \left( \frac{\alpha'}{2\alpha} - \Gamma_{14}^4 \right) - \Gamma_{14}^4{}_{,1} = 0,$$

$$(13) \quad [R_{22} \equiv R_{33} \cos^2 \theta \equiv] \left( \frac{fB - \beta A}{2\alpha} \right)' + \frac{fB - \beta A}{2\alpha} \left( \frac{\alpha'}{2\alpha} + \Gamma_{14}^4 \right) + B \frac{fA + \beta B}{2\alpha} + 1 = 0,$$

$$(14) \quad [R_{44} \equiv] \Gamma_{44}^1{}_{,1} + \frac{\gamma C}{2\alpha} (3A^2 + B^2) + \Gamma_{44}^1 \left( \frac{\alpha'}{2\alpha} + \Gamma_{14}^4 + A \right) = 0,$$

mentre le (4) si riducono all'unica condizione:

$$(15) \quad [R_{23} \cos \theta \equiv] \left( \frac{fA + \beta B}{2\alpha} \right)' - B \frac{fB - \beta A}{2\alpha} + \frac{fA + \beta B}{2\alpha} \left( \frac{\alpha'}{2\alpha} + \Gamma_{14}^4 \right) = c,$$

essendo  $c$  una costante reale o immaginaria, secondoché  $w$  ed  $f$  sono entrambi reali o immaginari. Per semplificare l'integrazione delle equazioni del campo è necessario sviluppare alcune considerazioni sulla componente  $\Gamma_{14}^4$  della connessione affine.

3. Dalle (8), (9) e (10) risulta

$$(16) \quad \frac{\alpha'}{2\alpha} - \Gamma_{14}^4 + A = \frac{z'}{z},$$

in cui si è posto per brevità di scrittura

$$(17) \quad z = [\alpha(\beta^2 + f^2)]^{1/2} [\gamma(1 - C)]^{-1/2}.$$

Facendo uso della (16), la (14) diventa

$$(18) \quad [z \Gamma_{44}^1]_{,1} + z \frac{\gamma C}{2\alpha} (3A^2 + B^2) = 0,$$

per cui, eliminando  $(3A^2 + B^2)/2$  fra la (18) e la (12), si ottiene:

$$(19) \quad [z \Gamma_{44}^1]_{,1} = z^2 \frac{\gamma C}{\alpha} \left[ \frac{A + \Gamma_{14}^4}{z} \right]_{,1}.$$

Dato che, per la (17), è  $z^2 \gamma C/\alpha = l^2$ , integrando la (19) e indicando con  $m$  una costante reale, si ha

$$(20) \quad z \Gamma_{44}^1 - \frac{l^2}{z} (A + \Gamma_{14}^4) = m.$$

Poiché dalle (9) discende l'identità

$$\Gamma_{44}^1 - \frac{\gamma C}{\alpha} A = \frac{\gamma}{\alpha} \Gamma_{14}^4,$$

la (20) dà

$$(21) \quad \Gamma_{14}^4 = \frac{m}{\beta^2 + f^2} \sqrt{\frac{\alpha(\beta^2 + f^2)}{\gamma(1 - C)}}.$$

Se si suppone  $m = 0$ , risulta  $\Gamma_{14}^4 = 0$  e, come ha dimostrato il Bonnor, si ricade nelle equazioni unitarie del 1950 (ponendo anche  $c = 0$ ); se si pone  $w = 0$ , si ottiene per  $\gamma'$  il valore trovato da Wyman

$$\gamma' = 2m \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta^2 + f^2}};$$

nel caso attuale invece la (21) fornisce

$$(22) \quad \gamma' = \frac{2m}{\beta^2 + f^2} \sqrt{\alpha\gamma(l^2 + \beta^2 + f^2)} - 2\gamma AC.$$

4. Eseguendo, come nei lavori citati, opportune combinazioni lineari delle equazioni del campo, si giunge alle equazioni risolventi. Dalla

$$-R_{11} - \frac{\alpha}{\gamma} R_{44} = 0,$$

ricordando la (11) e con calcoli elementari, si ottiene

$$(23') \quad (1 - C) \left[ A' + \frac{1}{2} (A^2 + B^2) - \frac{A}{2} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\gamma'}{\gamma} \right) - A^2 C \right] = 0,$$

la quale, dato che  $1 - C = (\beta^2 + f^2)/(l^2 + \beta^2 + f^2)$  è necessariamente non nullo, altrimenti A e B perdono significato, dà l'equazione

$$(23) \quad A' + \frac{1}{2} (A^2 + B^2) - \frac{A}{2} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\gamma'}{\gamma} \right) - A^2 C = 0.$$

Operando invece le combinazioni lineari

$$-\frac{2\alpha\beta}{\beta^2+f^2}R_{22}+\frac{2\alpha f}{\beta^2+f^2}(R_{23}\operatorname{cosec}\theta-c)=0,$$

$$\frac{2\alpha f}{\beta^2+f^2}R_{22}+\frac{2\alpha\beta}{\beta^2+f^2}(R_{23}\operatorname{cosec}\theta-c)=0,$$

si ottengono rispettivamente le equazioni:

$$(24) \quad A' + A^2 - \frac{A}{2} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\gamma'}{\gamma} - 2AC \right) - \frac{2\alpha(\beta+fc)}{\beta^2+f^2} = 0,$$

$$(25) \quad B' + AB - \frac{B}{2} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\gamma'}{\gamma} - 2AC \right) - \frac{2\alpha(\beta c - f)}{\beta^2+f^2} = 0.$$

Le (22), (23), (24) e (25) sono equivalenti alle (12), (13), (14) e (15), quindi, insieme con la (8), determinano il tensore fondamentale del campo statico unitario a simmetria sferica. Seguendo ancora il metodo di Wyman e Bonnor, introduciamo le variabili ausiliarie  $q$  e  $p$ , funzioni di  $r$ , con le posizioni

$$(26) \quad e^q = f + i\beta, \quad e^p = f - i\beta,$$

dalle quali, derivando si ha  $q' = A + iB$ ,  $p' = A - iB$ , per cui  $q'$  e  $p'$  sono complesse se  $w$  ed  $f$  sono reali, mentre risultano reali se  $w$  ed  $f$  sono immaginari. Moltiplicando allora la (25) per  $i$  e una volta sommandola e una volta sottraendola dalla (24) si ottengono rispettivamente le equazioni <sup>(7)</sup>

$$(28) \quad q'' + q' \left[ A - \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\gamma'}{\gamma} \right) + AC \right] - \frac{2\alpha(c-i)e^q}{\beta^2+f^2} = 0,$$

$$(29) \quad p'' + p' \left[ A - \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\gamma'}{\gamma} \right) + AC \right] - \frac{2\alpha(c+i)e^p}{\beta^2+f^2} = 0.$$

Supponiamo per ora che  $m$  non sia nullo. Dalla (22) ricaviamo il valore di  $\alpha$ :

$$(30) \quad \alpha = \frac{(\gamma' + 2\gamma AC)^2}{4m^2\gamma} \frac{(\beta^2 + f^2)^2}{l^2 + \beta^2 + f^2},$$

(7) Per comodità diamo qualche elemento necessario per giungere alle equazioni risolvibili. Per la (9) e la (11), dalle (12) e (14) si ha:

$$R_{11} = -\left(\frac{\gamma'}{2\gamma}\right)' + \frac{\gamma'}{2\gamma} \left(\frac{\alpha'}{2\alpha} - \frac{\gamma'}{2\gamma}\right) + AC \left(\frac{\alpha'}{2\alpha} - \frac{\gamma'}{\gamma}\right) - A'(1+C) - 3A^2C^2 + 2A^2C - \frac{1}{2}(A^2+B^2) + A \frac{\alpha'}{2\alpha} =$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} R_{44} = \left(\frac{\gamma'}{2\gamma}\right)' - \frac{\gamma'}{2\gamma} \left(\frac{\alpha'}{2\alpha} - \frac{\gamma'}{2\gamma}\right) + AC \left(\frac{\gamma'}{2\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) + 2A'C + 2A^2C^2 - A^2C + \frac{C}{2}(A^2+B^2) + A \frac{\gamma'}{2\gamma} =$$

dalle quali è immediato ricavare la (23'). Le (24) e (25) sono diretta conseguenza delle (13) e (15).

da cui discende che <sup>(8)</sup>

$$(31) \quad A - \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\gamma'}{\gamma} \right) + AC = - \frac{d}{dr} \left\{ \log \left[ \frac{d}{dr} \log \gamma (1-C) \right] \right\}.$$

Operando allora il seguente cambiamento di variabili

$$(32) \quad x = \log \gamma (1-C), \quad q = y - \log \gamma (1-C), \quad p = z - \log \gamma (1-C),$$

le (28) e (29) diventano

$$(33) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{c-i}{2m^2} e^y = 0, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{c+i}{2m^2} e^z = 0,$$

le quali sono identiche alle equazioni già trovate dal Bonnor <sup>(9)</sup>. I loro integrali generali sono i seguenti

$$(34) \quad e^y = \gamma (1-C) e^q = - \frac{m^2 h \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} h^{1/2} x + a \right)}{c-i},$$

$$(35) \quad e^z = \gamma (1-C) e^p = - \frac{m^2 k \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} k^{1/2} x + b \right)}{c+i},$$

in cui  $h, k, a, b$  sono costanti complesse che debbono soddisfare alcune condizioni. Infatti bisogna scegliere  $h$  e  $k$  in modo tale che le (34) e (35) verifichino la (23). Operando in modo analogo <sup>(10)</sup> al Bonnor si trova che:

(8) Infatti, essendo per le (10) e (11)

$$2AC = [\log (1-C)]'$$

e risultando dalla (30)

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 2 [\log (\gamma' + 2\gamma AC)]' - \frac{\gamma'}{\gamma} + 2A + 2AC,$$

si ricava subito la (31).

(9) Cfr. primo loco cit. nota <sup>(6)</sup>, pp. 358 e sgg. Le (33) risultano identiche alle (3.18) e (3.23), a meno della sostituzione di  $-c$  al posto di  $c$ .

(10) Dalla espressione di  $\alpha'/\alpha$  [cfr. nota <sup>(8)</sup>] la (23) assume la forma

$$A' + \frac{1}{2} (B^2 - A^2) - A [\log (\gamma' + 2\gamma AC)]' - 2A^2 C = 0,$$

per cui, risultando dalle (26):  $A' = (q'' + q'')/2$ ,  $A = (q' + p')/2$ ,  $iB = (q' - p')/2$ , sostituendo queste espressioni nella precedente ed eliminando  $q''$  e  $p''$  mediante le (28) e (29), si ottiene:

$$q'^2 + p'^2 + 2(q' + p') [\log \gamma (1-C)]' - \\ - m^{-2} \gamma (1-C) [\log \gamma (1-C)]'^2 [(c-i)e^q + (c+i)e^p] = 0.$$

Se inoltre si integra una volta le (33) e si torna alle variabili  $q, p, \gamma$  ed  $r$ , si giunge a due integrali primi, i quali sommati danno una equazione il cui primo membro è identico a quello della precedente, mentre il secondo è:  $(h + k - 2) [\log \gamma (1-C)]'^2$ ; pertanto, onde le due equazioni coincidano, deve essere  $h + k - 2 = 0$ , dato che  $\gamma (1-C)$  non è costante. Se inoltre si sottraggono i predetti integrali primi si ottiene l'equazione:

$$4iAB + 4iB [\log \gamma (1-C)]' + 2im^{-2} \gamma (1-C) (\beta c - f) [\log \gamma (1-C)]'^2 = (h - k) [\log \gamma (1-C)]'^2,$$

il cui primo membro è immaginario se  $w$  ed  $f$  sono reali, reale nel caso opposto.



$h + k = 2$ ,  $h - k$  è reale o immaginario secondoché  $f$  è rispettivamente immaginario o reale. Pertanto se  $w$  ed  $f$  sono reali,  $h$  e  $k$  risultano complesse coniugate del tipo  $1 \pm ih_i$  e la soluzione è

$$(36) \quad \begin{cases} f + i\beta = -\frac{m^2 h e^{-x} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} h^{1/2} x + a\right)}{c - i}, \\ \alpha = \frac{e^x}{4m^2} \left(\frac{dx}{dr}\right)^2, \quad \gamma = \frac{e^x}{1 - C}, \\ w = \frac{\varepsilon l}{2m} \frac{e^x}{\sqrt{\beta^2 + f^2}} \frac{dx}{dr}, \end{cases}$$

con  $l$  reale ed  $x$  funzione arbitraria, ma derivabile, di  $r$ ; se  $l = 0$  le (36) si riducono alla soluzione data da Wyman.

Se invece si suppone che  $w$  ed  $f$  siano immaginari, le costanti  $h$  e  $k$  risultano reali; inoltre, perché  $e^a$  ed  $e^b$  siano immaginari, le costanti  $a$  e  $b$ , come ha osservato Bonnor, debbono soddisfare alle condizioni seguenti:

$$(37) \quad \begin{cases} h > 0 & a = a' + n'\pi i & ; & h < 0 & a = ia''; \\ k > 0 & b = b' + n''\pi i & ; & k < 0 & b = ib''; \end{cases}$$

con  $a', a'', b', b''$  reali arbitrari,  $n'$  ed  $n''$  interi. In conseguenza i valori di  $f$  e  $\beta$  risultano espressi da:

$$(38) \quad \begin{cases} f = -\frac{1}{2} m^2 e^{-x} \left\{ \frac{h \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} h^{1/2} x + a\right)}{c - i} + \frac{k \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} k^{1/2} x + b\right)}{c + i} \right\}, \\ i\beta = -\frac{1}{2} m^2 e^{-x} \left\{ \frac{h \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} h^{1/2} x + a\right)}{c - i} - \frac{k \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} k^{1/2} x + b\right)}{c - i} \right\}, \end{cases}$$

mentre  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $w$  hanno ancora i valori dati dalle (36), con  $l$  immaginario e  $h + k = 2$  ( $h$  e  $k$  reali non nulli). Se infine si suppone che  $h$  (oppure  $k$ ) sia nullo, integrando di nuovo le (33) si ottengono le seguenti espressioni per  $f$  e  $\beta$  rispettivamente:

$$(39) \quad \begin{cases} \left\{ f = -m^2 e^{-x} \left\{ \frac{\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} x + a' + \frac{1}{2} n'\pi i\right)}{c - i} - \frac{2}{(c + i)(x + b')^2} \right\}, \right. \\ \left. i\beta = -m^2 e^{-x} \left\{ \frac{\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} x + a' + \frac{1}{2} n'\pi i\right)}{c - i} + \frac{2}{(c + i)(x + b')^2} \right\}; \right. \\ \left\{ f = -m^2 e^{-x} \left\{ \frac{\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} x + b' + \frac{1}{2} n''\pi i\right)}{c + i} - \frac{2}{(c - i)(x + a')^2} \right\}, \right. \\ \left. i\beta = m^2 e^{-x} \left\{ \frac{\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} x + b' + \frac{1}{2} n''\pi i\right)}{c + i} + \frac{2}{(c - i)(x + a')^2} \right\}. \right. \end{cases}$$

Le precedenti soluzioni per  $l = 0$  si riducono a quelle date dal Bonnor.

5. Supponiamo che la costante  $m$  sia nulla. Per la (21) è  $\Gamma_{14} = 0$ , cioè, indicando con  $c_1$  una costante reale arbitraria, dalle (9) e da quanto precede, risulta:

$$(40) \quad \gamma(1 - C) = c_1.$$

Alla costante  $c_1$ , per il carattere tensoriale di  $g_{ik}$ , è lecito dare il valore unitario, per cui la (40), per  $w = 0$ , dà  $\gamma = 1$ , come nelle trattazioni di Wyman e di Bonnor.

Per quanto riguarda l'integrazione delle (28) e (29), che sono tuttora valide, rimandiamo al lavoro già citato del Bonnor<sup>(11)</sup>, riportando qui le soluzioni:

$$(41) \quad \gamma = (1 - C)^{-1}, \quad \alpha = (\beta^2 + f^2) \left( \frac{dx}{dr} \right)^2, \quad w = \epsilon l \frac{dx}{dr},$$

le quali valgono per  $w$  ed  $f$  reali o immaginari, purché  $l$  sia rispettivamente reale o immaginario, mentre:

a) se  $w$  e  $f$  sono reali, risulta

$$(42) \quad f + i\beta = -h(c - i)^{-1} \operatorname{sech}^2(h^{1/2}x + a),$$

dato che  $h = -k = i h_0$  ( $h_0 \neq 0$ ); se invece si suppone  $h = k = 0$ , la soluzione è data da

$$(43) \quad f + i\beta = (c - i)^{-1} (x + a)^{-2}.$$

Le precedenti soluzioni, per  $w = 0$ , coincidono con quelle trovate da Wyman;

b) se  $w$  ed  $f$  sono immaginari, risulta

$$(44) \quad \begin{cases} f = -\frac{h}{2} \left\{ \frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{h}x + a)}{c - i} - \frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{-h}x + b)}{c + i} \right\}, \\ i\beta = -\frac{h}{2} \left\{ \frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{h}x + a)}{c - i} + \frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{-h}x + b)}{c + i} \right\}, \end{cases}$$

se  $h (= -k)$  è reale e diverso da zero, però le costanti  $a$  e  $b$  debbono ancora soddisfare le (37), tenendo conto che  $h$  e  $k$  sono, nel caso attuale, discordi.

Se infine si suppone che  $h$  sia nullo, la soluzione è:

$$(45) \quad \begin{cases} f = \frac{1}{2} \{ (c - i)^{-1} (x + a)^{-2} + (c + i)^{-1} (x + b)^{-2} \}, \\ i\beta = \frac{1}{2} \{ (c - i)^{-1} (x + a)^{-2} - (c + i)^{-1} (x + b)^{-2} \}, \end{cases}$$

con  $a$  e  $b$  reali ed arbitrarie.

Concludendo le (36), (38), (39); le (42), (43), (44), (45) associate con la (41), rappresentano tutte le possibili soluzioni del campo elettromagnetostatico a simmetria sferica, secondo la teoria einsteiniana del 1953. Se in esse si pone  $m = 0$  e  $c = 0$  si ottengono tutte le soluzioni (dello stesso tipo di campo) con la teoria unitaria del 1950.

(11) Cfr. loco secundo cit., nota (6).

**Fisica.** — *Osservazioni critiche circa nuove soluzioni del paradosso degli orologi.* Nota di MARIO GALLI, presentata (\*) dal Socio G. ABETTI.

1. Il paradosso relativistico degli orologi ha avuto da Einstein e da Tolman<sup>(2)</sup> una soluzione che è stata generalmente accettata. Perciò desta alquanto stupore il fatto che recentemente alcuni autori<sup>(2)</sup> contestino del tutto tale soluzione oppure stimino conveniente la ricerca di soluzioni diverse. Data l'importanza della questione riteniamo opportuno discutere alcuni criteri che hanno ispirato le Note recenti ed indicare quella che a noi sembra la via migliore.

Le premesse essenziali alle quali si uniforma questo studio sono in breve le seguenti:

1° Non si deve alterare il senso originario della questione. In caso diverso si potrà forse risolvere un problema interessante, ma si causerà confusione se si avrà la pretesa di avere con ciò risolto il paradosso degli orologi. Questa confusione non è evitata con cura sufficiente in alcune delle Note citate.

2° L'uso del principio di equivalenza della relatività generale non è indispensabile per la risoluzione del paradosso, ma è conveniente per una ulteriore chiarificazione.

3° Bisogna fare attenzione non solo ai dati del problema originario, dal quale deriva il paradosso, validi per il sistema costantemente inerziale  $Oxyz$ , ma soprattutto alla debita trascrizione di questi dati per il problema che si pone con riferimento al sistema mobile  $O'x'y'z'$ . Sull'esattezza di questa trascrizione pochi si soffermano come conviene.

2. Il paradosso nasce dalla soluzione di un problema che si può enunciare così: Sono dati due orologi  $\alpha$  ed  $\alpha'$  di identica costituzione fisica, inizialmente coincidenti ed indicanti la stessa ora. Mentre  $\alpha$  rimane costantemente immobile rispetto ad un dato sistema inerziale  $Oxyz$  (ad esempio fisso nell'origine  $O$ )  $\alpha'$  compie un viaggio di andata e ritorno da  $O$  ad  $A$  e quindi da  $A$  ad  $O$ . Il moto sia prevalentemente uniforme rettilineo. Ciò posto, se, all'atto della seconda coincidenza, l'orologio fisso segna il tempo,  $T$ , chiediamo: Quale tempo deve registrare l'orologio mobile?

(\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) A. EINSTEIN, «Naturwiss.», 6, p. 697 (1918); R. TOLMAN, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, p. 192.

(2) E. H. HILL, «Phys. Rev.», 72, p. 236 (1947); E. A. MILNE e WITHROW, «Phil. Mag.», 40, p. 1244 (1949); K. JELLINEK, *Weltsystem, Weltäther und die Relativitätstheorie*. Basel, p. 99 e 288 (1949); E. H. IVES, «Nature», 168, p. 246 (1951); MAC CREA, «Nature», 167, p. 80 (1951); R. SCHLEGEL, «Phys. Rev.», 87, p. 198 (1952).

Il problema è certamente legittimo, poiché i dati rispettivi si riferiscono ad una esperienza concettualmente possibile.

Applicando le trasformazioni di Lorentz ed i corollari che da esse immediatamente ne discendono, così si risponde al quesito: L'orologio  $\alpha'$  deve registrare all'atto della seconda coincidenza il tempo  $T'$  legato a  $T$  della relazione

$$(1) \quad T' = T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Cioè l'orologio mobile rimane indietro rispetto all'orologio fisso.

Per quale ragione gli avversari della teoria della relatività hanno considerato paradossale il risultato espresso dalla (1)? Questa esprime un risultato che appare a prima vista assai inverosimile. L'incredulità aumenta quando, come ha fatto il Langevin <sup>(3)</sup>, tale rallentamento si trasferisce anche ai fenomeni vitali, per cui si conclude che (a parte la praticità dell'esperimento) un essere vivente potrebbe prolungare la sua vita viaggiando!

Ma la ripugnanza psicologica ad accettare una conclusione cosiffatta non deve essere confusa con una difficoltà di ordine logico.

Questa nasce invece quando il risultato espresso dalla (1) si confronta con alcune affermazioni della teoria della relatività. Tuttavia l'obiezione non è formulata da tutti allo stesso modo ed è chiaro che, se vogliamo evitare equivoci, di questa diversità occorre tener conto. Ne consegue immediatamente che non è affatto giustificato sostenere che il paradosso debba essere risolto con i metodi della relatività ristretta ovvero con quelli della relatività generale. Una preferenza incondizionata non ha senso. Se l'obiezione è diretta contro la relatività ristretta è evidente che la risoluzione deve ragionevolmente ricercarsi nell'ambito della relatività ristretta. Se invece l'obiezione è rivolta contro la relatività generale (come taluni fanno) bisognerà necessariamente ricercare la risoluzione nell'ambito di quest'ultima.

Per un esame critico delle Note dianzi citate conviene soffermarsi soprattutto sull'obiezione che è direttamente rivolta contro la relatività ristretta.

Essa può essere formulata in questo modo. Procuriamo di prevedere il risultato dell'esperienza concettuale prima descritta prendendo come sistema di riferimento il sistema  $O' x' y' z'$ , quello col quale possiamo immaginare l'orologio  $\alpha'$  costantemente solidale. Se il movimento di  $\alpha'$  rispetto ad  $\alpha$  è prevalentemente uniforme e rettilineo altrettanto potremo dire del moto di  $\alpha$  rispetto ad  $\alpha'$ .

Anche riferendosi al nuovo sistema  $O' x' y' z'$ , finché il moto di  $\alpha$  è uniforme, sono applicabili le trasformazioni di Lorentz. Per conseguenza, se, prima essendo  $T$  la durata dell'esperienza conformemente alle indicazioni dell'orologio  $\alpha$ , si prevedeva per l'indicazione di  $\alpha'$  un tempo uguale a

(3) P. LANGEVIN, « Scientia », 3 (1911).



$T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , così ora sembra logico che, essendo  $T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  la durata della esperienza conformemente alle indicazioni dell'orologio  $\alpha'$ , si debba prevedere che  $\alpha$  registri il tempo:

$$(2) \quad T' = T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = T\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Ma questa previsione è ovviamente in contraddizione con i dati del problema.

3. Alcuni hanno dubitato dell'autenticità della conseguenza espressa dalla formola (1) <sup>(4)</sup>. Ma essa non può essere in alcun modo revocata in dubbio, almeno quando il moto di  $\alpha'$  rispetto ad  $\alpha$  è prevalentemente uniforme rettilineo, intendendo con ciò un moto rettilineo uniforme per un tempo  $T$  interrotto a metà da un moto non uniforme necessario per l'inversione della velocità ed avente una durata  $\tau$ , sufficientemente piccola rispetto a  $T$ .

In queste condizioni infatti, durante il moto uniforme rettilineo di andata e ritorno l'orologio mobile progredisce di  $T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Questo è necessariamente vero se ammettiamo le trasformazioni di Lorentz. Durante l'inversione del moto (che avviene nel tempo  $\tau$ ) il progresso dell'orologio mobile  $\tau'$  ci è ignoto, ma, se concepiamo una successione di esperienze nelle quali l'inversione del moto avviene secondo le stesse modalità, mentre  $T$  tende ad infinito, possiamo dire che al limite  $\tau'$  diviene trascurabile rispetto a  $T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  e possiamo pertanto scrivere:

$$(1') \quad \lim_{T \rightarrow \infty} (T' + \tau') = T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Se l'equazione (1) è intesa conformemente a questa precisazione, essa è una ineluttabile conseguenza delle trasformazioni di Lorentz.

4. In primo luogo dobbiamo fare attenzione ad una domanda: Esiste per il sistema  $O' x' y' z'$  un problema identico a quello enunciato per il sistema  $O x y z$ ?

Il dato essenziale del problema primitivo è una descrizione cinematica, con riferimento al sistema  $O x y z$ , del moto di  $\alpha'$  rispetto ad  $\alpha$ . Nel problema

(4) R. MARCOLONGO, *Relatività*, p. 69, Messina (1923). Marcolongo considera la conseguenza dedotta da Langevin come una fantasia da romanzieri. Egli esprime il suo giudizio in una nota marginale ed è perciò verosimile che non vi abbia molto riflettuto. Ma la conseguenza, spogliata di tutti gli ornamenti letterari, è certo autentica. Perciò ha torto il Marcolongo a negarla. Quello che poi egli dice alla fine della Nota è decisamente contrario al principio di relatività. Il rallentamento degli orologi è estensibile a tutte le durate, quindi anche a quelle relative alle trasformazioni biologiche. L'opinione di Marcolongo è condivisa anche da altri autori, specialmente italiani.

omologo enunciato con riferimento al sistema  $O' x' y' z'$  dovremo daré la descrizione cinematica del moto di  $\alpha$  rispetto ad  $\alpha'$ . Teniamo presente che è proprio l'esistenza di questo problema che dà luogo al paradosso, occorre perciò fare attenzione all'esatta enunciazione.

Si vede subito che c'è una dissimmetria, poiché la durata dell'esperienza mentre è  $T$  nel problema originario, è invece  $T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  nel problema derivato. Ciò giustifica l'aspettativa che debba essere dissimmetrica anche la conclusione. Ma questa constatazione, sulla quale insiste Mc Crea <sup>(2)</sup>, non è sufficiente a risolvere il paradosso, anzi, isolatamente considerata, aggrava la situazione, poiché se l'orologio  $\alpha$  deve rallentare rispetto ad  $\alpha'$ , e la durata dell'esperienza è più breve, cioè  $T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , si dovrebbe prevedere una indicazione ancora minore per l'orologio  $\alpha$  all'atto della seconda coincidenza, cioè  $T\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ , e non già  $T$ , come deve essere.

5. È ovvio che, per risolvere il paradosso, occorre dimostrare che la relazione (2) non è una conseguenza autentica della relatività.

Ora, poiché tale relazione deriva dall'applicazione delle trasformazioni di Lorentz al moto dell'orologio  $\alpha$ , riferito al sistema  $O' x' y' z'$ , si risponde comunemente che questo sistema non è costantemente inerziale per tutta la durata dell'esperienza per cui non è lecito applicare ad esso, nella risoluzione del proposto problema, le trasformazioni di Lorentz.

Questa risposta ha tuttavia l'apparenza di una poco abile evasione. Gli antirelativisti replicano che il sistema  $O' x' y' z'$  è certamente inerziale per quasi tutta la durata dell'esperienza ( $T' = T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ), salvo un intervallo di tempo  $\tau'$ , nel quale avviene la conversione del moto, che può essere reso trascurabile rispetto a  $T'$ , e che, salvo il tempo  $\tau'$ ,  $\alpha$  si muove con velocità di modulo costante  $|v|$ . Non si vede quindi la ragione per la quale non debbano essere applicabili le trasformazioni di Lorentz.

Del resto anche nella risoluzione del problema primitivo, nel quale si considerava il moto dell'orologio  $\alpha'$ , riferito al sistema fisso  $Oxyz$ , c'era un intervallo di tempo  $\tau$  per il quale non si potevano applicare all'andamento dell'orologio mobile le trasformazioni di Lorentz. Ma questa circostanza non ha importanza, secondo il giudizio degli stessi relativisti, poiché  $\tau$  è trascurabile rispetto a  $T$ . Ed allora?

Queste sono in sostanza le ragioni degli oppositori, delle quali occorre riconoscere la forza apparente, se si vuole risolvere davvero il paradosso.

A questo punto i relativisti ritengono comunemente che si possa conseguire una perfetta chiarificazione ricorrendo al principio di equivalenza della relatività generale.

Supponiamo infatti di realizzare una successione di esperienze nelle quali l'inversione del moto avvenga sempre secondo le stesse modalità, mentre

T tende ad infinito. Allora  $\tau'$  (tempo di inversione del moto per  $K'$ ) è costante.

Ciò posto, per  $K'$  le cose vanno come se, durante  $\tau'$ , l'orologio  $\alpha$  si muovesse in un campo gravitazionale, ma questo influenza l'andamento degli orologi secondo la ben nota formula:

$$(3) \quad (\Delta t)^* = \Delta t \left( 1 - \frac{\Delta U}{c^2} \right).$$

Applicando questa equazione al caso attuale, si dimostra <sup>(1)</sup> che il progresso (valutato da  $K'$ ) di  $\alpha$  durante la conversione del suo moto, non è indipendente da T; anzi cresce al crescere di T ed in tal modo da compensare il rallentamento che esso subisce nella fase di moto uniforme, così che in definitiva, l'osservatore  $K'$  prevede che, all'atto della seconda coincidenza con  $\alpha'$ , esso registri il tempo T e non già  $T \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$ .

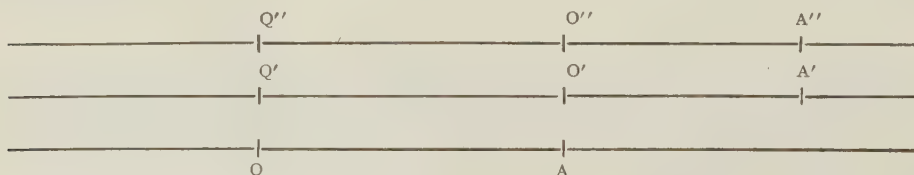
Questa spiegazione, sebbene comunemente accettata dai più insigni relativisti, sembra ad alcuni più sottile che vera ed è fortemente contraddetta da Jellinek.

Avvertiamo peraltro che questo ricorso al principio di equivalenza non è a rigore indispensabile, esso è tuttavia utile, per chi ammetta il principio, allo scopo di conseguire una maggiore chiarificazione.

Il relativista può limitarsi ad osservare che il ragionamento dell'anti-relativista, il quale avrebbe la pretesa di scoprire una contraddizione logica nel sistema, non è rigoroso, poiché esso presuppone che i due sistemi  $Oxyz$  ed  $O'x'y'z'$  siano del tutto equivalenti, ciò che invece non è vero. Infatti, mentre  $Oxyz$  è inerziale per tutta la durata dell'esperienza,  $O'x'y'z'$  non è tale. Spetta all'antirelativista dimostrare che questa circostanza non è essenziale.

Tuttavia, allo scopo di conseguire maggiore chiarificazione, il relativista assume su di sé l'obbligo di mostrare che, al contrario, quella circostanza è essenziale, il che consegue ricorrendo alla relatività generale, la quale permette di determinare l'andamento di un orologio anche quando esso si muove non uniformemente rispetto ad un sistema non inerziale.

6. Ma, a nostro avviso, si può conseguire una identica chiarificazione facendo appello alla relatività ristretta, impostando il problema in modo conveniente.



Insieme al sistema  $O'x'y'z'$  consideriamo il sistema  $O''x''y''z''$  opportunamente definito. Per semplicità supponiamo che si tratti di sistemi lineari

$O'x'$  ed  $O''x''$ , costituiti da sbarre rigide e sovrapposte lunghe quanto ci occorrerà considerare. Il sistema  $O'x'$  scorra sul sistema fisso  $Ox$  con velocità  $v$ , mentre  $O''x''$  scorra con velocità  $-v$ . L'orologio  $\alpha$  sia collocato nell'origine del sistema fisso  $Ox$ . Sia  $A$  il punto del sistema  $Ox$  sul quale pensiamo che avvenga la conversione dell'orologio mobile  $\alpha'$ , costantemente solidale coll'origine del sistema mobile  $O'x'$ .

Invece di supporre che l'orologio  $\alpha'$ , unitamente al sistema  $O'x'$ , faccia una reale conversione del suo moto, supponiamo che un secondo sistema  $O''x''$ , muovendosi rispetto ad  $Ox$  con velocità  $-v$ , sia in posizione tale che la sua origine  $O''$  coincida con  $O'$  mentre  $O'$  coincide con  $A$ . In  $O''$  si immagini collocato un orologio  $\alpha''$  segnante all'atto della coincidenza con  $O'$  la stessa ora di  $\alpha'$ .

È chiaro che, in ordine agli scopi finali, l'orologio  $\alpha''$  può sostituire  $\alpha'$ .

Quindi, per prevedere che cosa debba accadere all'atto della seconda coincidenza di  $\alpha'$  con  $\alpha$ , se avvenisse una reale conversione del moto, possiamo chiedere semplicemente che cosa deve accadere all'atto della coincidenza di  $\alpha''$  con  $\alpha$ . In questo modo siamo sicuri di potere applicare i principî della relatività ristretta, poichè i due sistemi  $O'x'$  ed  $O''x''$  si muovono costantemente di moto uniforme.

Osserviamo intanto che le equazioni che legano le variabili  $x$  e  $t$  alle variabili  $x''$  e  $t''$  sono le consuete trasformazioni di Lorentz ma alquanto modificate, per tenere conto del fatto che le origini  $O$  ed  $O''$  non coincidono nell'istante iniziale. Avremo cioè:

$$x = \frac{x'' - vt''}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + 2L \quad ; \quad t = \frac{t'' - \frac{v}{c^2}x''}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

essendo  $L$  la lunghezza del segmento  $OA$  misurata da  $K$ .

Se ora vogliamo giudicare dell'andamento dell'orologio  $\alpha$ , utilizzando i principî validi nei sistemi  $O'x'$  ed  $O''x''$  possiamo farlo, ma non dobbiamo dimenticare che tali giudizi (conformemente allo spirito della relatività ristretta) hanno valore empirico, ossia esprimono in ultima analisi risultati di esperienze effettuabili su  $\alpha$  operando nei sistemi  $O'x'$  ed  $O''x''$ .

Ciò posto, all'atto della coincidenza  $O'A$ , l'osservatore  $K'$  giudica che  $\alpha$  ha progredito (dopo la coincidenza  $O'O$ ) di  $\frac{L}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$  poichè  $\frac{L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  è il tempo che, in questa coincidenza ( $O'A$ ), registra  $\alpha'$ . L'osservatore  $K''$  giudica che tra questa coincidenza  $O''A$  e la coincidenza  $O''O$ , l'orologio  $\alpha$  deve parimenti progredire di  $\frac{L}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ . Però, per quanto riguarda la registrazione attuale di  $\alpha$  (quando cioè coincidono  $O'$  ed  $O''$ ) i giudizi di  $K'$  e  $K''$  differiscono.  $K'$  giudica che  $\alpha$  registri il tempo  $\frac{L}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$  mentre  $K''$  giudica che registri  $\frac{L}{v} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$ .



Cioè i due giudizi differiscono di  $2L \frac{v}{c^2}$ .

È chiaro che qualora volessimo ammettere una reale conversione del moto di  $O'x'$ , l'osservatore  $K'$ , per potere applicare i principi della relatività ristretta, deve fare suoi i giudizi di  $K''$ . Ciò equivale a dire che durante la conversione del moto, le cose vanno come se l'orologio  $\alpha$  avesse progredito di  $2L \frac{v}{c^2}$ . Aggiungendo questa quantità al progresso di  $\alpha$  durante il moto uniforme otteniamo  $\frac{2L}{v}$ , come deve essere.

Il fatto che i giudizi di  $K'$  e  $K''$  durante la coincidenza di  $O'$  e  $O''$  con  $A$  siano diversi non deve fare pensare che vi sia una contraddizione. Infatti l'enunciazione che  $\alpha$  segni una determinata ora ha per ciascuno di essi significato non assoluto, ma relativo ad esperienze che ciascuno di essi può fare con i propri apparecchi. In queste esperienze sia  $K'$  che  $K''$  utilizzano coppie di orologi del proprio sistema, sincroni per ciascuno di essi, ma non per ambedue.

7. La soluzione del paradosso data da Jellinek è giudicata oscura da Mc Crea, senza peraltro assegnarne le ragioni. Trattandosi di una discussione piuttosto lunga non possiamo soffermarci in una analisi critica. Tuttavia vogliamo segnalare un punto che a noi sembra realmente oscuro e vogliamo indicarne la ragione.

Nella trattazione di Jellinek, nel giudicare dell'andamento dell'orologio  $\alpha$  dal punto di vista dell'osservatore mobile  $K'$ , ha un ruolo preponderante la coincidenza  $OQ'$  (vedi figura) essendo  $Q'$  il punto del sistema mobile  $O'x'$  il quale coincide con  $O$  all'atto della coincidenza di  $O'$  con  $A$ . Osserviamo però che le due coincidenze  $OQ'$  ed  $AO'$  sono simultanee per  $K$  non già per  $K'$ . Per conseguenza non si vede il vantaggio di utilizzare la coincidenza  $OQ'$  per capire le cose dal punto di vista di  $K'$ .

Le coordinate spazio-temporali della coincidenza  $OQ'$  sono rispettivamente per  $K$  e  $K'$ :

$$\left(0, \frac{L}{v}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{-L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{L}{v\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Ora basta riflettere che qualora volessimo considerare velocità  $v$  prossime a  $c$ , il tempo registrato dall'orologio collocato in  $Q'$  (e sincrono per

$K'$  con  $\alpha$ ) sarebbe  $\frac{L}{v\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , ossia maggiore della durata dell'esperienza <sup>(5)</sup>.

(5) Aggiungiamo che l'attuale impostazione della questione crea un'altra difficoltà. Generalmente si ritiene che il dato del problema fondamentale enunciato per l'osservatore  $K'$  sia il seguente: L'orologio  $\alpha$  (all'atto della sua conversione) si è allontanato da  $O'$  con



Ma quello che non ci sembra affatto giustificato è il ripudio che fa Jellinek della soluzione di Einstein e Tolman e la critica da esso rivolta al principio di equivalenza. Indubbiamente questa soluzione presenta a prima vista una forte apparenza di artificiosità, ma questa impressione sparisce quando si riflette al fatto che il principio di equivalenza non è una ipotesi *ad hoc* escogitata allo scopo di risolvere il paradosso degli orologi. Esso è invece suggerito da considerazioni molto più generali.

A noi sembra che la resistenza di Jellinek ad accettare questa soluzione sia dovuta al fatto che egli ancora aderisce alla teoria dell'etere. Egli accetta le trasformazioni di Lorentz ma è indotto a pensare che i giudizi pronunciati da un osservatore solidale con l'etere siano più obbiettivi di quelli pronunciati da un altro osservatore mobile. Chi possiede questa mentalità difficilmente vede il principio di equivalenza nella sua vera luce. Così ad esempio, quando egli domanda come è possibile che il moto accelerato del sistema  $O'x'$  possa influenzare l'andamento degli orologi del sistema delle stelle fisse, a rigore commette un equivoco, attribuendo al relativista una mentalità che questi ripudia. La proposizione (3) non esprime una realtà assoluta accessibile ad un osservatore privilegiato la cui esistenza è problematica, ma esprime invece il risultato di esperienze effettuabili dall'osservatore  $K'$  e che, fino ad un certo punto almeno, può essere compreso anche con la relatività ristretta.

velocità costante  $-v$  per un tempo  $\frac{T}{2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Ammesso questo, è evidente che lo spazio percorso in tale intervallo di tempo non può essere altro che  $v \frac{T}{2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Ma, se esso raggiunge effettivamente il punto  $Q'$  si dovrebbe dire che lo spazio percorso è stato invece  $v \frac{T}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ .

La difficoltà di assegnare la descrizione cinematica del moto di  $\alpha$  rispetto al sistema  $O'x'y'z'$  è dovuta al fatto che la cessazione di inerzialità del sistema mobile non avviene simultaneamente per i vari osservatori dislocati lungo una sbarra rigida solidale con  $O'x'$ .

Un'altra difficoltà proviene dal fatto che nell'arresto (e successiva conversione) della sbarra rigida  $O'Q'$ , il moto di  $Q'$  non può essere lo stesso di quello prestabilito per  $O'$ . Ed infatti, se, durante il moto, la sbarra rigida subisce la contrazione di Lorentz e se si vuole che nel momento dell'arresto essa riprenda la lunghezza di quiete, il punto  $Q'$  dovrebbe muoversi con velocità maggiore di  $c$ , se la velocità  $v$  è sufficientemente prossima a  $c$ . Questa difficoltà è intimamente connessa col difficile concetto di corpo rigido in meccanica relativistica, sul quale c'è poco accordo tra i migliori autori.

**Chimica inorganica.** - *Complessi isonitrilici di Palladio (O)* <sup>(\*)</sup>.  
Nota preliminare di LAMBERTO MALATESTA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal  
Socio L. CAMBI.

Le ricerche per preparare composti isonitrilici dei metalli dei gruppi di transizione in stati di ossidazione formale inconsueti, che già mi condussero, con i miei collaboratori, all'ottenimento di complessi esaisonitrilici di cromo (O) <sup>(1)</sup>, molibdeno (O) <sup>(2)</sup> e wolframio (O) <sup>(3)</sup>, a complessi tetraisonitrilici di nichelio (O) <sup>(4)</sup>, a sali esaisonitrilici di manganese (I) <sup>(5)</sup> e penta-isonitrilici di cobalto (I) <sup>(6)</sup>, sono ora stati estesi al palladio.

Questo metallo, caratteristico, a differenza dei metalli finora studiati, per la scarsa attitudine a dare composti stabili con l'ossido di carbonio, ha dimostrato, com'era del resto prevedibile, una notevole affinità verso gli isonitrili. In collaborazione di A. Sacco e M. Angoletta ho isolato due serie di complessi derivati da Pd (II) e precisamente  $\text{Pd}(\text{CNR})_2\text{X}_2$  e  $\text{Pd}(\text{CNR})_4\text{X}_2$  (X = alogeno), la prima facilmente solubile in cloroformio, la seconda insolubile in cloroformio.

I sali della prima serie, trattati in soluzione alcoolica con 1 mol. di dicarbilammina e con potassa alcoolica all'ebollizione, danno luogo ad una reazione esotermica, con precipitazione pressoché quantitativa dei composti  $\text{Pd}(\text{CNR})_2$  (R = fenil, p-tolil, p-metossifenil). Questi prodotti derivati dal palladio formalmente zerovalente e coordinativamente non saturo, si presentano in foglioline marrone-scuro e si ottengono puri. La loro composizione, oltreché dall'analisi, risulta dal fatto che, trattati con alogeni, per esempio con iodio, rigenerano in modo quantitativo i sali di-isonitrilici di partenza:  $\text{Pd}(\text{CNR})_2 + \text{I}_2 \rightarrow \text{Pd}(\text{CNR})_2\text{I}_2$ .

La determinazione del peso molecolare dei composti dicarbilamminici di palladio (O) non ha potuto essere eseguita perché i pochi solventi che li sciolgono (piridina, nitrobenzolo) li decompongono con separazione del metallo. È probabile che essi abbiano struttura polimera, e che presentino legami covalenti tra atomi del metallo. Rappresentano in ogni caso un tipo di composto non mai prima osservato e la cui esistenza non era *a priori* prevedibile.

Ulteriori ricerche sono in corso.

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Generale dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) L. MALATESTA, A. SACCO e GHIELMI, «Gazz. Chim. It.», 82, 516 (1952).

(2) L. MALATESTA, A. SACCO e M. GABAGLIO, «Gazz. Chim. It.», 82, 548 (1952).

(3) L. MALATESTA e A. SACCO, «Ann. Chim.», 43, 622 (1953).

(4) L. MALATESTA e A. SACCO, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», ser. VIII, vol. XI (1951).

(5) A. SACCO, in corso di stampa sui «Rend. Acc. Naz. dei Lincei».

(6) L. MALATESTA, «Gazz. Chim. It.», 83, 958 (1953); L. MALATESTA e A. SACCO, «Zeit. anorg. u. allg. Chemie», 273, 247 (1953).

**Chimica biologica.** — *Elettroforesi su carta di proteine muscolari.* Nota II di GIOVANNI TOSCHI e AURELIO MARIANI, presentata (\*) dal Socio D. MAROTTA.

In una precedente Nota <sup>(1)</sup> abbiamo riferito su una tecnica di elettroforesi su carta per il frazionamento di estratti proteici di tessuto muscolare. Si riferisce qui sui miglioramenti apportati successivamente, nel corso del lavoro, e sulla messa a punto di una tecnica che consente la valutazione quantitativa dei singoli componenti degli estratti. Ci limitiamo ad esporre i dati essenziali della tecnica, rinviando al lavoro *in extenso* <sup>(2)</sup> per una descrizione particolareggiata.

#### A) Estratti a bassa forza ionica.

Si è adottato il sistema di camera umida proposto da Grassmann e Hannig <sup>(3)</sup>, impiegando carta Whatman n. 1, in striscie di cm.  $4 \times 30$ . Con questa carta non occorre il pretrattamento con sieroalbumina, di cui alla precedente Nota. Variando opportunamente il pH e la tensione si ottengono di volta in volta le condizioni più adatte alla separazione dei singoli componenti. Per valutare le rispettive percentuali dei tre gruppi di componenti identificati da Jacob negli estratti muscolari di Coniglio: I ( $l, m, n$ ), II ( $k_1, k_2$ ) e III ( $h, i$ ) è adatta una elettroforesi in tampone fosfati di f.i. 0,10 e pH 6,4 con 5 V/cm. per 12 ore. In questo caso si depone l'estratto con un tiralinee sulla striscia già imbevuta di tampone, in un tratto asciugato con listerelle di carta bibula e situato a 15 mm. dall'estremità catodica dello spazio utile. Per una buona

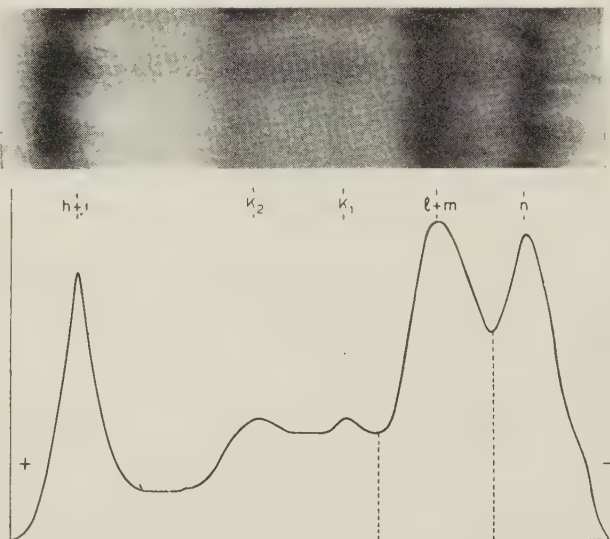


Fig. 1. — Miocardio di Coniglio, estratto di f.i. 0,10. Elettroforesi in tampone fosfati di f.i. 0,10 e pH 6,4, con 6 V/cm. per 13 ore.

(\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) A. MARIANI e G. TOSCHI, « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. 8<sup>a</sup>, XIV, 285 (1953).

(2) G. TOSCHI e A. MARIANI, « Rendic. Ist. Sup. San. », in corso di stampa.

(3) W. GRASSMANN u. K. HANNIG, « H.-S., Ztschr. f. physiolog. Chem. », 290, 1 (1952).

separazione fra i singoli componenti dei gruppi I e II è opportuna una elettroforesi con lo stesso tampone, con 7 V/cm. per 15 ore, deponendo invece l'estratto nel punto di mezzo dello spazio utile. Separazioni più rapide o più accentuate si ottengono impiegando maggiori tensioni e tamponi di f.i. 0,05.

Un esempio dei risultati ottenibili è dato in fig. 1.

### B) Estratti ad alta forza ionica.

La tecnica di Kunkel e Tiselius si è dimostrata sempre come la più adatta, impiegando però con vantaggio striscie di  $7 \text{ cm. } 4 \times 15$  e un tampone

al Veronal-HCl di pH 8,6 e f.i. 0,25 (NaCl 0,20 M; Veronal sodico 0,04355 M; HCl 0,00645 M). Abbiamo adottato poi due ponti di agar (agar al 3 % nella soluzione tampone) che collegano le vaschette in cui pescano i capi delle striscie con due vaschette contenenti una soluzione di  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  0,2 M, in cui pescano gli elettrodi. Si evita così sia lo sviluppo di cloro che sensibili variazioni di composizione del tampone. Si è visto inoltre che può omettersi il pretrattamento della striscia con sieralbumina. Infatti di regola non interessa valutare in questi estratti la percentuale di mioalbumina; quanto alle proteine fibrillari e ai miogeni, la quantità di proteine che è contenuta nelle bande formate da questi componenti è più che sufficiente a saturare la carta nel breve tratto percorso

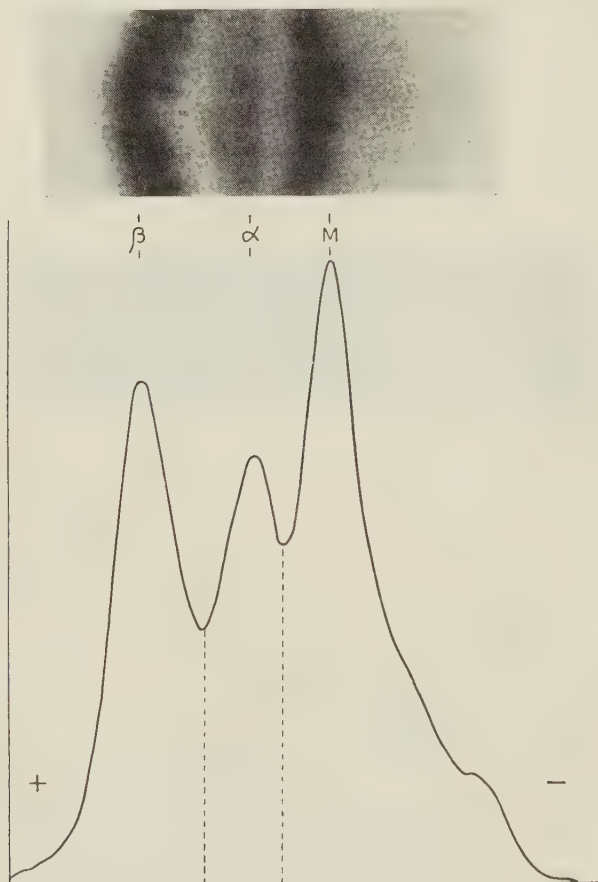


Fig. 2. - Muscolo bianco di Coniglio, estratto di f. i. 0,35 (durata: 20'; con ml 2 per g). Elettroforesi in tampone al Veronal-HCl di f.i. 0,25 e pH 8,6, con 8 V/cm. per 16 ore.

senza che vi sia l'inconveniente di una sensibile riduzione delle bande stesse. Una soddisfacente separazione delle miosine  $\alpha$  e  $\beta$  e del gruppo dei miogeni si ottiene con 16-18 ore di elettroforesi con 8 V/cm.; l'estratto si depona con un pennellino nel punto di mezzo della striscia.

Un esempio dei risultati ottenibili è dato in fig. 2.



C) *Determinazione quantitativa.*

Per la colorazione e la lettura delle strisce si è seguito il metodo di Grassmann e Hannig <sup>(4)</sup>. Riferiamo a titolo di esempio i risultati di alcune prove. Nella tabella I, *a*) sono riportati i valori percentuali dei tre gruppi di componenti di un estratto a bassa f.i. di muscolo rosso di Coniglio (si è eseguita contemporaneamente l'elettroforesi dello stesso estratto su 8 strisce; su ogni striscia si è fatta la determinazione quantitativa e si sono poi calcolati i valori medi e il relativo Errore Standard). Nella tabella I, *b*) sono riportati i dati di analoga prova eseguita con un estratto di muscolo bianco di Coniglio di f.i. 0,35 (media di 4 strisce). Questi risultati si accordano in modo soddisfacente coi dati della letteratura (ottenuti mediante elettroforesi in fase libera). Si osserva però che la percentuale di mioalbumina è inferiore a quella determinata in fase libera: lo stesso fatto si verifica per la sieralbumina nell'elettroforesi su carta delle proteine sieriche. Molto probabilmente questo è dovuto al fatto che il componente a migrazione più rapida satura le cariche elettriche della carta, fissandosi su questa in minima quantità, che rimane come « fondo » nel proteinogramma; tale quantità è costante per un dato tipo di carta e per un dato percorso.

TABELLA I.

*a*) Estratto di muscolo rosso di Coniglio, di f.i. 0,10. Elettroforesi in parallelo su 8 strisce, con 7 V/cm. per 12 ore, con tampone di f.i. 0,10 e pH 6,4.

	$h + i$	$k_1 + k_2$	$l + m + n$
Percentuale media ( $\pm$ E.S. (*))	$7,74 (\pm 0,659)$	$15,14 (\pm 0,014)$	$77,12 (\pm 1,054)$

*b*) Estratto di muscolo bianco di Coniglio, di f.i. 0,35 (estrazione di 20' con 2ml per g.) Elettroforesi in parallelo su 4 strisce, con tampone di f.i. 0,25 e pH 8,6, con 8 V/cm. per 16 ore.

	$\beta$	$\alpha$	M
Percentuale media ( $\pm$ E.S.)	$30,42 (\pm 0,75)$	$17,34 (\pm 1,31)$	$52,24 (\pm 1,77)$

$$(*) \text{ Errore Standard} = \sqrt{\frac{Sy^2}{n(n-1)}}$$

(Emmens, C. W., *Principles of Biological Assay*, Chapman & Hall, London, 1948, p. 17).

CONCLUSIONI. — Il metodo da noi descritto si presta allo studio della composizione proteica della fibra muscolare, con quei limiti e quei vantaggi che l'elettroforesi su carta ha già dimostrato, in confronto alla elettroforesi

(4) Si è usata l'apparecchiatura per elettroforesi e lettura della Ditta Label, Roma.



in fase libera, per lo studio delle proteine sieriche. È da notare fra gli altri, il vantaggio rappresentato dall'uso di minime quantità di tessuto muscolare (anche 100 mg.) e dalla possibilità di eseguire contemporaneamente in parallelo l'elettroforesi di molti estratti. Esso rende agevole in particolare sia lo studio sistematico dei muscoli di piccoli animali (per esempio Insetti) sia l'osservazione comparativa tra fibre muscolari normali e fibre in condizioni patologiche diverse.

Era in effetti nostro proposito mettere a punto un metodo che ci servisse in questo tipo di ricerche.

**Anatomia.** — *Prime osservazioni sulle connessioni fra il corredo nervoso della leptomeninge e dei vasi encefalici e la sostanza nervosa cerebrale*<sup>(\*)</sup>. Nota di GENNARO PALUMBI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio A. PENSA.

Uno degli attuali problemi di maggiore interesse teorico e clinico di grande complessità è quello relativo alla innervazione vegetativa del cervello,

Molti Autori ritengono che tale innervazione sia esclusivamente rappresentata dai nervi vegetativi simpatici e parasimpatici che accompagnano e si distribuiscono ai vasi cerebrali e che presiedono alle modificazioni del calibro e della permeabilità delle pareti vasali, alla regolazione del circolo e della pressione sanguigna e conseguentemente alla regolazione della quantità e della composizione del liquor.

Solo qualche Autore e fra questi, più di recente, il Landau ritiene si debba addirittura parlare di una innervazione vegetativa della cellula nervosa.

Relativamente alla innervazione dei vasi cerebrali dalla ricca letteratura si desumono i seguenti dati fondamentali:

1° Alla parete dei vasi cerebrali e principalmente a quella delle arterie di maggior calibro e delle arteriole si distribuiscono: *a)* fibre di natura nevrassiale, sensitive principalmente fornite per il territorio carotideo, dalla branca oftalmica del trigemino e da altri nervi cranici quali il III, VI ed il XII paio (sc. Stöhr); IX e X per altri Autori; *b)* fibre vasocostrittrici di natura simpatica provenienti dal simpatico cervicale e principalmente dal ganglio stellato e dal cervicale superiore; *c)* fibre vasodilatatrici di natura parasimpatica. Tali fibre ammesse per la prima volta da Chorobski e Penfiel (1932) avrebbero la loro origine reale in nuclei situati in corrispondenza del pavimento del IV ventricolo. Le fibre efferenti di questi nuclei seguendo l'intermediario di Wrisberg e poi il nervo grande petroso superficiale raggiungerebbero il ganglio sfeno-palatino i cui neuroni provvederebbero quindi

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Umana normale e di Istologia di Pavia.

(\*\*) Nella seduta del 14 novembre 1953.

alla innervazione vasodilatatrice, tramite il plesso cavernoso, di tutti i vasi cerebrali compresi quelli forniti dall'arteria cerebrale posteriore che come è noto, embriologicamente, è da ascrivere al sistema carotideo interno.

Nel plesso pericarotideo sarebbero contenute anche fibre parasimpatiche ritenute eccitosecretrici, aventi lo stesso decorso delle precedenti, destinate al diencefalo, alla ipofisi, ai primi nervi cranici, all'occhio ed alle ghiandole annesse ed infine alla mucosa nasale. (Taptas ed altri).

2° A livello della parete vasale tutte le fibre sopraelencate formerebbero un primo plesso avventiziale in seno al quale si trovano apparati terminali sensitivi più o meno complessi, e secondo alcuni Autori, anche cellule gangliari simpatiche sparse; ed un secondo plesso assai fine disposto in corrispondenza della tonaca media, ed in parte, dell'intima. Sostanzialmente, l'innervazione dei vasi cerebrali sarebbe molto simile a quella della pia, dei vasi piali e dei plessi corioidei.

3° L'estirpazione del ganglio cervicale superiore o della catena simpatica cervicale provoca, già due giorni dopo l'intervento, degenerazione di un terzo circa delle fibre amieliniche che compongono i plessi vasali; le fibre midollate di origine centrale, resterebbero invece intatte.

4° La stimolazione del ganglio cervicale superiore e dello stellato provocherebbe vasocostrizione dei vasi cerebrali; la stimolazione del vago e di altri nervi encefalici fra cui in modo particolare, il facciale, provocherebbe invece vasodilatazione.

È stata anche accertata l'insorgenza di fenomeni funzionali di antagonismo fra vasi piali e quelli cerebrali o anche fra questi e quelli del sistema carotideo esterno, potendosi avere vasocostrizione in uno dei due settori vascolari e contemporaneamente vasodilatazione.

D'altra parte il Landau (1947) ha creduto ravvisare nei « bottoni terminali » da vari Autori riscontrati sul corpo di cellule nervose del midollo spinale, del cervelletto, della corteccia cerebrale, ecc. e nei « gomitoli e nei nidi » che avvolgono alcune cellule nervose come quelle del ganglio ciliare, della corteccia cerebrale, del corno di Ammone, le cellule del Purkinje ecc., strutture di natura vegetativa aventi il compito di provocare una « irritazione vegetativa » nella cellula nervosa atta a stimolare e regolare le sue attività metaboliche.

A sostegno di questa sua veduta l'Autore ricorda alcune osservazioni cliniche, specie quelle del Denier, secondo le quali, alcuni malati mentali, in seguito ad elettroschock subliminare, col migliorare delle condizioni mentali, guariscono anche di affezioni periferiche di natura vegetativa.

Ma le considerazioni e le conclusioni del Landau contrastano troppo con i numerosi dati, ormai ben accertati, forniti dalla ricerca neuro-istomorfologica, dall'esperimento fisiologico, dalla patologia e dalla clinica. Appare subito evidente che la via tracciata dall'Autore non giova alla soluzione del problema della innervazione vegetativa del cervello.

D'altra parte, tutti coloro che si sono occupati della innervazione piale e dei vasi cerebrali hanno trascurato un punto, a mio avviso di capitale

importanza: quello relativo all'esistenza o meno di connessioni fra contingente nervoso leptomeningeo o vasale e sostanza nervosa cerebrale.

È a tutti noto quali intimi rapporti intercorrono fra vasi che penetrano nel cervello e lamina piale e fra parete di piccoli vasi intracerebrali e la guaina nevroglica che li accompagna.

Sappiamo infatti che la membrana basale di natura connettivale della pia madre, introflettendosi, accompagna i vasi che penetrano nel cervello formando attorno a questi uno spazio linfatico - spazio perivascolare di Virchow-Robin - in diretta comunicazione con quello intracraideo. Tale membrana - che nei preparati microscopici appare costituita da tessuto reticolare con numerose cellule adipose e pigmentate - accompagna le arterie per breve tratto e solo nelle loro prime diramazioni per poi fondersi con l'avventizia. La membrana basale della pia è separata dal tessuto nervoso da uno strato di tessuto nevroglico che prende il nome di « spazio nevroglico di Held ». Le arterie di minor calibro e le arteriole sono circondate da cellule gliali che formano una guaina avvolgente nevroglica più o meno evidente.

Il compito di questa Nota è precisamente quello di chiarire i rapporti fra plessi nervosi leptomeningei e la sostanza nervosa encefalica.

Io mi sono servito di pezzi di cervello umano interessanti l'area perforata anteriore e parte dei nuclei centrali ad essa topograficamente corrispondenti.

I pezzi sono stati prelevati da cervelli appartenenti a soggetti adulti il cui decesso non era dovuto ad affezioni cerebrali. Nell'allestimento dei preparati si è posta la massima cura nel non provocare il distacco della leptomeninge e dei vasi della regione dalla superficie corticale.

Previo inclusione in gelatina si è proceduto alla sezione dei pezzi al microtomo congelatore. Le sezioni condotte perpendicolarmente alla superficie cerebrale, raccolte in vaschette seriate, sono state sottoposte ad impregnazione argentea secondo il metodo Bielschowsky da me opportunamente modificato.

Ecco quanto fino ad ora è emerso dall'esame dei preparati così ottenuti.

L'aracnoide, e non soltanto la pia, è provvista di un notevole contingente nervoso. Grossi fasci costituiti prevalentemente da fibre amieliniche o scarsamente mieliniche e da poche fibre midollate, decorrono sulla superficie esterna della lamina aracnoidea in pieno spazio sottodurale. Spesse volte lungo detti fasci si trovano cellule gangliari multipolari raccolte in piccoli ganglietti, pure questi disposti in seno allo spazio sottodurale. Tutte le fibre dopo un decorso più o meno lungo alla superficie esterna dell'aracnoide finiscono col portarsi nello spazio sottoaracnoideo ove in parte si accollano e si distribuiscono ai vasi di vario calibro che quivi decorrono in gran numero ed in parte concorrono alla costituzione di quel plesso piale fondamentale che è stato descritto da tutti gli Autori.

Anche nei miei preparati si osservano apparati terminali analoghi a quelli descritti dallo Stöhr e da altri Autori, disposti in gran parte nelle trabecole aracnoidee e nel connettivo proprio della pia, in parte sulla parete dei vasi sanguigni di maggior calibro.

Ma non è su questi reperti ormai noti che intendo soffermarmi ma su altre particolarità strutturali che a quanto mi risulta non furono mai osservate.

Anzitutto, in corrispondenza del punto di ingresso delle arterie nella sostanza nervosa, le fibre nervose più fini che accompagnano i vasi e che hanno caratteri presumibilmente di natura vegetativa, non formano solo un plesso avventiziale, ma mediante loro rami di divisione provvedono anche alla costituzione di un delicato plesso nella parete della guaina piaie che delimita lo spazio di Robin-Virchow (fig. 1).

Nelle sezioni interessanti la testa del nucleo caudato, nelle quali siano anche apprezzabili i vasi in sezione longitudinale e tangenziale e la corrispondente guaina pio-gliale, si nota uno scambio continuo di esili fibre nervose

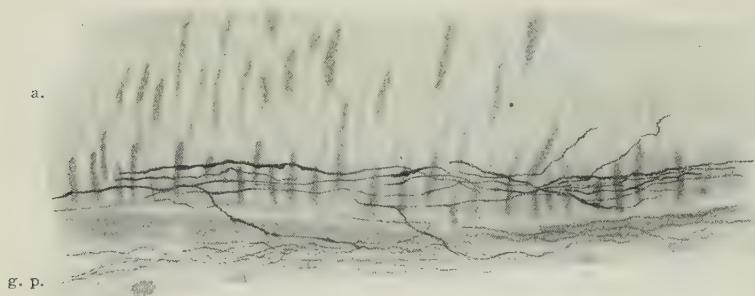


Fig. 1. — Area perforata anteriore di uomo.

a. arteria con plesso nervoso avventiziale, in corrispondenza del suo punto di ingresso nella corteccia; g. p. guaina piaie con delicato plesso nervoso. Notare lo scambio di fibre fra i due plessi. Met. Bielschowsky-Palumbi. Ingr. 700× Riduz. di 1/3.

fra parete vasale e guaina (fig. 2). Ora in casi particolarmente fortunati è dato osservare la penetrazione di fini fibre dal plesso nervoso disposto in corrispondenza dell'involucro nevroglico, nell'interno della sostanza grigia circostante.

Altro reperto assai significativo mi fu dato di osservare, con una certa frequenza. Fibre nervose singole e fascetti di fibre, almeno apparentemente amieliniche, appartenenti ai plessi sopraaracnoideo e piaie, direttamente ed indipendentemente dai vasi, passano nella corteccia cerebrale (fig. 3). Queste fibre si dipartono talora da uno dei ganglietti disposti al di sopra della lamina aracnoidea; esse si arrestano ad una distanza più o meno grande dalla superficie corticale (fig. 4). Ho potuto seguire in alcune sezioni seriate qualcuno di questi fascetti o di queste fibre e se talora non mi è stato possibile stabilire la loro terminazione perché si confondono con le altre fibre del feltro nervoso della corteccia, altre volte ho potuto constatare intimi rapporti con le numerose cellule gliali dello strato superficiale della corteccia stessa.

Ritengo che queste prime osservazioni suggeriscano l'idea di una probabile innervazione vegetativa — forse parasimpatica — della sostanza grigia almeno per quanto riguarda la sua componente gliale. Le cellule gliali



sarebbero dunque provviste di una innervazione vegetativa del tutto analoga a quella ben nota degli elementi connettivali di tutti gli altri organi.

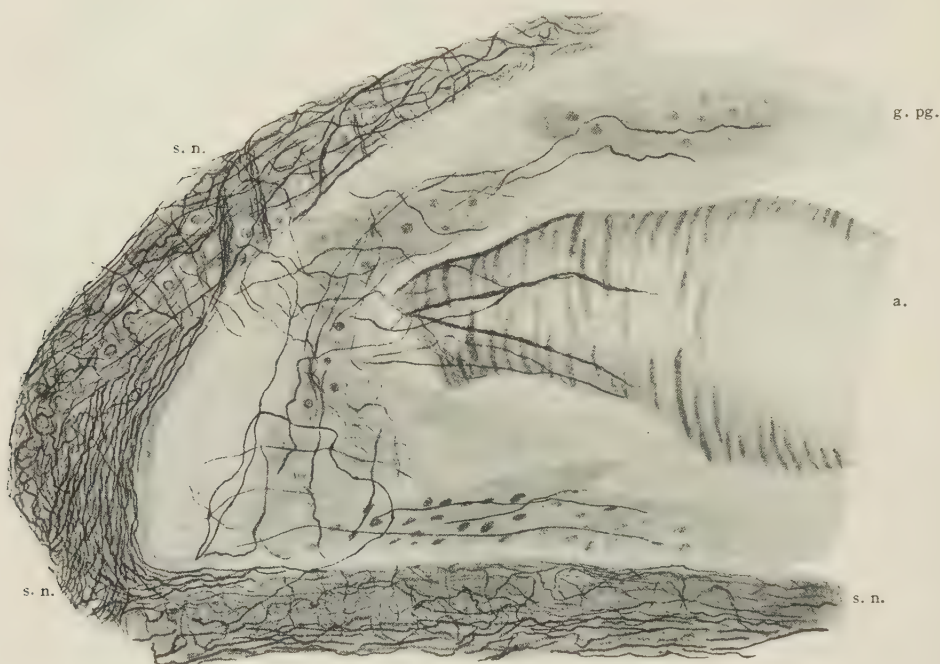


Fig. 2. - Sezione interessante la testa del n. caudato di uomo.

a. arteria in sezione longitudinale e tangenziale; g. p. g. guaina pio-gliale; s. n. sostanza nervosa. Notare lo scambio di fibre nervose fra il plesso della parete vasale e quello dell'involucro pio-gliale e la penetrazione nella sostanza nervosa circostante di fini fibre nervose provenienti dal plesso nervoso dell'involucro stesso. Met. Bielschowsky-Palumbi. Ingr. 750×Rid. ad 1/3.

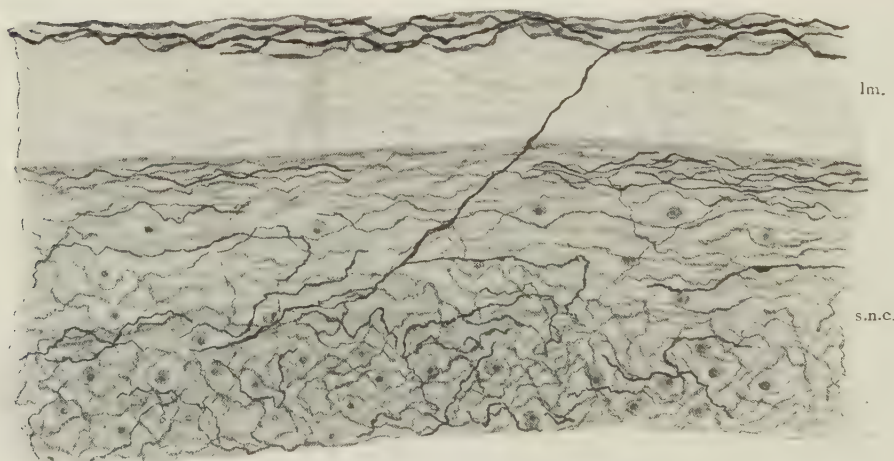


Fig. 3. - Area perforata anteriore di uomo.

s. n. c. sostanza nervosa corticale; lm. leptomeninge. Fibra nervosa amielinica che dal plesso nervoso leptomeningeo penetra, indipendentemente dai vasi, nella corteccia ove contrae rapporti con le cellule gliali dello strato superficiale. Met. Bielschowsky-Palumbi. Ingr. 320×Riduz. di 1/3.

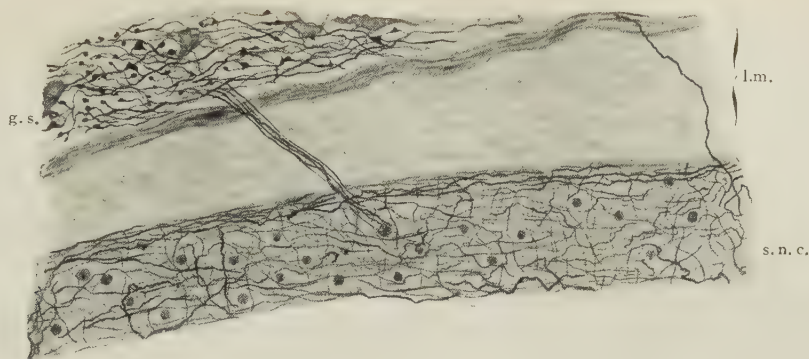


Fig. 4. — Area perforata anteriore di uomo.

Diretto passaggio di fibre nervose singole e di un fascetto di fibre dal ganglio simpatico (g. s.) disposto al di sopra della lamina aracnoidea (l. m.) nella sostanza nervosa corticale (s. n. c.).  
Met. Bielschowsky-Palumbi. Ingr. 250× Riduz. di 1/3.

L'ipotesi del resto non deve stupire quando si pensi alla imponente innervazione che fu da tempo dimostrata (Pensa 1904) per l'ependima dal quale è noto che si differenziano spongioblasti e per alcuni degli elementi costitutivi della neuroipofisi che sono di natura gliale.

#### AUTORI CITATI.

- LANDAU, « Arch. De Vecchi », IX, fasc. II, 365 (1947) (per l'Anatomia patologica e la Medicina Clinica).  
PENSA A., « Boll. Soc. Med. Chir. di Pavia », Pavia 1904.  
STHOR Ph., « Zeitschr. f. Zellforsch. u. mikrosk. Anatomie », 30, 78 (1939).  
TAPTAS, « Presse Médicale », 73, 886 (1948).

**Fisiologia.** — *L'ipertrofia renale compensatoria in animali affetti da ipopituitarismo anteriore ereditario. Relazioni tra preipofisi e processi di iperplasia e ipertrofia dei tessuti*<sup>(\*)</sup>. Nota di PAOLO CREPAX, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. C. PUPILLI.

Nel 1929 Snell <sup>(1)</sup> descrisse una particolare forma di nanismo ereditario recessivo in un ceppo di Topi grigi che L. C. Dunn aveva importato negli Stati Uniti dall'Inghilterra. Le osservazioni successive dello stesso Snell <sup>(2)</sup>, di Smith e Mac Dowell <sup>(3)</sup> e di Kemp <sup>(4)</sup> assodarono che l'ipoevolutismo somatico dei Topi di Snell dipendeva da ipofunzione del lobo anteriore della ipo-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) C. D. SNELL, « Proc. pat. Acad. Sci. », XV, 733 (1929).

(2) C. D. SNELL, « Anat. Rec. », XLVII, 316 (1930).

(3) P. E. SMITH e E. D. MAC DOWELL, « Anat. Rec. », XLVI, 249 (1930); L, 85 (1931).

(4) T. KEMP, « Acta path. microbiol. Scand. », Suppl. 16 (1933).

fisi, ciò che suggerì l'impiego di tali animali per lo studio di diversi problemi concernenti l'ipofisi [letteratura in Francis <sup>(5)</sup>]. Senza dubbio, lo stato di ipopituitarismo proprio dei Topi di Snell consente di esaminare le funzioni della preipofisi in condizioni per molti aspetti vantaggiose rispetto a quelle realizzabili mediante l'ablazione chirurgica della ghiandola. La quale ablazione, nel più dei casi, viene estesa per ragioni tecniche al lobo posteriore della medesima. Ora, se è certamente vero che gli effetti riferibili alla exeresi della postipofisi non impediscono per solito di analizzare in condizioni soddisfacenti le funzioni della ipofisi anteriore in animali operati di ipofisectomia totale, non è meno vero che il comportamento dell'animale privato dell'intera ghiandola non è, per certi aspetti, quello medesimo degli animali in cui si sia proceduto all'asportazione del solo lobo anteriore: basti considerare, ad esempio, il caso particolare del metabolismo dell'acqua.

Le considerazioni ora esposte mi hanno convinto della opportunità di rendere note alcune osservazioni che ho avuto modo di fare intorno al processo dell'ipertrofia renale compensatoria nel Topo di Snell. In effetti, mi sembra che i risultati degli esperimenti eseguiti, sebbene debbano per più ragioni ritenersi preliminari, offrano materia ad alcuni rilievi circa al problema più generale dell'influenza della preipofisi sui processi di ipertrofia e di iperplasia di diversi organi e tessuti dell'organismo. In secondo luogo credo che tale esperimento costituisca un tentativo di studiare, anche sotto l'aspetto dinamico, il comportamento funzionale dell'apparato endocrino dei Topi nani; il che non è stato fatto che in misura assai limitata, essendosi finora esaminato il problema sul fondamento di soli documenti di ordine morfologico [letteratura in Francis <sup>(5)</sup>].

Prima di riferire brevemente le osservazioni che ho eseguite, riassumo i fatti più significativi riguardo alle questioni di cui ho fatto cenno.

L'ipertrofia compensatoria dell'ovaio, del testicolo, del surrene e di altre ghiandole endocrine che segue l'ablazione dell'organo contralaterale, manca negli animali ipofisectomizzati. Questo dato sperimentale costituirebbe la prova più diretta del fatto che l'ipertrofia e l'iperplasia di tali ghiandole sono subordinate all'azione degli ormoni specifici secreti dal lobo anteriore dell'ipofisi. Conforme a tali conclusioni, quando in animali ipofisectomizzati i processi di ipertrofia fanno difetto in organi per i quali non è altrimenti dimostrabile una subordinazione diretta all'azione trofica della preipofisi, si potrebbe essere indotti a credere che tale ghiandola eserciti un'influenza specifica su quei tessuti medesimi: ad esempio, nel Ratto ipofisectomizzato non si osserva l'ipertrofia cardiaca da stenosi sperimentale dell'aorta [Beznák <sup>(6)</sup>] e mancherebbe del pari l'ipertrofia renale da nefrectomia contra-

(5) T. FRANCIS, *Investigation into the development of the pituitary and hereditary anterior pituitary dwarfism in mice*. Copenhagen, Ejnar Munksgaard (1944).

(6) M. BEZNÁK, « J. Physiol. », CXVI, 74 (1952).



laterale [Mac Queen-Williams e Thompson <sup>(7)</sup>; Gaarenstroom <sup>(8)</sup>; Colonge <sup>(9)</sup>; Zeckwer <sup>(10)</sup>]. E perché abbia luogo l'ipertrofia renale compensatoria, la presenza dell'ipofisi sarebbe egualmente necessaria nella Rana [Gonzales <sup>(11)</sup>] e nel Cane [Winternitz e Waters <sup>(12)</sup>].

Per le ragioni che esporrò nel discutere i risultati sperimentali, la spiegazione dei fatti ora riferiti è meno semplice di quanto comunemente si ammetta. Faccio presente, inoltre, che a conclusioni diverse da quelle generalmente accettate sono giunti tanto Fontaine e Veil <sup>(13)</sup> quanto Halpern e Cournot <sup>(14)</sup>, studiando nel Ratto l'influenza dell'ipofisectomia sull'ipertrofia renale compensatoria, la quale secondo tali Autori non risulterebbe impedita dall'ablazione chirurgica dell'ipofisi. Le diverse conclusioni formulate a tale riguardo da altri, vengono spiegate da Halpern e Cournot <sup>(14)</sup> nel modo che segue: l'ipofisectomia determina una diminuzione del peso dei reni e, quando ipofisectomia e nefrectomia unilaterale vengono effettuate nello stesso giorno ovvero a pochi giorni d'intervallo, l'aumento ponderale del rene superstite è mascherato dall'atrofia che segue l'ipofisectomia; nei casi in cui la prima nefrectomia è invece eseguita parecchi giorni dopo la ipofisectomia ovvero il peso del rene superstite è confrontato non già con quello dell'organo asportato nel primo intervento, ma col peso di reni di animali controllo ipofisectomizzati da eguale tempo, si arriva alla conclusione che l'ablazione della ghiandola pituitaria non impedisce l'ipertrofia renale compensatoria.

Ho sperimentato su 24 Topi di Snell, nati nello stabulario di questo Laboratorio da animali donatici dal prof. Tage Kemp, direttore dell'Istituto di Genetica dell'Università di Copenhagen, a cui ci è grato rinnovare l'espressione della nostra gratitudine. Al momento di venire impiegati, i Topi avevano in media 2 mesi di età. Vennero suddivisi in 4 gruppi omogenei: maschi normalmente sviluppati, maschi nani, femmine normalmente sviluppate e femmine nane <sup>(15)</sup>.

All'alimentazione si è provveduto, sia nel corso dell'esperimento sia prima che questo venisse iniziato, con la dieta di Vögt-Müller (su 100 parti: frumento intero macinato 55; germe di grano 5; caseina greggia 18; polvere di latte intero 12,5; grasso di maiale 6; cloruro di sodio 1; carbonato di

(7) M. MAC QUEEN-WILLIAMS a. K. W. THOMPSON, «Yale J. Biol. Med.», XII, 531 (1940).

(8) J. H. GAARENSTROOM, «Acta brev. neerl. Physiol. Pharmacol. Microbiol.», XII, 107 (1942).

(9) R. COLONGE, «C. R. Soc. Biol.», CXXXVIII, 494 (1944).

(10) I. T. ZECKWER, «Amer. J. Physiol.», CXLV, 681 (1946).

(11) R. GONZALES, «C. R. Soc. Biol.», CXXIX, 1270 (1938).

(12) M. C. WINTERNITZ a. L. L. WATERS, «Yale J. Biol. Med.», XII, 705 (1940).

(13) T. FONTAINE et C. VEIL, «Arch. Sci. physiol.», I, 49 (1947).

(14) B. N. HALPERN et L. COURNOT, «Arch. Sci. physiol.», VII, 111 (1953).

(15) Il rapporto tra animali normalmente sviluppati e animali nani è di circa 3 a 1. Si è concluso da tale fatto che il nanismo rappresenta un carattere ereditario recessivo che si manifesta solo negli omozigoti <sup>(5)</sup>.



calcio 1,5; olio di fegato di merluzzo 0,5; lievito di birra secco 0,5), a cui venivano aggiunti bisettimanalmente vegetali freschi.

La nefrectomia venne effettuata in narcosi mediante nembutal (30 mg/kg, per via intraperitoneale). Il rene asportato, che in questa serie di esperimenti era sempre il sinistro, era pesato a fresco mediante bilancia a torsione con l'approssimazione di 1 mg; 22 giorni dopo l'intervento, gli animali erano sacrificati e si procedeva alla pesata del rene contralaterale.

L'aumento percentuale del peso del rene destro, calcolato rispetto al peso del rene sinistro (media aritmetica dei valori osservati nei singoli animali di ciascun gruppo  $\pm$  deviazione *standard*) fu del  $117 \pm 17$  nei maschi normali, del  $101 \pm 15$  nei maschi nani; del  $92 \pm 21$  nelle femmine normali; del  $95 \pm 28$  nelle femmine nane. Ricordo come in Topi di altri ceppi l'ipertrofia renale sia significativamente più cospicua nei maschi che nelle femmine; nei Topi di Snell le differenze tra il grado di ipertrofia osservato nei due casi non raggiungono un livello di sufficiente significatività statistica (il parametro  $t$  di Student-Fisher è  $= 1,8$ ); ed una significatività ancor minore è da assegnare alle differenze tra maschi nani e maschi normali ( $t = 0,86$ ) e tra femmine nane e femmine normali ( $t = 0,19$ ).

Si può quindi concludere che nel Topo di Snell portatore di nanismo ipopituitario, l'ipertrofia compensatoria dopo nefrectomia unilaterale è presente e di grado paragonabile a quella che si osserva in animali regolarmente sviluppati appartenenti allo stesso ceppo.

Nel 1942 la Beznàk faceva noto che nel Ratto albino femmina <sup>(16)</sup> l'asportazione di un corno uterino non è seguita da ipertrofia compensatoria del corno superstite; essa formulava nel tempo stesso l'ipotesi che i processi d'ipertrofia compensatoria si osservassero solo in quegli organi che sono sotto l'azione trofica preipofisaria <sup>(17)</sup>. La Beznàk stessa ha poi cercato di comprovare la validità di questa ipotesi, indagando la natura dell'influenza esercitata dall'ipofisi sull'ipertrofia cardiaca che si manifesta in Ratti con stenosi sperimentale dell'aorta <sup>(6,18)</sup>. Il fatto, da lei osservato, che la somministrazione di ormone somatotropo non riesce a modificare che parzialmente l'andamento dei fenomeni d'ipertrofia nell'animale ipofisectomizzato non convalida né infirma, a mio parere, l'ipotesi formulata. Per un lato si consideri che l'ipofisi, oltre a secernere l'ormone somatotropo, esercita la sua influenza su ghiandole come la tiroide e i surreni, i cui prodotti di secrezione, pur non essendo singolarmente indispensabili al costituirsi dell'ipertrofia cardiaca, di certo vi partecipano <sup>(18)</sup>: l'atrofia surrenale e tiroidea, propria dell'animale ipofisoprivo, andrebbe quindi corretta con l'apporto di adeguate quantità dei rispettivi ormoni glandotropi; e solo se la somministrazione di ormone somatotropo sarà risultata parzialmente efficace anche

(16) Si tenga presente che gli esperimenti venivano eseguiti su animali normali (non ipofisectomizzati).

(17) M. BEZNÀK, « Pflüger's Arch. ges. Physiol. », CCXLVI, 443 (1942).

(18) M. BEZNÀK, « J. Physiol. », CXVI, 219 (1952).

in tali condizioni, potrà trarsi una conclusione meno incerta. Dall'altra parte, si consideri che la stimolazione dei processi anabolici, per effetto dell'ormone somatotropo, può influire in maniera non specifica sull'andamento dei processi d'ipertrofia; il che risulta dalle conclusioni di Halpern e Cournot<sup>(14)</sup> riguardo alla cosiddetta azione renotropa degli ormoni androgeni. Considerazioni sì fatte mi sembrano interamente accettabili, pur tenendo conto di quanto ha osservato la stessa Beznàk<sup>(19)</sup> in ricerche fatte note recentemente. Questa ricercatrice ha ripreso in esame la possibilità di ottenere nel Ratto ipofisoprivo come effetto di una stenosi aortica sperimentale, una ipertrofia cardiaca di grado non inferiore a quella osservabile nell'animale normale, mediante un trattamento ormonico sostitutivo; e diversamente da quanto le era occorso nei primi esperimenti eseguiti in condizioni analoghe<sup>(6,18)</sup>, è riuscita in tale intento. È stato però necessario somministrare dosi di ormone somatotropo da 8 a 100 volte più grandi di quelle usate in precedenza; e, oltre che dalle dosi, il diverso esito degli esperimenti è dipeso certamente dal fatto che è stata impiegata una preparazione ormonica relativamente poco purificata. Infatti, risultati analoghi sono stati ottenuti somministrando polvere di ipofisi anteriore liofilizzata; e ciò rafforza i rilievi fatti dianzi.

Quanto ho esposto riguardo all'ipertrofia cardiaca, vale egualmente rispetto ai risultati che dovrebbero comprovare l'attualità di un effetto renotropo prodotto dal lobo anteriore della ipofisi [cfr. Selye<sup>(20)</sup>, p. 246]. E il fatto che nel Topo ipopituitario di Snell l'ipertrofia renale compensatoria sia di grado paragonabile a quella che si osserva nell'individui regolarmente sviluppati dello stesso ceppo, convalida la spiegazione avanzata da Halpern e Cournot<sup>(14)</sup> circa al diverso andamento che i processi d'ipertrofia possono presentare secondo il tempo decorso dall'ipofisectomia. Gli esperimenti recentissimi di Astarabadi e Essex<sup>(21)</sup> danno inoltre evidenza all'importanza che in questi esperimenti ha la specie animale: tali Autori trovano infatti che dopo la ipofisectomia la ipertrofia renale compensatoria susseguente alla ablazione dell'organo contralaterale, manca nel Cane ed è invece presente nel Ratto; la somministrazione d'ipofisi anteriore liofilizzata risulta del pari diversamente efficace nelle due specie, consentendo nel Cane ipofisectomizzato il manifestarsi di un'ipertrofia renale finanche più cospicua di quella osservabile nell'animale normale e correggendo invece scarsamente nel Ratto l'atrofia renale che segue l'ipofisectomia.

Ho ricordato nelle premesse che la spiegazione dell'assenza dei fenomeni d'ipertrofia cardiaca e renale negli animali ipofisectomizzati, è stata formulata in modo del tutto analogo a quella che comunemente si dà della assenza dei fenomeni d'ipertrofia compensatoria dell'ovaio, del testicolo e del surrene in animali pure operati d'ipofisectomia. Senza dubbio, una subordinazione di

(19) M. BEZNÀK, « J. Physiol. », CXX, 23 P (1953).

(20) H. SELYE, *Textbook of Endocrinology*, Montreal, « Acta Endocrinologica » (1947).

(21) T. M. ASTARABADI a. H. E. ESSEX, « Amer. J. Physiol. », CLXXIII, 526 (1953).

tali fenomeni all'azione trofica del lobo anteriore della ipofisi appare più fondata nel secondo caso che nel primo, giacché sono ben individuati i fattori mediante i quali tale subordinazione si attuerebbe, cioè a dire gli ormoni glandotropi specifici. Tuttavia, anche in questo caso le prove addotte non si sottraggono ad alcune delle riserve che ho ricordate più sopra, esaminando gli esperimenti della Beznàk intorno alla ipertrofia cardiaca e quelli concernenti la ipertrofia renale compensatoria. Nell'animale operato di asportazione dell'ipofisi, le ghiandole sottoposte all'azione trofica della preipofisi, come le gonadi, la tiroide e i surreni, vanno incontro infatti a gravi processi regressivi: sarebbe quindi necessario accertare se il fatto che nell'animale ipofisectomizzato, quando si proceda all'exeresi unilaterale di una delle ghiandole ora nominate, manca l'ipertrofia compensatoria della ghiandola contralaterale, non possa considerarsi una conseguenza aspecifica delle deficienti condizioni del trofismo delle ghiandole. Alcuni fatti rendono necessario tale chiarimento: ad esempio, nel Ratto ipofisectomizzato i follicoloidi, anche in dosi assai forti, non esercitano alcun effetto sull'ovaio e da ciò si era indotti a credere che l'azione di tali sostanze sull'ovaio si svolge soltanto mediante una stimolazione dell'ipofisi. Una conclusione ben diversa si trae però dai risultati di esperimenti eseguiti su animali ipofisectomizzati, nei quali si sia impedito lo scadimento delle condizioni trofiche dell'ovaio mediante la somministrazione di piccole quantità di gonadotropine esogene: allora l'effetto dei follicoloidi sull'ovaio si manifesta sotto la forma consueta di un ingrandimento dei corpi lutei [cfr. Selye, loc. cit. <sup>(21)</sup>, p. 19]. Ora, è chiaro che alla mancanza dei fenomeni d'ipertrofia compensatoria del testicolo, dell'ovaio e del surrene nell'animale ipofisectomizzato si potrebbe più fondatamente attribuire un significato, qualora la si riscontrasse anche nel corso di esperimenti in cui alle normali condizioni di trofismo delle ghiandole medesime fosse stato provveduto con l'apporto di adeguate quantità degli ormoni gonadotropi rispettivi.

I risultati sperimentali da me ottenuti provano, in conclusione, che nei Topi portatori di nanismo ereditario pituitarico [cfr. Francis <sup>(5)</sup>], l'ipertrofia renale compensatoria da nefrectomia contralaterale è presente e di grado paragonabile a quella osservabile negli animali regolarmente sviluppati appartenenti allo stesso ceppo. Questo fatto induce a credere che la mancanza d'ipertrofia renale compensatoria osservata da alcuni Autori negli animali ipofisectomizzati possa spiegarsi con le particolari condizioni adottate [cfr. Halpern e Cournot <sup>(14)</sup>]. Più in generale, l'efficacia esplicativa di alcuni esperimenti addotti a riprova dell'intervento dell'ipofisi anteriore nei processi d'ipertrofia e d'iperplasia cellulare, è scarsa per il fatto che non risulta sufficientemente comprovata la specificità della influenza esercitata dalla ipofisi sui processi medesimi.

**Fisiologia.** — *Ancora sugli effetti dell'iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili.* — II. *Azione dell'associazione stricnina-simpamina sulla rana spinale* (\*). Nota di AMALIA AMICI, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. AMANTEA.

In una precedente Nota <sup>(1)</sup> sono stati riferiti i risultati di ricerche, eseguite iniettando a *Mus musculus*, contemporaneamente, dosi letali di stricnina e quantità determinate di adrenalina o varie sostanze adrenalinosimili. Delle sostanze usate, alcune, — Adrenalina, Sympatol, Aleudrina, Simpamina —, singolarmente associate a dosi letali di stricnina, non solo hanno potuto evitare la morte degli animali così trattati, ma anche la comparsa del tetano stricnico, o ritardandola molto nei rari casi in cui essa si manifestava.

Successivamente, discutendo i risultati ottenuti, e cercando di trovare almeno da un punto di vista teorico una spiegazione del fatto, scartata la ipotesi che fosse esso dovuto al fattore « vasocostrizione », è stata prospettata <sup>(2)</sup> anche la possibilità che la spiegazione potesse esser trovata nell'intervento di meccanismi nervosi aventi origine in sede più alta che non il midollo spinale.

Pur ritenendo, per le ragioni altrove esposte <sup>(2)</sup>, tale possibilità estremamente improbabile, tuttavia si è creduto necessario sperimentare al riguardo.

Sono state adoperate a tal fine, in una prima serie di osservazioni, n. 20 rane d'inverno (varietà « esculenta »), 10 normali e 10 spinali, alle quali venne iniettato, nel sacco linfatico dorsale, o nitrato di stricnina nella quantità di mg 0,07 per 10 g di rana, o la stessa quantità di stricnina alla quale era aggiunta, per aspirazione nella stessa siringa 1 mg di simpamina, sempre per 10 g di rana.

Si è preferita la simpamina, tra il gruppo delle varie sostanze adrenalinosimili precedentemente adoperate, e ad azione simile, sia perché con essa nelle precedenti osservazioni fu osservato un modico grado di mortalità negli animali, sia, e soprattutto, perché essa è stata forse la più studiata nei riguardi dell'azione sul sistema nervoso, e centrale e periferico.

I risultati ottenuti sono riassunti nell'unita tabella I, dalla quale risulta anzitutto che nessuna differenza fu riscontrata nel comportamento delle

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia dell'Università di Perugia.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) A. AMICI, *Sul comportamento di Mus musculus trattati con iniezione contemporanea di dosi letali di stricnina e varie sostanze adrenalinosimili.* In corso di stampa. In: « Rivista di Biologia ».

(2) A. AMICI, *Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili.* — I. *Qualche rilievo a giustificazione di una ipotesi di lavoro.* In corso di stampa. In questi « Rendiconti », vol. XVI, fasc. 2, pp. 257-263 (1954).



rane normali trattate con iniezione associata di stricnina e simpamina in confronto con quelle che ricevettero soltanto stricnina: in entrambi i gruppi assolutamente uguali il tempo medio di comparsa del tetano stricnico, e quello di comparsa della paralisi flaccida.

Per ciò che riguarda invece le rane spinali, la differenza di comportamento fu quanto mai netta: mentre quelle trattate con sola stricnina presentavano comparsa del tetano in un tempo della metà circa inferiore a quello osservato per le corrispondenti normali (come del resto era prevedibile) e comparsa della paralisi flaccida in un tempo di circa  $1/3$  maggiore, nessuna delle rane trattate con l'associazione stricnina-simpamina presentò comparsa di tetano né di paralisi. Solo in una del gruppo (n. 16) si notarono a distanza di 36' dall'iniezione scosse a tipo tetanico, non sostenute, ripetutesi ancora dopo 5'. Tutte le altre rispondevano agli stimoli come normali rane spinali, solo qualcuna presentando di tanto in tanto lieve iperreflessività. A distanza di 4 ore tutte apparivano normali animali spinali. Non si manifestò accenno a paralisi nemmeno dopo 10 ore di osservazione.

In una seconda serie di ricerche sono state adoperate ancora 20 rane dello stesso tipo delle precedenti, ma tutte spinali. Divise in 4 gruppi, di questi il primo fu trattato con solo nitrato di stricnina nella solita dose di mg 0.07 per 10 g di rana; negli altri tre, alla stricnina fu aggiunta la simpamina in dosi scalari di 1, 2 e 3 mg per 10 g di rana, rispettivamente per i gruppi 2, 3 e 4, come del resto appare evidente dalla tabella II. Uno sguardo ad essa mostra che, mentre tutti gli animali trattati con la sola stricnina presentavano regolarmente tetano e paralisi, anche se in un tempo più lungo che non nel caso precedente, delle 15 rane che insieme con la stricnina ricevettero la simpamina soltanto 2, n. 13 e n. 16, presentarono comparsa di tetano in un tempo pressoché uguale a quello dei controlli, ma che subito cessò senza più ripetersi. In nessun caso segni di paralisi.

Da tener presente che la rana n. 13 era forse però solo imperfettamente spinale, essendo in essa presente il riflesso di posizione. La rana n. 1 a 1 h 50' dall'iniezione presentò qualche scossa tetanica, subito cessata. Dopo 3 h 30' dall'iniezione tutte le rane dei gruppi 2 e 3 apparivano normalissimi animali spinali, ad eccezione della 7 che di tanto in tanto presentava alla stimolazione segni di iperreflessività. Così pure normali apparivano le rane n. 16 e 18, del gruppo 4; mentre invece le restanti 3 del gruppo, pur presentando tonicità e posizione normali degli arti degli animali spinali, non reagivano che a stimoli molto intensi.

L'insieme dei risultati ottenuti appare interessante.

Anzitutto le rane normali hanno reagito alla iniezione associata di stricnina e simpamina in maniera ben diversa dai *Mus musculus* ugualmente trattati, dei quali solo il 25 % presentò comparsa del tetano e morte. Le rane, invece, e tutte, si comportarono esattamente come i controlli a sola stricnina. È questo un dato che già di per sé merita di essere bene appro-

fondito e chiarito, pur tenendo presente la differenza tra gli animali adoperati: mammifero il primo, anfibio anuro il secondo, nonché la diversa via di introduzione delle sostanze: sottocutaneo nel primo caso, sacco linfatico dorsale nel secondo.

Quanto al comportamento delle rane spinali trattate con stricnina-simpamina, esso conferma quanto già osservato nei *Mus musculus* che riceveranno la stessa associazione, ed anzi ancora più piccola appare la percentuale di quelle che risposero con comparsa di tetano (10 % contro il 25 % nei topolini), e, per di più, tetano non sostenuto e non ripetutosi nelle rane, mentre condusse a morte i topolini.

Tale comportamento esclude in maniera assoluta, a mio modo di vedere, che il mancato effetto stricnico, nella condizione sperimentale di somministrazione unica e contemporanea, possa essere dovuto ad interventi di meccanismi nervosi a genesi in sede più alta che il midollo spinale.

Pur restando sempre da spiegare (il che non può essere fatto con leggerezza) la risposta, diametralmente opposta delle rane spinali e delle rane normali alla iniezione delle stesse dosi delle sostanze associate insieme. Mentre la risposta alla introduzione della sola stricnina nelle rane spinali è stata esattamente quella che ci si doveva aspettare, in base alle più elementari cognizioni.

In ogni modo è questo un problema che va affrontato e risolto, con tutte le cautele che esso merita.

Né credo si possa invocare, per spiegarlo, la nota possibilità di convulsioni stricniche di origine sopraspinale<sup>(3)</sup>: siamo qui ben lontani dalle condizioni sperimentali in cui è possibile scatenare accessi convulsivi stricnici legati all'attività dei centri che si trovano al di sopra del mesencefalo.

Si può pensare che, nel caso degli animali spinali, avvenga, per stricnina-simpamina, qualcosa di simile al reciproco antagonismo stricnina-barbiturici?

È noto infatti, in via sperimentale, che detto antagonismo avviene in conseguenza del fatto che, mentre la stricnina abbassa la cronassia dei centri nervosi, la elevano invece i barbiturici. (Lapique L. e M.; Ohre A.; Chouchard A. e B.<sup>(4)</sup>). E Porter e Allaman<sup>(5)</sup> hanno mostrato servendosi del gatto spinale, che tale antagonismo avviene proprio a livello del midollo.

Per le ragioni esposte nella nota precedentemente citata<sup>(2)</sup> e sulle quali è inutile ritornare, non crediamo però che ciò possa valere anche per la simpamina. Anche se, per di più, questa, è noto, deprime l'eccitabilità del nervo motore e del nervo sensitivo.

(3) G. MORUZZI, *Convulsioni stricniche di origine sopraspinale*. «Atti I Congresso Soc. Ital. di Farmacologia», Firenze 1940.

(4) L. e M. LAPIQUE, A. OHRE, A. e B. CHOUCHARD, citati da R. HAZARD, *Précis de thérapeutique et de Pharmacologie*. Masson e C., Paris 1950.

(5) PORTER e ALLAMAN, *Barbiturate-strychnine antagonism in spinal cat; quantitative Study*. «J. Pharmacol. a. Exper. Therap.», 58, 178 (1936).

TABELLA I.

Gruppo	N. animali	peso gr	Sostanze iniettate	comparsa tetano dopo minuti	paralisi dopo minuti
<i>Rane Normali</i>					
I	1	22	Nitrato di stricnina mg 0,15	9	17
	2	21	Nitrato di stricnina » 0,15	7	15
	3	37	Nitrato di stricnina » 0,26	10	18
	4	40	Nitrato di stricnina » 0,28	9,3	17,5
	5	35	Nitrato di stricnina » 0,25	7,3	15,5
MEDIE	—	—		8',3''	15',6''
II	6	26	Stricnina mg 0,17 + Simpamina mg 2,6 . . . . .	11	19
	7	40	Stricnina mg 0,28 + Simpamina mg 4 . . . . .	8	15
	8	15	Stricnina mg 0,11 + Simpamina mg 1,5 . . . . .	5	14
	9	22	Stricnina mg 0,15 + Simpamina mg 2,2 . . . . .	8	15
	10	20	Stricnina mg 0,14 + Simpamina mg 2 . . . . .	8	15
MEDIE	—	—		8',0''	15',4''
<i>Rane Spinali</i>					
III	11	20	Stricnina mg 0,14 . . . . .	5	19
	12	27	Stricnina » 0,19 . . . . .	7	17
	13	20	Stricnina » 0,14 . . . . .	1	26
	14	40	Stricnina » 0,28 . . . . .	4,4	26
	15	30	Stricnina » 0,21 . . . . .	4,2	26
MEDIE	—	—		4',3''	22',8''
IV	16	20	Stricnina mg 0,14 + Simpamina mg 2 . . . . .	14	—
	17	24	Stricnina mg 0,17 + Simpamina mg 2,4 . . . . .	—	—
	18	28	Stricnina mg 0,19 + Simpamina mg 2,8 . . . . .	—	—
	19	35	Stricnina mg 0,25 + Simpamina mg 3,5 . . . . .	—	—
	20	37	Stricnina mg 0,26 + Simpamina mg 3,7 . . . . .	—	—
MEDIE	—	—		—	—

TABELLA II.

Gruppo	N. animali	peso gr	Sostanze iniettate	Comparsa tetano dopo minuti	Paralisi dopo minuti
I	1	45	Nitrato di stricnina (Str.) mg 0,3 . . . . .	6	11
	2	10	Nitrato di stricnina (Str.) mg 0,07 . . . . .	20	57
	3	20	Nitrato di stricnina (Str.) mg 0,14 . . . . .	14	44
	4	20	Nitrato di stricnina (Str.) mg 0,14 . . . . .	8	23
	5	15	Nitrato di stricnina (Str.) mg 0,11 . . . . .	8	28
MEDIE	—	—		11', 2''	36', 6''
II	6	12	Stricnina mg 0,09 + Simpamina mg 1 . . . . .	—	—
	7	18	Stricnina mg 0,12 + Simpamina mg 1,8 . . . . .	—	—
	8	23	Stricnina mg 0,15 + Simpamina mg 2,3 . . . . .	—	—
	9	20	Stricnina mg 0,14 + Simpamina mg 2 . . . . .	—	—
	10	20	Stricnina mg 0,14 + Simpamina mg 2 . . . . .	—	—
III	11	23	Stricnina mg 0,15 + Simpamina mg 4,6 . . . . .	—	—
	12	28	Stricnina mg 0,2 + Simpamina mg 5,6 . . . . .	—	—
	13	20	Stricnina mg 0,14 + Simpamina mg 4 . . . . .	11	—
	14	20	Stricnina mg 0,14 + Simpamina mg 4 . . . . .	—	—
	15	29	Stricnina mg 0,2 + Simpamina mg 5,8 . . . . .	—	—
IV	16	23	Stricnina mg 0,15 + Simpamina mg 7 . . . . .	14	—
	17	18	Stricnina mg 0,12 + Simpamina mg 5,9 . . . . .	—	—
	18	15	Stricnina mg 0,11 + Simpamina mg 4,5 . . . . .	—	—
	19	20	Stricnina mg 0,14 + Simpamina mg 6 . . . . .	—	—
	20	20	Stricnina mg 0,14 + Simpamina mg 6 . . . . .	—	—



Diminuita eccitabilità, quest'ultima, che potrebbe, nel caso nostro, essere invocata per spiegare la scarsa reattività delle rane n. 17, 19 e 20 del secondo esperimento. Ma queste ricevevano dosi notevoli di simpamina, pari a 30 ctg pro chilo.

In conclusione, pur con tutte le riserve accennate, ci crediamo autorizzati, dall'insieme dei risultati ottenuti, a pensare che, non meccanismi nervosi di origine encefalica debbano giocare nell'impedire la comparsa delle manifestazioni stricniche per associazione con la simpamina, ma altri da determinare, e che pensiamo debbano ricercarsi nella formazione di composti di addizione tra la stricnina e la sostanza ad essa associata, quando siano iniettate nelle condizioni sperimentali riferite.

È sempre in questo senso che ci si ripromette di ulteriormente sperimentare, pur senza abbandonare il problema che le presenti osservazioni hanno aperto relativamente al comportamento di rane normali trattate con l'associazione stricnina-simpamina, e che, come si è detto prima, merita di essere adeguatamente analizzato e bene chiarito.

**Fisiologia.** — *Azione della caffeina sui riflessi spinali nella rana curarizzata e decerebrata* (\*). Nota di TORQUATO GUALTIEROTTI, presentata (\*\*) dal Socio R. MARGARIA.

Sono state descritte, nella Nota precedente, le modificazioni determinate da trattamento con caffeina nella risposta spinale della rana curarizzata intatta o parzialmente decerebrata. Poiché queste modificazioni erano notevolmente diverse nel trattamento locale dei centri encefalici rispetto al trattamento per iniezione, risultava assai probabile l'ipotesi di un'azione diretta della caffeina sui centri riflessi del midollo spinale.

Esperimenti con tecnica simile a quella usata per rane non decerebrate sono stati eseguiti usando sia rane rese spinali prima del trattamento con caffeina, sia decerebrando l'animale nei vari stadi dell'azione caffeinica. Inoltre caffeina è stata applicata localmente in vari punti del midollo e anche sul midollo *in toto* per mezzo del Ringer ossigenato di perfusione. Potenziali midollari d'azione, di riposo e sinaptici sono stati registrati dalle radici ventrali come nella serie precedente di esperimenti e in più potenziali sinaptici e attività afferente dovuta a stimolazione antidromica dei recettori periferici sono stati registrati dalle radici dorsali.

In seguito a iniezione di caffeina la stessa *parziale sincronizzazione dei potenziali d'azione* che era stata osservata negli animali non decerebrati è stata vista sia negli animali spinali che in animali spinalizzati quando questo fenomeno era già iniziato. Il numero di potenziali d'azione compo-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

nenti i singoli gruppi diminuiva però sensibilmente in questo ultimo caso. Nessun'altra variazione è stata osservata sia nei potenziali sinaptici motori, sia nel potenziale di riposo. La durata dell'azione della caffeina apparve assai inferiore che nell'animale integro, durando in media solo 40 minuti, anziché tre ore circa.

Sulle radici dorsali i *potenziali sinaptici aumentavano* fino a 4-5 volte la loro ampiezza originaria mentre l'attività afferente della periferia dopo un fugace transitorio aumento rimaneva normale. *La durata dei potenziali sinaptici diminuiva* invece sensibilmente, la loro sommazione temporale

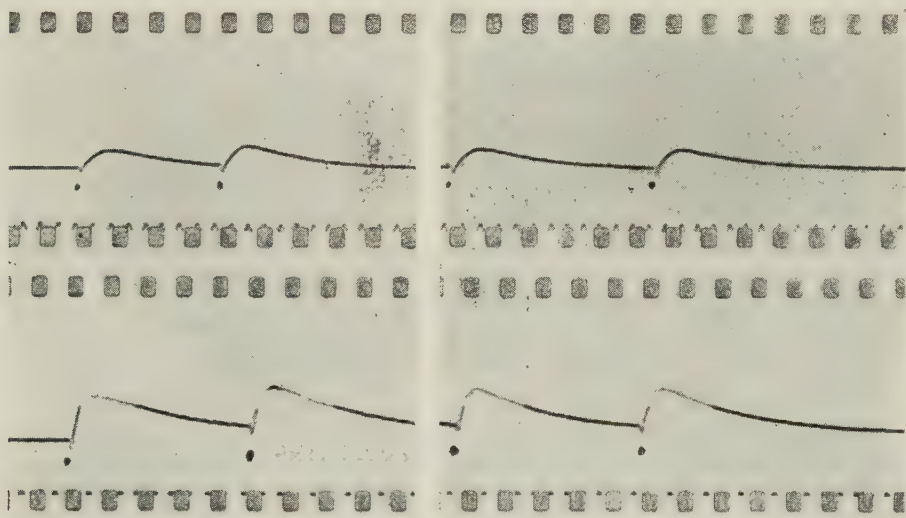


Fig. 1.

Tracciato in alto: potenziali sinaptici di rana spinale curarizzata, registrati da una radice sensitiva tagliata a valle. A sinistra i due primi stimoli (marcati da un punto nero); a destra, gli ultimi due stimoli. Stimolazione a 6 per secondo. Tracciato in basso: come sopra, dopo 15 minuti dall'iniezione in addome di caffeina. I potenziali sinaptici sono aumentati notevolmente di ampiezza e la loro durata si è raccorciata.

Segnatempo: senoide a 50 periodi/sec. (solo le punte estreme sono visibili). Negatività verso l'alto.

risultandone perciò di gran lunga minore. Questo fenomeno scompariva in meno di tre ore.

Le stesse variazioni su descritte per le radici ventrali e dorsali furono osservate in seguito a perfusione con Ringer ossigenato e caffeinizzato.

L'applicazione locale di pezzetti di carta da filtro imbevuti di caffeina 0,5 %, lunghi 4-5 mm, sulle varie sezioni del midollo, ivi compresa la sede del centro riflesso in esame, non provocarono alcun cambiamento nella risposta riflessa se era evitato un riassorbimento generale della sostanza.

Da questi risultati e da quelli descritti nella Nota precedente, si può dedurre che: l'effetto principale della caffeina sul Sistema Nervoso Centrale consiste presumibilmente in una *facilitata convergenza degli impulsi* sia sensitivi che motori sui vari centri, diminuendo i ritardi sinaptici e provocando

un bombardamento sincronizzato dei neuroni. Questo provocherebbe in conseguenza: 1° una più accentuata *depolarizzazione basale del midollo*; 2° una *sincronizzazione* crescente dei potenziali sinaptici sia sensitivi che motori, denunciata da un'onda risultante ad ampiezza maggiore e a durata minore; 3° una *risposta motoria breve, a scoppio*, denunciata dal raggrupparsi stricnino-simile dei potenziali d'azione stessi.

È possibile distinguere l'azione della caffeina da quella della stricnina: mentre entrambe facilitano generalmente la risposta riflessa, e tendono a sincronizzare i potenziali d'azione tra di loro, la caffeina non è capace di indurre autoritmicità né di provocare un grado di sincronizzazione tale da sostituire ai gruppi di potenziali d'azione un'onda unica sommatoria, quale si osserva nell'ultimo stadio dell'avvelenamento stricnico.

Un cordiale ringraziamento è dovuto ai Dott. Crippa e Berger per l'aiuto finanziario che ha reso possibile questa ricerca.

**Fisiologia umana.** — *Sul significato funzionale della sostanza fondamentale del cordone ombelicale* (\*). Nota di VINCENZO FAMIANI e AMALIA AMICI, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. AMANTEA.

Le ricerche (alcune delle quali relativamente recenti (Laguesse<sup>(1)</sup> Andreassi<sup>(2)</sup>, ecc.), relative alla struttura della sostanza fondamentale del cordone ombelicale, hanno messo in evidenza che essa è costituita da lamelle connettivali descriventi un sistema di lacune di varia grandezza, nell'interno delle quali si trova una sostanza amorfa che presenta le reazioni caratteristiche della mucina.

Le cellule del tessuto, che ricordano gli elementi mesenchimatici, sono contenute nello spessore delle lamelle, e così pure le fibre collagene, del tutto assenti nella sostanza fondamentale.

Pur essendo le lacune suddette di volume diverso, tuttavia esse, nel loro complesso, mostrano un tipo unico di comportamento generale, che può essere così descritto: più ampie verso la periferia, esse diventano più piccole man mano che si avvicinano alla zona centrale del cordone, ove si trovano i vasi, distinti, come è noto, in una vena e due arterie ombelicali. Attorno a questi le lamelle formano un involucro separato per ciascuno di essi e si presentano molto stipate, determinando la formazione di lacune assai più

(\*) Ricerche eseguite presso l'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Perugia.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) LAGUESSE, « Comptes rendus de l'Assoc. des Anatomistes », 22, Reunion de Londres (1927).

(2) ANDREASSI, « Ricerche di Morfologia », 22-27 (1944); ANDREASSI, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 132 (1927).

piccole che altrove; l'involucro di ciascun vaso è, come già detto, indipendente dagli altri, ciò che rende possibile di sfilare dal cordone i vasi stessi (almeno per un certo tratto).

Abbiamo voluto esaminare ancora attentamente la struttura della sostanza fondamentale del cordone, con lo scopo di valutarne, possibilmente, il significato funzionale.

Lo studio di numerosi funicoli ombelicali a diverso periodo di sviluppo, dal 5° mese fino alla nascita, ci ha permesso di osservare, oltre quanto riferito più sopra, che la struttura lamellare si accentua con il progredire dello sviluppo e che le lacune, pertanto, aumentano di ampiezza durante la vita intrauterina, specialmente verso la zona periferica del cordone; nel tempo stesso le lamelle si assottigliano e in taluni punti si usurano addirittura, in modo da formare lacune più ampie, contenenti una sostanza amorfa di consistenza sempre più tenue. Ed alla nascita, il cordone ombelicale, come si rileva dai preparati, si presenta costituito da sottilissime lamelle, nelle quali è anche diminuito il numero delle cellule, e che circoscrivono spazi lacunari molto ampi.

In complesso si nota aumento della sostanza fondamentale amorfa, che appare di consistenza molto tenue, e parallelamente diminuzione delle parti formate (lamelle, cellule, ecc.). Tale condizione ci è sembrato corrisponda alle esigenze funzionali dell'organo.

È noto infatti che alla nascita, dopo la sezione del cordone, il segmento fetale di esso rimane e va incontro ad un processo rapido di necrosi, onde dopo pochissimi giorni si è trasformato in un'escara di volume assai ridotto, che ben presto viene eliminata.

Il processo di necrosi procede molto più speditamente che nelle comuni necrosi, le quali si producano in altre formazioni. E la ragione di ciò è da ricercare appunto nella struttura stessa del cordone, specialmente durante l'ultimo periodo della vita intrauterina. Oltre alle cause già note, quali, per esempio, la mancanza di vasi propri, ecc., la grande abbondanza di sostanza fondamentale amorfa e la sua ricchezza in acqua, in confronto delle parti formate, fanno sì che in seguito all'essiccamento del cordone, i processi di necrosi progrediscono con ritmo accentuato, permettendone la rapida riduzione di volume, dovuta al fatto che, una volta eliminata l'acqua, la parte veramente cospicua, ben poco rimane della sostanza fondamentale, e pertanto il volume si riduce di molto e rapidamente.

È da tenere inoltre presente che durante la vita intrauterina le lacune possono modificare sensibilmente il loro contenuto in acqua, e quindi esercitare un ruolo notevole nei riguardi del liquido amniotico. Runge<sup>(3)</sup>, che si è particolarmente occupato della questione, ritiene che il cordone ombelicale prenda parte, insieme con le membrane, alla secrezione ed all'assorbimento del liquido amniotico stesso. Infatti le cavità costituite dalle lacune rappresentano degli spazi che possono contenere nel loro insieme una note-

(3) RUNGE, « Zentralbl. f. Gynäkologie », 5 (1937).



vole quantità di liquido, che può costituire il materiale dal quale le cellule epiteliali dell'amnios - alle quali è devoluta l'attività secernente - attingano le sostanze necessarie, che debbono passare nella cavità amniotica. Viceversa nei processi di riassorbimento, anch'essi effettuati dall'epitelio amniotico che riveste il cordone ombelicale, le lacune medesime costituiscono degli spazi ove si può raccogliere il liquido riassorbito.

In sostanza, gli spazi in questione permettono una migliore regolazione dei processi suddetti in quanto consentono al flusso del liquido amniotico delle variazioni più rapide di quelle che potrebbero essere consentite dalla sola permeabilità delle pareti vasali. In realtà, anche secondo Runge, è specialmente la vena capace di effettuare una tale azione, come ben si comprende, quando si consideri il minore spessore della sua parete in confronto con quello delle pareti delle arterie, e nonostante che in queste ultime il valore della pressione, calcolato da Runge, tocchi i 75 mm. di Hg, mentre non supera i 48 nella vena.

Runge si è anche domandato perché si abbia prevalentemente flusso dalla vena verso la cavità amniotica e non viceversa, mentre la pressione osmotica del sangue, tanto ricco in costituenti organici ed inorganici, è notevolmente maggiore di quella del liquido amniotico, assai povero di materiali.

La ragione di tanto può ritrovarsi nella pressione del sangue della vena, che riesce a vincere il dislivello osmotico. Infatti, se la pressione sanguigna si abbassa nella vena al di sotto dei 25 mm. di Hg, si osserva allora passaggio di liquido dalla cavità amniotica verso la vena, sempre per il tramite, s'intende, della sostanza fondamentale del funicolo ombelicale.

Il fatto che, per le ragioni suddette, sia piuttosto la vena a fornire il materiale per il liquido amniotico, può avere ancora un altro significato biologico: quello cioè di far sì che alla produzione del liquido amniotico prenda parte soltanto, o almeno prevalentemente, il sangue arterioso della vena ombelicale, anziché quello venoso delle arterie omonime.

La sostanza fondamentale del cordone ombelicale, per la sua struttura lacunare esplica, infine, azione protettiva per i vasi ombelicali; infatti la presenza di una sostanza a consistenza assai tenue nelle lacune opera in modo che eventuali azioni compressive si esercitino in tutte le direzioni (principio di Pascal), e pertanto divengano uniformi in tutto l'ambito del segmento di cordone interessato e quindi anche sulla parete dei vasi, rendendone le conseguenze molto più attenuate di quanto non lo sarebbero, invece, se si esercitassero solo in un punto.

In conclusione le nostre osservazioni mostrano che la struttura lacunare della gelatina di Wharton contribuisce alla regolazione del movimento del liquido amniotico, sia nel senso della secrezione, sia nel senso del riassorbimento; costituisce una base anatomica che favorisce il processo di necrosi fisiologica del cordone ombelicale dopo la nascita; conferisce una certa indipendenza ai vasi ombelicali mediante l'involucro che forma intorno a ciascuno; e infine rappresenta un sistema protettivo verso azioni meccaniche dannose per i vasi stessi.

**Fisiologia.** — *Sulla tossicità di determinati aminoacidi per le larve di « Bufo vulgaris » e sull'azione di singoli aminoacidi addizionati ad un alimento naturale e completo per detti organismi* (\*). Nota di GAETANO LIVREA e di GIULIANA COLLOTTI, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. AMANTEA (\*\*\*).

Il problema del valore biologico e della tossicità di determinati aminoacidi, serie l- e dl-, per l'accrescimento e la metamorfosi delle larve di *Bufo vulgaris* è già stato oggetto di alcune nostre osservazioni, apparse altrove (2).

Invero, intraprendendo quelle ricerche non intendevamo apportare soltanto un contributo all'anzidetto problema, già di per sé stesso importante, ma, avviandone la soluzione, cercavamo di fare i primi passi in due più vasti campi della nutrizione: quello della possibilità degli animali acquatici di nutrirsi solamente con sostanze disciolte nell'acqua e quello della possibilità di vita, di accrescimento e differenziazione di alcuni animali alimentati con dieta composta sinteticamente di sostanze solubili in acqua e povera di sostanze minerali. Nel primo caso ci riattaccavamo alle ricerche di A. Pütter (2) e nel secondo caso, in parte, a quelle di Famiani e Strada (3). Infine l'eventualità di risultati attendibili, ottenuti mercé l'impiego di una così semplice tecnica, come quella richiesta dal materiale biologico da noi adoperato, cioè le larve di *Bufo vulgaris*, ci avrebbe permesso di sottolineare definitivamente l'importanza di questo materiale per l'analisi, sia pure preliminare, di impegnativi problemi della nutrizione; punto, questo, sul quale in passato la nostra Scuola ha già richiamato l'attenzione.

In quelle prime ricerche sono stati studiati la glicina, la dl-alanina, la dl-valina, la dl-cisteina, la d-fenilalanina, la l-tirosina, la dl-tirosina, la l-istidina, la dl-lisina, l'ac. glutamico. I risultati più salienti sono stati i seguenti: 1° alcuni aminoacidi disciolti in acqua alla diluizione di g. 0,01 % (l-tirosina, ac. glutamico, dl-valina) e di g. 0,05 % (ac. glutamico, dl-lisina, dl-valina e l-tirosina) possono servire quale nutrimento alle larve di *Bufo vulgaris* ed assicurare, per un certo tempo, le necessità di un ricambio di

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma nel trimestre aprile-luglio 1951.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(\*\*\*) L'ideazione, il piano delle ricerche e la stesura della Nota appartengono al prof. G. Livrea. La parte sperimentale è stata eseguita in collaborazione (G. Amantea).

(1) G. LIVREA e P. ILLOVSKY, « Quad. della Nutriz. », 11, 260 (1950).

(2) A. PÜTTER, « Z. f. all. Phys. », 7, 283 (1908) e 9, 147 (1909).

(3) V. FAMIANI e A. STRADA, « Quad. della Nutriz. » 8, 116 (1942).

mantenimento; 2° l'ac. glutamico e la dl-valina, alla diluizione del 0,05 %, sono perfino capaci di permettere un aumento di sostanza vivente, cioè di assicurare un certo ricambio di costruzione; 3° la glicina, la dl-alanina, e la dl-tirosina sono molto tossiche rispettivamente alla diluizione del 0,01 %, del 0,05 % e in soluzione satura decantata; 4° l'addizione singola degli anzidetti aminoacidi al tuorlo d'uovo, dieta completa per le larve di *Bufo vulgaris*, ha determinato: a) nel caso della l-tirosina al 0,05 % un acceleramento della metamorfosi larvale; b) nel caso degli aminoacidi solforati, un migliore accrescimento e, nel caso della cisteina, una più elevata percentuale di metamorfosi; c) nel caso dei restanti aminoacidi un peggioramento delle qualità nutritive della dieta.

Prima di intraprendere la disamina delle cause, da cui dipendono gli anzidetti risultati, e delle questioni, che essi pongono, abbiamo voluto ricavare altri dati circa la tossicità e il valore biologico di singoli aminoacidi per le larve di *Bufo vulgaris* sia da soli, sia allorquando sono addizionati ad un alimento naturale e, secondo Cotronei, completo per gli anzidetti organismi, cioè il tuorlo d'uovo di gallina. A tale scopo abbiamo sperimentato con altri aminoacidi, per quanto ci è stato possibile della configurazione *levo*, che nei passati esperimenti non avevamo avuto modo di saggiare, e precisamente con i seguenti (4):

1° Monoaminoacidi alifatici propriamente detti: l-norleucina, dl-leucina, dl-isoleucina, l-serina, dl-treonina;

2° Monoaminoacidi alifatici con sostituyente aromatico: dl-fenilalanina;

3° Monoaminoacidi alifatici con sostituyente eterociclico: l-triptofano;

4° Diaminoacidi: arginina;

5° Aminoacidi dicarbossilici: ac. l-aspartico;

6° Iminoacidi: l-prolina.

La tecnica sperimentale seguita è stata quella estesamente esposta nell'altro lavoro (1) per cui qui, e solo per comodità del lettore, la riassumiamo soltanto: 1° impiego di larve non ancora alimentate e provenienti tutte dallo stesso cordone; 2° suddivisione delle larve in lotti uguali e mantenimento dei singoli lotti in adatti ed uguali recipienti di vetro trasparente, contenenti uguali quantità di liquido ed esposti ad uguali condizioni di illuminazione e di temperatura ambientali; 3° raggruppamento dei lotti nei seguenti gruppi: gruppo I dei lotti digiunanti in acqua di fonte; gruppo II dei lotti alimentati con tuorlo d'uovo di gallina coagulato al calore; gruppo III dei lotti alimentati, ciascuno, con uno soltanto degli anzidetti aminoacidi offerto nella diluizione di g. 0,01 % in acqua di fonte (acqua Marcia); gruppo IV dei lotti alimentati ciascuno con uno solo degli anzidetti aminoacidi offerto nella diluizione di g. 0,05 % in acqua di fonte; gruppo V dei lotti alimentati come quelli del gruppo III, con l'aggiunta, però, di tuorlo d'uovo al solito; gruppo VI dei lotti alimentati come quelli del gruppo IV, con l'aggiunta, però, di tuorlo; 4° rinnovamento dell'acqua e delle soluzioni nutritive per tutti i lotti a giorni alterni, trapas-

(4) Gli aminoacidi, tutti della Itarco Trading Corp., ci sono stati cortesemente forniti dall'Istituto Superiore di Sanità. Ci sia consentito di ringraziare vivamente nella persona del Direttore generale prof. D. Marotta.

sando i girini dalle vecchie alle nuove soluzioni mediante cauta aspirazione con adatto tubo di vetro munito di opportuno dispositivo aspiratorio; 5° controllo del pH dei liquidi popolati di larve; 6° misurazione della lunghezza media delle larve all'inizio dell'esperimento, e in seguito ogni 3 giorni, fino a differenziazione bene avviata, allorquando questa si è verificata; 7° controllo dell'epoca di comparsa degli arti anteriori e posteriori, dell'armonia e della chiusura della metamorfosi; 8° infine controllo della pigmentazione, della desquamazione, della motilità e della reattività dei girini.

In così lunghe e numerose osservazioni, i fenomeni osservati sono stati molteplici e la loro esposizione richiederebbe notevole tempo e, soprattutto, notevole spazio. Siamo quindi costretti, come nell'altro lavoro, a richiamare l'attenzione soltanto sui fenomeni più strettamente connessi con i problemi da noi perseguiti, vale a dire quelli della tossicità e del valore biologico degli aminoacidi in esame sia da soli, sia allorquando sono aggiunti ad un alimento naturale completo. Come indici di queste loro probabili proprietà abbiamo assunto i seguenti dati nel loro insieme: la durata media e massima di sopravvivenza; la percentuale delle larve sopravvissute al 20°, 30°, 40° e 50° giorno di esperimento, a seconda della condizione sperimentale; l'accrescimento medio, il tempo medio di comparsa dell'abbozzo degli arti anteriori e posteriori e la percentuale delle larve metamorfosate.

È chiaro che il raffronto del comportamento dei girini del gruppo I con quello dei gruppi III e IV avrebbe permesso di stabilire se i singoli aminoacidi disciolti in acqua erano assunti, se erano tossici e se, in caso di mancata tossicità, erano capaci tra l'altro di opporsi al depauperamento delle riserve dell'organismo larvale, operato nei lotti del gruppo I dalle condizioni di inanizione assoluta.

È chiaro altresì che il raffronto del comportamento dei girini del gruppo II con quello dei gruppi V e VI non solo avrebbe permesso di confermare l'assunzione dei singoli aminoacidi, ma anche se questi, in caso di mancata tossicità, influivano sulla capacità di accrescimento e di differenziazione, integrando o meno la dieta con tuorlo d'uovo.

Prima di esporre i risultati, occorre premettere *a)* che i lotti in sola acqua di fonte (fig. 1) hanno presentato, tra l'altro, un tempo di sopravvivenza medio di 26 giorni e massimo di 35, una percentuale di sopravvivenza al 30° giorno del 10 % di larve e un accrescimento medio di 0.3 mm circa e che *b)* i lotti alimentati con tuorlo d'uovo (fig. 2) hanno presentato tra l'altro, in rapporto alla sopravvivenza o alla metamorfosi, una durata media dell'esperimento di 38 giorni e massima di 45, un accrescimento medio di 7.7 mm ed una alta percentuale (70 %) di metamorfosi complete.

L'azione svolta dai singoli aminoacidi sulla sopravvivenza, l'accrescimento e la differenziazione è stata invece la seguente:

1° NORLEUCINA. — Alla diluizione di g. 0.01 % non si è mostrata dotata di qualche apprezzabile azione biologica, né di tossicità: difatti i lotti, ai quali è stata offerta, non hanno presentato un comportamento molto diverso da quello dei controlli in condizioni di inanizione. Alla diluizione di g. 0.05 %, invece, s'è mostrata capace di far fronte, ovviamente entro modestissimi limiti, alle necessità del ricambio di mantenimento: difatti, rispetto ai controlli in acqua di fonte, s'è notato un aumento del periodo medio e massimo di sopravvivenza delle larve e una percentuale di sopravvivenza del 20 % al di là del 30° giorno e del 10 % al 40° giorno.

Alla diluizione di g. 0.01 % addizionata di tuorlo coagulato, la norleucina ha allungato notevolmente il periodo medio e massimo di sopravvivenza, ha migliorato alquanto, in media di 1 mm, la capacità di accrescimento delle larve, ma ha ritardato l'inizio ed inibito l'evolversi della loro metamorfosi, la quale è stata principiata nell'80 % e completata solo nel 50 % dei casi. Alla diluizione del 0.05 % e con l'aggiunta di tuorlo, s'è accorciato il periodo medio e massimo di sopravvivenza, pur sempre restando più lungo di quello dei controlli, non s'è osservato l'anzidetto lieve miglioramento delle capacità di accrescimento e s'è accentuata la stentatezza dello sviluppo, tanto da aversi l'avvio della metamorfosi solo nel 60 % e il completamento solo nel 30 % delle larve.



TAVOLA.

Lotti	TRATTAMENTO	Media della lunghezza iniziale delle larve	pH del mezzo popolato di larve	Durata media dell'esperimento in rapporto alla sopravvivenza delle larve	Durata massima dell'esperimento in rapporto alla sopravvivenza delle larve	Media delle lunghezze osservate durante il tempo di sopravvivenza	Accrescimento medio in mm	Accorciamento medio in mm	Tempo medio nel quale si ebbe la comparsa dell'abbozzo degli arti		Percentuale delle larve sopravvissute al		
									posteriori	anteriori	20°	30°	40°
									giorno di esperimento				
		mm		giorni	giorni	mm	mm		gior.	gior.			
A	Acqua di fonte (Marcia) . . . . .	15	8	26	34	15.3	0.3	—	—	—	80	10	0
1	Acqua di fonte + norleucina g 0,01 %	»	8	23	29	15.2	0.2	—	—	—	80	10	0
2	» » » + dl-leucina »	»	7.5	25	32	15	0	—	—	—	90	10	0
3	» » » + dl-isoleucina »	»	7.5	26	29	15.7	0.7	—	—	—	100	20	0
4	» » » + serina »	»	7.5	25	34	15.7	0.7	—	—	—	90	30	0
5	» » » + treonina »	»	7.5	26	39	15.6	0.6	—	—	—	90	20	0
6	» » » + ac. aspartico »	»	7	24	29	14.6	—	0.4	—	—	90	0	—
7	» » » + arginina »	»	8	17	23	14.4	—	0.6	—	—	40	0	—
8	» » » + dl-fenilalanina »	»	8	27	45	15	0	—	—	—	90	10	10
9	» » » + l-prolina »	»	7	27	38	15.2	0.2	—	—	—	90	40	0
10	» » » + triptofano »	»	7.5	25	34	14.6	—	0.4	—	—	90	20	0
21	» » » + norleucina g 0.05 %	»	8	32	40	15.4	0.4	—	—	—	80	20	10
22	» » » + dl-leucina »	»	7.5	12	23	13.3	—	1.7	—	—	10	0	—
23	» » » + dl-isoleucina »	»	7.5	28	39	15.5	0.5	—	—	—	100	20	0
24	» » » + serina »	»	8	16	23	14.9	—	0.1	—	—	20	0	—
25	» » » + treonina »	»	8	25	30	15.7	0.7	—	—	—	100	10	—
26	» » » + ac. aspartico »	12	7	10	20	12.6	—	0.4	—	—	10	0	—
27	» » » + arginina »	»	8	4	4	—	—	—	—	—	0	—	—
28	» » » + dl-fenilalanina »	»	8	25	35	15.5	0.5	—	—	—	90	30	10
29	» » » + l-prolina »	»	7	22	32	15.0	0	—	—	—	100	10	0
30	» » » + triptofano »	»	7.5	23	28	15.5	0.5	—	—	—	90	0	—

TRATTAMENTO	Media della lunghezza iniziale delle larve		pH del mezzo popolato di larve	Durata media dell'esperimento in rapporto alla sopravvivenza delle larve		Durata massima dell'esperimento in rapporto alla sopravvivenza delle larve	Media delle lunghezze massime osservate intorno al 30° giorno di sopravvivenza		Accrescimento medio in mm		Tempo medio nel quale si ebbe la comparsa dell'abbozzo degli arti		Percentuale delle larve sopravvissute al		Percentuale delle larve nelle quali la metamorfosi fu	
	mm			giorni	giorni		mm	mm	gior.	gior.			30°	50°	giorno di esperimento	iniziata
Acqua di fonte (Marcia) + torlo . . . . .	15	7.5	38	45	22.7	7.7	28	38	100	—	100	70				
» » » + torlo + l-norleucina g 0.01%	»	8	54	97	23.8	8.8	35	47	100	60	80	50				
» » » + » + dl-leucina »	»	8	48	90	23.5	8.5	35	42	100	40	100	60				
» » » + » + dl-isoleucina »	»	7.5	48	100	23.3	8.3	34	39	100	50	90	60				
» » » + » + serina »	»	7.5	46	78	20.0	5.0	38	48	90	70	40	30				
» » » + » + treonina »	»	8	59	92	21.3	6.3	32	47	100	70	60	50				
» » » + » + ac. aspartico »	»	7.5	52	79	22.1	7.1	28	37	100	40	70	50				
» » » + » + arginina »	»	7.5	6	12	—	0.6	—	—	0	—	0	—				
» » » + » + dl-fenilalanina »	»	7.5	47	80	23.6	8.6	28	36	100	40	100	80				
» » » + » + l-prolina »	»	7.5	41	64	21.3	6.3	30	34	90	30	80	10				
» » » + » + triptofano »	»	8	54	74	21.1	6.1	34	39	100	70	70	20				
» » » + » + norleucina g 0.05 %	»	8	44	55	22.7	7.7	36	45	100	40	60	30				
» » » + » + dl-leucina »	»	7.5	19	26	19.5	4.5	—	—	0	0	0	0				
» » » + » + dl-isoleucina »	»	8	32	52	21.3	6.3	30	30	90	10	10	0				
» » » + » + serina »	»	7.5	2	3	—	0	—	—	0	0	0	0				
» » » + » + treonina »	»	8	20	24	—	3.5	—	—	—	—	0	—				
» » » + » + ac. aspartico »	»	7.5	3	3	—	0	—	—	—	—	—	—				
» » » + » + arginina »	»	8	3	3	—	0	—	—	—	—	—	—				
» » » + » + dl-fenilalanina »	»	8	55	67	20.3	5.1	46	54	100	90	50	10				
» » » + » + l-prolina »	»	7.5	3	3	—	0	—	—	—	—	—	—				
» » » + » + triptofano »	»	8	25	37	19	4	—	—	70	0	0	0				

2° dl-LEUCINA. - Per la diluizione al 0.01 %, da sola o con l'aggiunta del tuorlo, vale press'a poco quanto s'è detto per la norleucina. Le lievi differenze di comportamento rispetto a questa appaiono dalla tavola annessa. Alla diluizione di g. 0.05 % invece, s'è manifestata la comparsa di segni, che dobbiamo ritenere tossici: le larve hanno perso la loro mobilità, hanno presentato la coda corrugata o sbrindellata e sono morte nella maggior parte (70 %) nei primi 9 giorni di esperimento. L'aggiunta del tuorlo non è servita grandemente ad attenuare l'anzidetta tossicità: in effetti, rispetto a quello dei controlli, il periodo medio di sopravvivenza s'è ridotto di 19 giorni, l'accrescimento è stato molto stentato e nessuna larva s'è avviata alla metamorfosi.

3° dl-IOLEUCINA. - Alla diluizione del 0.01 % non solo ha assicurato un mantenimento dei girini alquanto migliore, ma ha permesso anche un apparente aumento di sostanza vivente: difatti al 20° giorno la sopravvivenza delle larve era del 100 % e il loro accrescimento medio di 0.7 mm. Alla diluizione del 0.05 %, la percentuale di sopravvivenza è rimasta invariata e l'accrescimento medio è alquanto diminuito.

Alla diluizione del 0.01 % addizionata di tuorlo, il periodo medio e massimo di sopravvivenza s'è allungato notevolmente e l'accrescimento medio è stato superiore a quello dei controlli; la differenziazione, invece, è stata alquanto ritardata, pur essendosi per altro completata quasi nella stessa percentuale dei controlli. Alla diluizione del 0.05 % addizionata di tuorlo, all'opposto, l'accrescimento è peggiorato e, malgrado il lungo periodo medio e l'alta percentuale di sopravvivenza, soltanto il 10 % delle larve ha presentato il primo inizio della metamorfosi, abbozzando gli arti e in qualche caso in modo abnorme, cioè pronunciando prima e più gli arti anteriori che quelli posteriori.

4° SERINA. - Per la diluizione al 0.01 % vale ad un di presso quanto s'è detto per la dl-isoleucina. La diluizione al 0.05 %, invece, è apparsa dotata di azione alquanto tossica: difatti non ha più consentito l'anzidetto modico accrescimento delle larve, ha diminuito grandemente la loro motilità e reattività ed ha provocato la morte del 70 % di esse nelle prime 2 settimane (fig. 3).

Addizionando il tuorlo alla soluzione più debole di serina, s'è ottenuto un notevole peggioramento delle capacità nutritive possedute dal solo tuorlo; difatti l'accrescimento è diminuito in media di 2.7 mm. e, malgrado l'elevato periodo medio di sopravvivenza, s'è mantenuta bassa la percentuale delle metamorfosi iniziate (40 %) e completate (30 %) (fig. 4). Addizionando, invece, il tuorlo alla soluzione più concentrata s'è ottenuta un'accentuazione dell'azione tossica già manifestata dalla sola soluzione al 0.05 %: difatti il risultato di esperimento ripetuto tre volte è stato sempre la morte dei lotti in 48-70 ore circa (fig. 5).

5° TREONINA. - Per le due soluzioni semplici vale press'a poco quanto si è detto per l'isoleucina. Addizionando ad esse il tuorlo, anche questa volta non è stato possibile osservare un miglioramento delle qualità nutritive di tale alimento: difatti, nella concentrazione minore, la treonina ha peggiorato alquanto i processi di accrescimento e di sviluppo e, nella concentrazione maggiore, ha determinato, dapprima una notevole diminuzione della motilità e della reattività larvale e, di poi, un forte aggrinzamento della coda e intorno al 20° giorno la morte.

6° ACIDO ASPARTICO. - Alla diluizione del 0.01 %, non si è mostrato capace di particolari azioni, se si eccettua una lieve diminuzione della lunghezza iniziale delle larve. Al 0.05 %, invece, ne ha determinato la morte: in quelle di due lotti nello spazio di 2 giorni e in quelle di un terzo, provenienti da un diverso cordone e in uno stato di sviluppo meno avanzato, in media in 10 giorni (5).

Addizionando il tuorlo alla soluzione debole di acido aspartico, sono peggiorati alquanto i processi dell'accrescimento e della metamorfosi; addizionandolo alla soluzione più con-

(5) Nella tavola si riportano soltanto i risultati di questo secondo esperimento, i quali, sia detto incidentalmente, fanno pensare ad eventuali modificazioni dell'azione degli aminoacidi in rapporto ai differenti periodi della vita larvale.

centrata è comparsa una decisa tossicità, per cui le larve di due lotti sono morte in 3 giorni (fig. 6) e quelle di un terzo in 5 (6).

7° ARGININA. — È stato il più nocivo degli aminoacidi sperimentati. Tale qualità rivelata già dalla soluzione al 0.01 % (fig. 7), con la quale s'è avuto il più basso tempo di sopravvivenza e la più bassa percentuale di sopravvivenza al 20° giorno, è apparsa nettissima alla concentrazione del 0.05 % (fig. 8), alla quale in tre esperimenti ha determinato la morte dei lotti nello spazio di 4 giorni circa.

L'aggiunta del tuorlo non ha modificato questa dannosa azione dell'arginina: la morte dei lotti si è avuta in 6 giorni, in media, alla concentrazione minore e in 4 alla concentrazione maggiore (figg. 9 e 10).

8° dl-FENILALANINA. — Alla diluizione del 0.01 % ha permesso la sopravvivenza del 10 % delle larve al di là del 40° giorno. Al 0.05 %, accanto ad una buona percentuale di sopravvivenza (30 %) al di là del 30° giorno, ha anche permesso un modico accrescimento delle larve, in media di 0.5 mm.

Addizionata di tuorlo, la soluzione più debole di fenilalanina è stata la sola che è riuscita a migliorare nettamente sia l'accrescimento che la differenziazione dei girini: con essa si è ottenuto infatti un accrescimento medio di 8.6 mm. e la più alta percentuale di metamorfosi complete (80 %).

La soluzione più concentrata, invece, ha peggiorato le qualità nutritive del tuorlo: difatti l'accrescimento dei girini è diminuito, in media di 3 mm, la metamorfosi si è iniziata con molto ritardo soltanto nel 50 % dei casi e, malgrado il lungo periodo medio di sopravvivenza, si è completata soltanto nel 10 %.

9° l-PROLINA. — Da sola, alla diluizione del 0.01 %, s'è mostrata capace di assicurare un mantenimento dei lotti alquanto migliore, per cui si è avuta una più elevata percentuale di sopravvivenze; ad esempio del 40 % al 30° giorno. Alla diluizione del 0.05 % tale capacità è scomparsa.

Addizionando il tuorlo alla soluzione più diluita, il tempo di sopravvivenza delle larve è stato prolungato, ma l'accrescimento è stato stentato (in media 6.3 mm) e il processo della metamorfosi notevolmente ostacolato (solo il 10 % di metamorfosi complete). Con l'aggiunta del tuorlo alla diluizione del 0.05 % è comparsa una netta tossicità, per cui i lotti sono morti in 3 giorni circa.

10° TRIPTOFANO. — Pur notandosi un lievissimo accorciamento delle larve, questo aminoacido alla diluizione del 0.01 % ha assicurato un mantenimento dei lotti alquanto migliore rispetto a quello dei lotti in condizione di inanizione. Alla diluizione del 0.05 % ha invece determinato un accrescimento medio di 0.5 mm.

Addizionando il tuorlo alle due soluzioni, le capacità nutritive di questo sono peggiorate proporzionalmente alla concentrazione dell'aminoacido; difatti alla diluizione del 0.01 % il periodo di sopravvivenza media è stato di 54 giorni, l'accrescimento medio di 6 mm e la percentuale delle metamorfosi complete del 20 %; alla diluizione del 0.05 %, invece, il periodo di sopravvivenza media si è ridotto a 25 giorni, l'accrescimento medio è stato di 4 mm e le metamorfosi sono mancate completamente.

La considerazione panoramica degli anzidetti risultati permette di concludere che:

1° Le larve di *Bufo vulgaris* assorbono e in certi casi assimilano gli aminoacidi disciolti in acqua;

2° Alcuni aminoacidi, nella fattispecie la dl-fenilalanina, la prolina e la norleucina, da soli, disciolti singolarmente in acqua in adatta quantità, sembrano capaci di consentire alle larve un modestissimo ricambio di mantenimento;

(6) Nella tavola si riportano soltanto i dati relativi ai primi due esperimenti.



3° Alcuni altri aminoacidi, quali ad esempio l'isoleucina, la serina, la treonina e la fenilalanina, disciolti singolarmente in acqua in adatta quantità, sembrano capaci di consentire un modestissimo aumento di sostanza vivente delle larve, cioè un certo ricambio di costruzione;

4° Alcuni altri aminoacidi sono invece tossici già in tenue concentrazione, ad esempio l'arginina alla concentrazione del 0.01 %, altri in concentrazione alquanto maggiore, ad esempio al 0.05 %, in ordine crescente di tossicità: la serina, l'ac. aspartico, la dl-leucina e l'arginina;

5° L'aggiunta del tuorlo d'uovo di gallina non riesce ad attenuare l'azione tossica propria di questi aminoacidi, anzi al contrario quasi sempre la rinforza e ne determina la comparsa nelle soluzioni di altri che da sole (ad esempio in quelle di treonina, di prolina, ecc.) ne erano apparentemente sprovviste;

6° Ad eccezione della fenilalanina, nessuno degli aminoacidi studiati ha migliorato alla concentrazione del 0.01 % le qualità nutritive del tuorlo, così da aumentare insieme la capacità di accrescimento e di differenziazione delle larve. All'anzidetta concentrazione alcuni aminoacidi, quali la norleucina, la leucina e l'isoleucina, aggiunti al tuorlo, hanno migliorato l'accrescimento ma hanno sempre inibito più o meno la differenziazione.

Nel caso dell'addizione di uno qualunque degli aminoacidi alla concentrazione del 0.05 % la regola costante è stato il peggioramento delle qualità nutritive del tuorlo e quindi della capacità di accrescimento e sviluppo delle larve.

Questi risultati confermano ed allargano i dati da noi precedentemente ottenuti e già pubblicati, pongono maggiormente a fuoco il problema della tossicità propria di alcuni aminoacidi, almeno per le larve di *Bufo vulgaris* e dimostrano chiaramente la dannosità quasi generale dell'addizione di singoli aminoacidi ad un alimento completo predisposto dalla natura proprio per l'accrescimento e lo sviluppo <sup>(7)</sup>.

(7) Persistendo nell'indagine bibliografica, allorché queste ricerche erano già ultimate, siamo venuti a conoscenza degli studi condotti da F. GUDERNATSCH ed O. HOFFMANN <sup>(8)</sup> appunto sugli « aminoacidi quali fattori di accrescimento e di differenziazione degli anfi ». A parte la diversità del nostro assunto finale, le condizioni sperimentali sono state diverse; basti dire che Gudernatsch e Hoffmann: 1° si sono serviti di una dieta basale per altro non comunicata, costituita da sostanze chimicamente pure e nella quale i corpi azotati in diverse concentrazioni erano rappresentati o da singoli o da due o da tre o da varie miscele contenenti fino a 14 aminoacidi naturali; 2° hanno adoperato un differente materiale biologico, costituito in alcune ricerche dalle larve di *Rana sylvatica* e *Rana pipiens* e in altre di *Rana sphenoccephala*; 3° non hanno considerato alcuni aminoacidi da noi invece considerati; 4° non hanno tenuto presente il problema per noi preminente della tossicità. È interessante che, ad onta delle diverse condizioni, alcuni nostri risultati, ad esempio quelli con la tirosina, la fenilalanina e la cistina, concordano con quelli di Gudernatsch e Hoffmann.

(8) F. GUDERNATSCH e O. HOFFMANN, « Amer. Journ. of Physiol. », 97, 527 (1931); 109, 55 (1934); 113, 57 (1935).

La curva *a* dimostra l'andamento della sopravvivenza delle larve: ad ogni 3.3 mm sull'ordinata corrisponde 1 larva.

La curva *b* dimostra l'andamento dell'accrescimento in lunghezza: ad ogni 2 mm sull'ordinata corrisponde 1 mm di accrescimento.

Le curve *c* e *d* dimostrano l'andamento della comparsa degli abbozzi degli arti posteriori, rispettivamente anteriori: ad ogni 3.3 mm sull'ordinata corrisponde una larva.

Fa eccezione la fig. 4, in cui sull'ordinata ad ogni 2.5 mm corrisponde una larva e ad ogni 1.5 mm corrisponde 1 mm di accrescimento.



Fig. 1. - Acqua di fonte.



Fig. 2. Acqua di fonte + uovo.

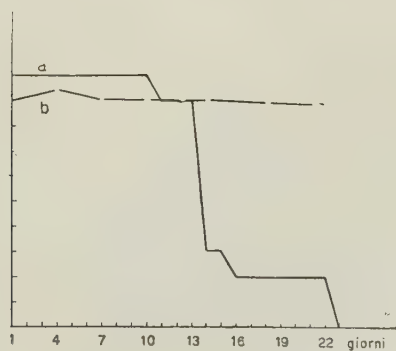


Fig. 3. - Acqua di fonte + serina al 0.05 %.

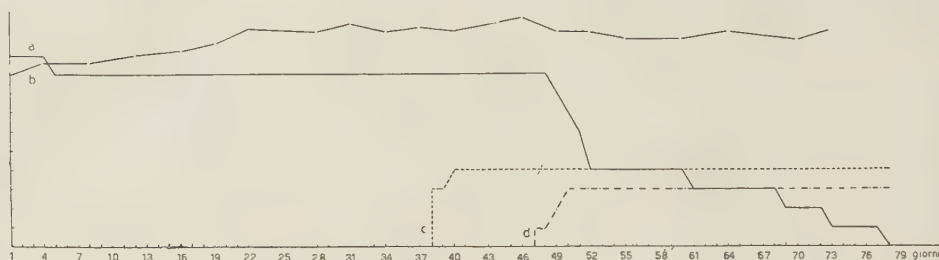


Fig. 4. - Acqua di fonte + uovo + serina al 0.01 ‰.



Fig. 5. - Acqua di fonte + uovo + serina al 0.05 ‰.



Fig. 6. - Acqua di fonte + uovo + ac. aspartico al 0.05 ‰.

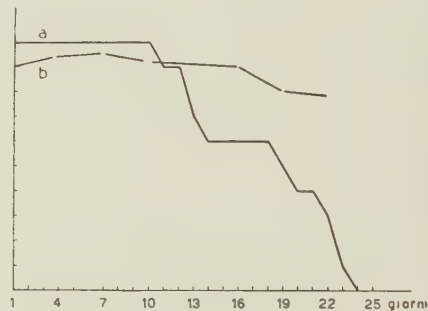


Fig. 7. - Acqua di fonte + arginina al 0.01 ‰.



Fig. 8. - Acqua di fonte + arginina al 0.05 ‰.

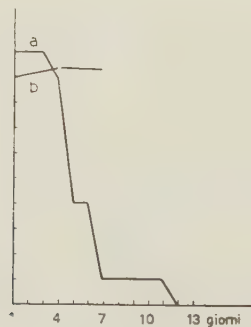


Fig. 9. - Acqua di fonte + uovo + arginina al 0.01 ‰.



Fig. 10. - Acqua di fonte + uovo + arginina al 0.05 ‰.

**Fisiologia.** — *Effetti delle condizioni di lavoro del muscolo scheletrico sulla depolarizzazione post-tetanica* <sup>(\*)</sup>. Nota di FRANCESCO INFANTELLINA e GIUSEPPE LA GRUTTA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. C. PUPILLI.

La contrazione di un muscolo che lavora in regime di isometria assoluta, determina un aumento della sua impedenza trasversale, che a contrazione cessata permane per alcuni minuti [Dubuisson <sup>(1)</sup>]; la contrazione effettuata in condizioni di isometria non assoluta, è all'opposto accompagnata e seguita da una diminuzione della impedenza muscolare [Dubuisson <sup>(2,3,4)</sup>, Infantellina <sup>(5)</sup>]. La impedenza trasversale del muscolo scheletrico quindi si modifica, per effetto della contrazione, in modo diverso secondo le condizioni di lavoro, isotoniche o isometriche, del muscolo.

Sono note le relazioni intercorrenti tra impedenza e polarizzazione [Dubuisson <sup>(2,3,6)</sup>, Monnier <sup>(7)</sup>, Dubuisson e Vandervael <sup>(8)</sup>]: abbiamo quindi preso in esame le modificazioni del potenziale di lesione del muscolo scheletrico dopo tetano isotonico e dopo tetano isometrico assoluto.

Circa alla polarizzazione muscolare, è stato dimostrato che la stimolazione tetanizzante di un muscolo scheletrico è seguita da una caduta del livello di polarizzazione, la quale perdura alcuni minuti [Brown e von Euler <sup>(9)</sup>, Bernhard e von Euler <sup>(10)</sup>, Ling e Gerard <sup>(11)</sup>, Infantellina <sup>(5)</sup>]: questo risultato è stato ottenuto in condizioni di lavoro che si possono dire di isometria non assoluta o che non siano state ben precisate.

Abbiamo sperimentato sul M. sartorio di *Rana esculenta*. Al muscolo, prelevato in modo da rispettarne al massimo la integrità, venivano lasciate le sue inserzioni, prossimale e distale. Le condizioni di assoluta isometria erano ottenute fissando a mezzo di due morsette, le estremità del muscolo: la lunghezza che ad esso era imposta, corrispondeva a quella medesima del

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) M. DUBUISSON, « J. Physiol. », LXXXIX, 132 (1937).

(2) M. DUBUISSON, « Arch. int. Physiol. », XXXVII, 35 (1933).

(3) M. DUBUISSON, « Arch. int. Physiol. », XXXVIII, 85 (1934).

(4) M. DUBUISSON, « Arch. int. Physiol. », XLI, 177 (1935).

(5) F. INFANTELLINA, « Arch. Sci. biol. », XXXVII, 533 (1953).

(6) M. DUBUISSON, *Les ionogrammes de la contraction musculaire*. Paris, Hermann (1934).

(7) A. M. MONNIER, *L'excitation électrique des tissus*. Paris, Hermann (1934).

(8) M. DUBUISSON et F. VANDERVAEL, « Arch. int. Physiol. », XL, 173 (1934).

(9) G. L. BROWN a. U. S. VON EULER, « J. Physiol. », XCIII, 39 (1938).

(10) C. G. BERNHARD a. U. S. VON EULER, « Acta physiol. scand. », III, 351 (1941-1942).

(11) G. LING a. R. W. GERARD, « J. cell. comp. Physiol. », XXXIV, 413 (1949).



muscolo *in situ* misurata a mezzo di un compasso, essendo l'arto pelvico in estensione massima. Per attuare le condizioni d'isotonia, il muscolo era sottoposto ad una tensione sufficiente a fargli assumere una lunghezza pari a quella misurata nel modo dianzi descritto.

Gli esperimenti sono stati eseguiti su muscoli normali e su muscoli trattati con acido monobromacetico o con procaina. Tali sostanze, come sarà detto appresso, agiscono in modo diverso sulla polarizzazione muscolare.

Abbiamo misurato il potenziale di lesione del M. sartorio, procedendo alla determinazione prima di una stimolazione tetanizzante e dopo, a intervalli di 30-180 sec, fino al ripristino dei valori pre-tetanici o fino alla stabilizzazione del livello di polarizzazione. Prima dell'esperimento i preparati venivano conservati in liquido di Ringer preparato secondo Tobias<sup>(12)</sup> per la durata di 6 h a 20°C, ogni muscolo essendo tenuto immerso in una quantità di liquido pari a 25 ml; in tal modo si ottiene una buona stabilizzazione del livello di polarizzazione. Per le misurazioni eseguite su muscoli trattati con acido monobromacetico o con procaina, il preparato veniva immerso avanti la stimolazione nella soluzione della sostanza in esame e ivi lasciato per min 30; abbiamo usato una soluzione di acido monobromacetico  $0,24 \times 10^{-3} M$  e una soluzione di procaina (cloridrato)  $0,73 \times 10^{-3} M$  in liquido di Ringer-Tobias.

Per la misura del potenziale di lesione ci siamo serviti dell'elettrometro a due triodi di Dubuissou e Debot<sup>(13)</sup>. Gli elettrodi erano del tipo Lapicque; il contatto col muscolo era assicurato mediante un batuffolo di ovatta affilato e impregnato di soluzione di NaCl al 0,7 %. Un elettrodo veniva posto a contatto di un punto leso della superficie del muscolo, la lesione essendo stata effettuata mediante una bacchettina di vetro arroventata; l'altro elettrodo era a contatto della superficie illesa del muscolo, la distanza tra i due elettrodi essendo di cm 2,5-3.

La stimolazione tetanizzante era diretta e della durata di 5 sec; essa veniva effettuata mediante un generatore di onde rettangolari a valvole. Gli stimoli erano massimali e la loro frequenza era di 50 al sec; gli elettrodi di stimolazione erano fili di Ag-AgCl. Durante l'esperimento il preparato era mantenuto costantemente in camera umida e alla temperatura di 18°-20°C.

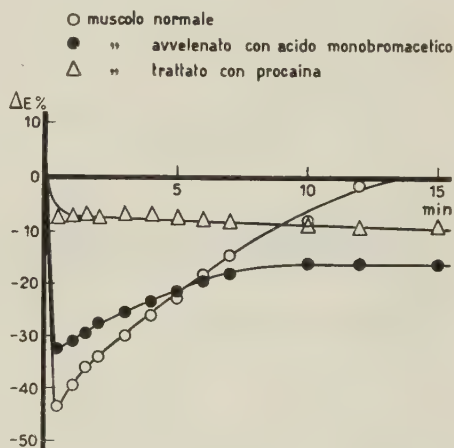
I risultati ottenuti sono riportati in diagramma nelle figg. 1 e 2. Vi sono riprodotte le curve delle variazioni percentuali del potenziale di lesione del M. sartorio in funzione del tempo, dopo tetano isotonico (fig. 1) e dopo tetano isometrico assoluto (fig. 2); le tre curve di ciascun diagramma si riferiscono al muscolo normale, al muscolo trattato con acido monobromacetico e a quello trattato con procaina. Le curve rappresentano i valori medi. È stato calcolato il *t* di Student e il livello di probabilità.

(12) J. TOBIAS, « J. cell. comp. Physiol. », XXXVI, 1 (1950).

(13) M. DUBUISSON et H. DEBOT, « Arch. int. Physiol. », L, 54 (1940).

*Effetti del tetano isotonico* (fig. 1). — 1° Nel muscolo normale, il potenziale di lesione si abbassa, presentando 20 sec dopo la fine del tetano <sup>(14)</sup> una diminuzione del 43,7 %; il livello di polarizzazione viene poi elevandosi lentamente, fino a raggiungere il valore pre-tetanico 12–13 min ca. dopo la fine del tetano. 2° Nel muscolo avvelenato con acido monobromacetico, l'abbassamento del livello di polarizzazione raggiunto 20 sec dopo la fine del tetano è del 32,6 %; la depolarizzazione poi diminuisce, il potenziale di lesione raggiungendo in 10 min ca. un valore inferiore del 16 % a quello pre-tetanico; tale valore si mantiene praticamente invariato fino a 15 min dopo la fine del tetano. 3° Nel muscolo trattato con procaina, il potenziale di lesione dopo tetano si abbassa e presenta 20 sec dopo la fine della stimolazione tetanizzante, una diminuzione del 7,3 %; tale abbassamento permane pressoché invariato fino a 15 min dopo la fine della stimolazione tetanizzante.

Fig. 1. — Da esperimenti eseguiti su tre gruppi omogenei di preparati di *M. sartorio* di *R. esculenta*: sull'asse delle ascisse è riportato il tempo in min dalla fine del tetano, corrispondente al tempo 0; sull'asse delle ordinate sono le variazioni percentuali del potenziale di lesione muscolare dopo tetano isotonico. Stimolazione tetanizzante diretta, massimale, della durata di sec 5; frequenza degli stimoli 50 al sec. Le tre curve si riferiscono al muscolo normale, al muscolo trattato con acido monobromacetico ( $0,24 \times 10^{-3}$  M) e al muscolo trattato con procaina ( $0,73 \times 10^{-3}$  M) per min 30.



*Effetti del tetano isometrico assoluto* (fig. 2). — 1° Nel muscolo normale, la diminuzione del potenziale di lesione del *M. sartorio* in seguito a tetano, 20 sec dopo la fine della stimolazione, è del 16,8 %; il livello di polarizzazione poi aumenta, raggiungendo transitoriamente (4 min ca. dopo la fine del tetano) un valore superiore del 2,0 % a quello avanti il tetano; il ritorno ai valori di polarizzazione pre-tetanici avviene 7 min ca. dopo la fine del tetano. 2° Nel muscolo avvelenato con acido monobromacetico, 20 sec dopo la fine del tetano, la depolarizzazione è del 13,3 %; tale effetto permane invariato dopo min 15. 3° Nel muscolo trattato con procaina, durante i primi 10 min successivi alla fine del tetano, il potenziale di lesione si presenta modicamente aumentato; il ritorno al livello di polarizzazione pre-tetanico si effettua 12 min ca. dopo la fine della stimolazione tetanizzante.

(14) Col metodo potenziometrico non è possibile effettuare misure sistematiche esatte in un tempo inferiore a 15–20 sec. Controlli eseguiti mediante registrazione ottica delle modificazioni post-tetaniche della polarizzazione muscolare, hanno mostrato che la depolarizzazione registrata 20 sec dopo la fine del tetano è di poco inferiore (in media del 5–6 %) a quella massima registrata 2–4 sec dopo il tetano.

Determinazioni eseguite di tempo in tempo fino a 2 h dalla stimolazione tetanizzante, hanno mostrato che nel muscolo avvelenato con acido monobromacetico la depolarizzazione residua dopo tetano isotonico e quella stabilitasi dopo tetano isometrico sono irreversibili; pure irreversibile è la depolarizzazione che si manifesta dopo tetano isotonico del muscolo trattato con procaina. L'aumento massimo del potenziale di lesione, riscontrato 1 min dopo la fine del tetano isometrico del muscolo trattato con procaina, è stato del 2,8 %. Facciamo subito osservare che questo lieve aumento non è statisticamente significativo ( $t = 1,9$ ;  $P < 0,1$ ); si deve pertanto ritenere che il livello di polarizzazione presenta variazioni che rientrano nell'ordine di grandezza dell'errore sperimentale.

Secondo Bernhard e von Euler<sup>(10)</sup>, la depolarizzazione muscolare post-tetanica è formata dalla sommazione dei singoli potenziali postumi negativi, che seguono i potenziali d'azione provocati dai componenti elementari della

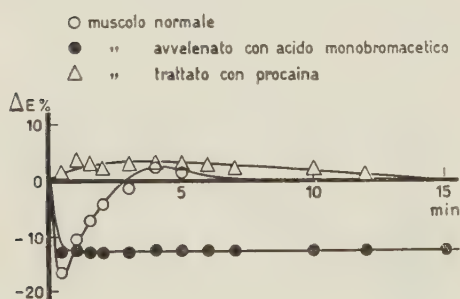


Fig. 2. - Da esperimenti eseguiti su tre gruppi omogenei di preparati di *M. sartorio* di *R. esculenta*: sull'asse delle ascisse è riportato il tempo in min dalla fine del tetano, corrispondente al tempo 0; sull'asse delle ordinate sono le variazioni percentuali del potenziale di lesione muscolare dopo tetano isometrico assoluto. Stimolazione tetanizzante diretta, massimale, della durata di sec 5; frequenza degli stimoli 50 al sec. Le tre curve si riferiscono al muscolo normale, al muscolo trattato con acido monobromacetico ( $0,24 \times 10^{-3} M$ ) e al muscolo trattato con procaina ( $0,73 \times 10^{-3} M$ ) per min 30.

stimolazione tetanizzante. Il potenziale postumo muscolare è l'espressione dei fenomeni metabolici e di restauro della contrazione [Schaefer<sup>(15)</sup>, Rosenblueth, Wills e Hoagland<sup>(16)</sup>]; occorre tuttavia precisare che solo una parte della carica elettrica della membrana cellulare può riferirsi a natura metabolica, essendo l'altra di natura strutturale, vale a dire inerente alla struttura organizzata [Ling e Gerard<sup>(11)</sup>, Tobias<sup>(12)</sup>, Crepax e Zappoli<sup>(17)</sup>]. Nel *M. sartorio* di *Rana esculenta*, la quota metabolica e quella strutturale del potenziale di membrana costituirebbero rispettivamente il 30 e il 70 % della polarizzazione [Crepax e Zappoli<sup>(17)</sup>].

Riferendoci a tali percentuali, dobbiamo desumere che l'abbassamento della polarizzazione (del 43,7 %) riscontrata nel *M. sartorio* normale dopo un tetano isotonico può dipendere dalla perdita della sola quota strutturale o di parti aliquote delle frazioni metabolica e strutturale, e non esclusivamente dalla perdita della sola quota metabolica. Per quel che riguarda

(15) H. SCHAEFER, *Elektrophysiologie*, I Band. Wien, Deuticke (1940).

(16) A. ROSENBLUETH, J. H. WILLS a. H. HOAGLAND, « *Amer. J. Physiol.* », CXXXIII, 724 (1941).

(17) P. CREPAX e R. ZAPPOLI, « *Arch. Sci. biol.* », XXXVI, 611 (1952).

la depolarizzazione del muscolo normale dopo tetano isometrico (16,8 %), essa può essere attribuita sia a perdita di parti aliquote delle due frazioni metabolica e strutturale, sia a perdita di una sola delle due componenti. L'analisi delle variazioni post-tetaniche del potenziale di lesione del M. sartorio trattato con acido monobromacetico o con procaina, ci ha dato la possibilità di vagliare le dette ipotesi.

Per quanto concerne i risultati degli esperimenti eseguiti sui muscoli trattati con acido monobromacetico, rammentiamo che gli acidi monoalogenati non impediscono lo svolgimento di quei processi che sono connessi con la contrazione muscolare, mentre ostacolano quelli che si riferiscono alla resintesi metabolica [Lundsgaard <sup>(18,19)</sup>]; essi agiscono sulla quota metabolica del potenziale di membrana [Crepax e Zappoli <sup>(17)</sup>], il quale viene abbassato in modo non reversibile [Ling e Gerard <sup>(11)</sup>, Fleckenstein, Brose, Canis e Förderer <sup>(20)</sup>]. L'esame dei risultati da noi ottenuti, induce ad ammettere che l'abbassamento del potenziale di lesione dopo tetano isototonico sia dovuto a perdita delle due quote, metabolica e strutturale, della polarizzazione; la quota di depolarizzazione residua è quella connessa coi fenomeni metabolici della contrazione, mentre la quota reversibile sarebbe connessa con le modificazioni dello stato fisico del tessuto provocate dall'accorciamento della fibra. La caduta della polarizzazione provocata dal tetano isometrico nel muscolo avvelenato con acido monobromacetico è del tutto irreversibile: tale depolarizzazione sarebbe pertanto di origine metabolica, almeno in massima parte.

Quanto ai risultati degli esperimenti compiuti su muscoli trattati con procaina, si fa presente che la procaina appartiene al gruppo delle sostanze chiamate *stabilizers* da Shanes <sup>(21)</sup>, le quali modificano le proprietà fisiche della membrana e ne riducono la permeabilità al  $K^+$  [Shanes <sup>(22)</sup>, Crepax e Fadiga <sup>(23)</sup>].

Poiché la contrazione si accompagna a esodo di  $K^+$  dal muscolo [Fenn e Cobb <sup>(24)</sup>; Fenn, Cobb, Manery e Bloor <sup>(25)</sup>, Tipton <sup>(26)</sup>, Steinbach <sup>(27)</sup>], dopo tetano si avrebbe un accumulo di  $K^+$  all'esterno delle fibre [Walker <sup>(28)</sup>]: a tali modificazioni della ripartizione dei  $K^+$  sarebbe del resto da attribuire, in modo particolare, la depolarizzazione post-tetanica [Brown e von Euler <sup>(9)</sup>].

(18) E. LUNDGAARD, « Biochem. Z. », CCXVII, 162 (1930).

(19) E. LUNDGAARD, « Biochem. Z. », CCXXVII, 51 (1930).

(20) A. FLECKENSTEIN, W. BROSE, H. J. CANIS u. A. FÖRDERER, « Pflüger's Arch. », CCIX, 235 (1950).

(21) A. M. SHANES, « J. gen. Physiol. », XXXIII, 729 (1950).

(22) A. M. SHANES, « Science », CVII, 679 (1948).

(23) P. CREPAX e E. FADIGA, « Arch. Sci. biol. », XXXVII, 29 (1953).

(24) W. O. FENN a. D. M. COBB, « Amer. J. Physiol. », CXV, 345 (1936).

(25) W. O. FENN, D. M. COBB, J. F. MANERY a R. W. BLOOR, « Amer. J. Physiol. », CXXI, 595 (1938).

(26) S. R. TIPTON, « Amer. J. Physiol. », CXXIV, 322 (1938).

(27) H. B. STEINBACH, « J. cell. comp. Physiol. », XXIV, 291 (1944).

(28) S. M. WALKER, « Amer. J. Physiol. », CLIV, 63 (1948).



È logico quindi presumere che per effetto della diminuzione di permeabilità provocata dalla procaina, l'esodo di  $K^+$  che accompagna la contrazione delle fibre durante il tetano isotonico, sia assai ridotto e la depolarizzazione di modico grado.

Nel muscolo trattato con procaina e sottoposto a tetano isometrico assoluto non si hanno variazioni significative del livello di polarizzazione: manca la depolarizzazione collegata con le modificazioni dello stato fisico del tessuto, essendo impedito l'accorciamento delle fibre, e manca la depolarizzazione collegata con la mobilitazione di  $K^+$ , essendo diminuita la permeabilità della membrana muscolare per l'azione della procaina.

In conclusione, la depolarizzazione post-tetanica appare legata in parte alle modificazioni dello stato fisico del tessuto, che accompagnano l'accorciamento delle fibre; quando il tetano è isotonico, la depolarizzazione è infatti presente, pur in grado diverso, sia nel muscolo normale sia nel muscolo trattato con acido monobromacetico o con procaina. Per un'altra sua parte, la depolarizzazione post-tetanica è collegata coi processi chimici che si svolgono durante la contrazione, giacché essa si riscontra dopo tetano isometrico tanto nel muscolo normale quanto in quello avvelenato con acido monobromacetico, essendo reversibile nel primo caso e irreversibile nel secondo. La mobilitazione di  $K^+$  avrebbe poi un'importanza particolare: dopo un tetano isometrico, la depolarizzazione manca nel muscolo trattato con procaina, per effetto della quale è impedita la fuoruscita di  $K^+$ ; ed è invece presente nel muscolo normale e in quello avvelenato con acido monobromacetico, che non ostacola la mobilitazione del  $K^+$ .

**Biologia.** — *A proposito di recenti osservazioni sulle concentrazioni dei ribonucleoproteidi ed i volumi del nucleolo negli ovociti di «Antedon rosacea»*<sup>(\*)</sup>. Nota di ENRICO VANNINI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Gli ovociti del crinoide *Antedon rosacea* (= *A. mediterranea* Lamarck) sono stati ripetutamente studiati dal punto di vista del loro contenuto in sostanze basofile, durante il periodo di auxocitosi e di elaborazione delle sostanze di riserva.

Cotronei (1910-1911)<sup>(1)</sup> ha rivolto soprattutto l'attenzione su una struttura intensamente basofila, la «fascia vitellogena», che compare, in vicinanza del nucleo, nel corpo cellulare di ovociti che hanno iniziato da poco tempo il loro accrescimento. Essa si origina dalla concentrazione di componenti basofili, che già in stadi precedenti si erano andati accumulando in tutto

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Modena.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) G. COTRONEI, *La fascia vitellogena nell'ovocite in crescita di «Antedon rosacea» Lamarck*. «Arch. Zool. Ital.», vol. 5, p. 41 (1911).

il citoplasma; durante l'ulteriore accrescimento ovocitario, subisce poi una disgregazione graduale, seguita dalla comparsa di globuli di tuorlo.

Urbani (1949) <sup>(2)</sup>, riprendendo le ricerche con metodi citochimici moderni, ha dimostrato che le sostanze basofile del citoplasma e della fascia vitellogena sono ribonucleoproteidi; questi abbondano pure nel nucleolo. Così hanno trovato una conferma le ipotesi, già prospettate da Cotronei, sulla partecipazione del nucleolo all'origine delle sostanze basofile contenute nel corpo cellulare e sulla esistenza di un rapporto fra disintegrazione della fascia vitellogena e formazione del tuorlo. Il caso degli ovociti di *Antedon*, in complesso, si accorda molto bene con le interpretazioni più moderne (Caspersson, Brachet), che attribuiscono ai costituenti cellulari ricchi di acidi ribonucleici una funzione direttiva in quei processi anabolici, costruttivi di sostanze soprattutto proteiche, che si svolgono in seno al citoplasma.

Io stesso, sul medesimo materiale (Vannini 1953) <sup>(3)</sup> ho studiato le variazioni di volume del nucleolo, rilevando fra l'altro che la grandezza relativa di questa struttura rispetto al corpo cellulare (« rapporto nucleolo-plasmatico ») aumenta in un primo periodo, corrispondente alla fase previtellogenetica, e diminuisce nel periodo successivo, includente gli stadi di elaborazione ed accumulo dei globuli di tuorlo. La curva di variazione del volume nucleolare relativo mostra lo stesso decorso della curva di variazione della concentrazione dei ribonucleoproteidi, contenuti nel citoplasma e nella fascia vitellogena. Questi, infatti, presentano la loro massima concentrazione in quei giovani ovociti, nei quali la grandezza relativa del nucleolo appare in forte incremento; si rarefanno, invece, nelle fasi successive, in cui il volume nucleolare relativo diminuisce ed in cui fanno la loro comparsa i globuli di tuorlo.

Questi reperti riconfermano, ancora una volta, l'esistenza di una correlazione fra attività del nucleolo, valutabile in base alla sua grandezza relativa, e basofilia del citoplasma, dovuta alla presenza di ribonucleoproteidi. Riconfermano, inoltre, l'esistenza di un rapporto fra il consumo dei ribonucleoproteidi citoplasmatici ed i processi di accrescimento cellulare, accompagnati da accumulo di sostanze di riserva.

Nelle mie indagini ho valutato le concentrazioni dei ribonucleoproteidi nel nucleolo, nel citoplasma e nella fascia vitellogena con un metodo di colorazione con miscele di verde di metile e pironina disciolte in liquidi tamponati a pH differenti. Tale metodo <sup>(4)</sup> si basa sul fatto che, nelle strutture cellulari contenenti acidi ribonucleici, l'affinità verso la pironina diminuisce, sostituita da una crescente affinità per il verde di metile, mano a mano che

(2) E. URBANI, *Ricerche comparative sui nuclei vitellini di alcune specie animali*. Memorie I e II. « Riv. Biol. », vol. 41, p. 63 e p. 331 (1949).

(3) E. VANNINI, *Osservazioni sull'accrescimento del nucleolo negli ovociti di « Antedon rosacea »*. « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 24, p. 293 (1953).

(4) F. M. GEROLA e E. VANNINI, *La colorazione con verde di metile-pironina in mezzo tamponato nella ricerca degli acidi ribonucleici*. « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », vol. 25, p. 644 (1949).

si adoperano miscele coloranti tamponate ad un pH più alto. I pH di viraggio dall'esclusiva colorabilità con pironina (tinta rossa) all'esclusiva colorabilità con verde di metile (tinta verde) corrispondono a valori tanto più elevati, quanto maggiore è la concentrazione, e forse anche il grado di polimerizzazione, degli acidi ribonucleici associati con le proteine. Tali pH di viraggio si riconoscono, nei preparati, per la tinta intermedia violacea, derivante dalla contemporanea affinità sia verso la pironina che verso il verde di metile. Il loro livello si può considerare come un indice della concentrazione o del grado di polimerizzazione degli acidi ribonucleici, presenti nei ribonucleoproteidi delle strutture cellulari, un viraggio a pH più alti indicando un maggiore contenuto in ribonucleotidi, ed un viraggio a pH più bassi indicandone un minore contenuto.

Recentemente Urbani (1953)<sup>(5)</sup> ha ripreso in esame gli ovociti della *Antedon* esaminando le concentrazioni degli acidi ribonucleici nel citoplasma e nella fascia vitellogena, con un metodo assai diverso da quello da me usato. Egli infatti ha eseguito la proprie osservazioni con un sistema istofotometrico, ispirato a quelli di Pollister e di Lison, su materiale colorato con azzurro A. Ne è risultato che negli stadi iniziali dell'accrescimento ovocitario vi è una sintesi di ribonucleoproteidi citoplasmatici; nella fascia vitellogena, quando questa compare, vi è maggiore concentrazione in ribonucleoproteidi che nel citoplasma circostante; nell'ultimo periodo dell'accrescimento ovocitario, a partire dalla fase di disintegrazione della fascia vitellogena, la concentrazione dei ribonucleoproteidi del citoplasma diminuisce fortemente.

Questi dati citochimici concordano sensibilmente con i miei e la curva di variazione delle concentrazioni dei ribonucleoproteidi citoplasmatici, ottenuta da Urbani, corrisponde con notevole esattezza alla mia curva di variazione delle grandezze nucleolari relative. Mi è sembrato, pertanto, che non fosse privo di interesse documentare con precisione, in questa Nota, il buon grado di coincidenza fra i miei reperti e quelli di Urbani. Da un tale confronto dei reperti ricaveremo una conferma sia del metodo di dosaggio da me usato, che delle considerazioni da me fatte sul significato dei volumi nucleolari.

Per stabilire un adeguato confronto, mi è stato necessario rielaborare i dati quantitativi di Urbani, collocandoli in un diagramma costruito con gli

(5) E. URBANI, *Osservazioni fotometriche sull'oocite in crescita di «Antedon rosacea» Lamarck.* «Rend. Accad. Naz. Lincoi», vol. 14, p. 558 (1953). In una Nota successiva del medesimo autore, pubblicata in questi stessi «Rendiconti» (vol. 15, p. 308, 1953) lo studio fotometrico degli ovociti di *Antedon* è stato ulteriormente approfondito, eseguendo l'analisi in luci monocromatiche (spettrofotometria) e adoperando, fra l'altro, anche colorazioni con verde di metile e pironina in mezzo tamponato. Non è qui necessario esaminare in dettaglio queste nuove interessanti ricerche, perché in esse non vengono studiate le variazioni di concentrazione dei ribonucleoproteidi durante l'accrescimento ovocitario; basterà rilevare che esse prospettano la possibilità di sfruttare le colorazioni a pH tamponato per riconoscere differenze non soltanto quantitative, ma anche qualitative fra i ribonucleoproteidi del nucleolo e quelli del citoplasma e della fascia vitellogena.



stessi criteri usati nei miei diagrammi precedenti. Le dimensioni ovocitarie, che Urbani aveva espresso con la media dei raggi cellulari, sono state da me indicate sotto forma di volumi <sup>(6)</sup>. Ha poi riunito in un'unica figura, qui acclusa, tre diagrammi sovrapposti: quello più in alto rappresenta la variazione delle concentrazioni dei ribonucleoproteidi nel citoplasma degli ovociti delle varie dimensioni, calcolata con il mio metodo delle colorazioni a pH tamponato; il sottostante esprime invece la stessa variazione nel citoplasma e nella fascia vitellogena, secondo i dati di Urbani ricavati con il suo metodo istofotometrico; quello più in basso, infine, indica i risultati delle mie ricerche sull'andamento delle variazioni della grandezza nucleolare relativa. Sull'asse delle ascisse di tutti e tre i diagrammi sono riportati, alla medesima scala, i logaritmi dei volumi ovocitari.

L'esame dei diagrammi mostra, anzitutto, che l'andamento complessivo delle variazioni di concentrazione dei ribonucleoproteidi citoplasmatici è molto simile nelle misurazioni effettuate con il metodo delle colorazioni a pH tamponato e con quello istofotometrico. Indubbiamente il metodo istofotometrico permette una graduazione più precisa e dettagliata delle differenze di concentrazione fra ovocita ed ovocita e ne dà un'espressione numerica obiettiva, preferibile sotto molti aspetti alla soggettiva indicazione di un colore. Il metodo delle colorazioni a pH tamponato, anche se meno preciso, però ha il vantaggio di una maggiore rapidità e semplicità di esecuzione: il confronto ora eseguito dimostra che *i reperti con esso ottenuti sono attendibili in misura assai soddisfacente.*

Quanto alla curva delle variazioni delle grandezze nucleolari relative, essa risulta ancor più corrispondente ai dosaggi citochimici eseguiti con il metodo istofotometrico, che ai dosaggi effettuati con le colorazioni e pH tamponato. Appare, dunque, *ulteriormente confermata l'esistenza di una correlazione fra i valori del rapporto nucleolo-plasmatico e la concentrazione dei ribonucleoproteidi in seno al citoplasma.*

Si può notare che la parte iniziale, ascendente, della curva di variazione dei valori del rapporto nucleolo-plasmatico raggiunge il massimo livello un po' più presto di quanto avvenga nella curva di variazione delle concentrazioni dei ribonucleoproteidi nel citoplasma, misurate fotometricamente. Ciò sembra in buon accordo con l'ipotesi che il fatto primitivo sia l'incremento dell'attività del nucleolo, valutabile dalla sua grandezza relativa, e che da questo derivi secondariamente l'accumulo dei ribonucleoproteidi nel corpo cellulare.

Per quanto si riferisce alla fascia vitellogena, sulla quale ho fornito soltanto pochi cenni nelle mie indagini dedicate principalmente al nucleolo, possiamo rilevare che anche il metodo delle colorazioni a pH tamponato concorda con i reperti istofotometrici di Urbani, nel dimostrare la sua mag-

(6) Ringrazio l'amico prof. E. URBANI, che ha voluto facilitare il mio compito inviandomi l'elenco analitico dei dati citometrici, che gli erano serviti nella costruzione dei suoi diagrammi.



giore ricchezza in ribonucleoproteidi rispetto al citoplasma. L'unico punto di apparente disaccordo fra le osservazioni di Urbani e mie consiste nella delimitazione del periodo di accrescimento ovocitario, durante il quale la

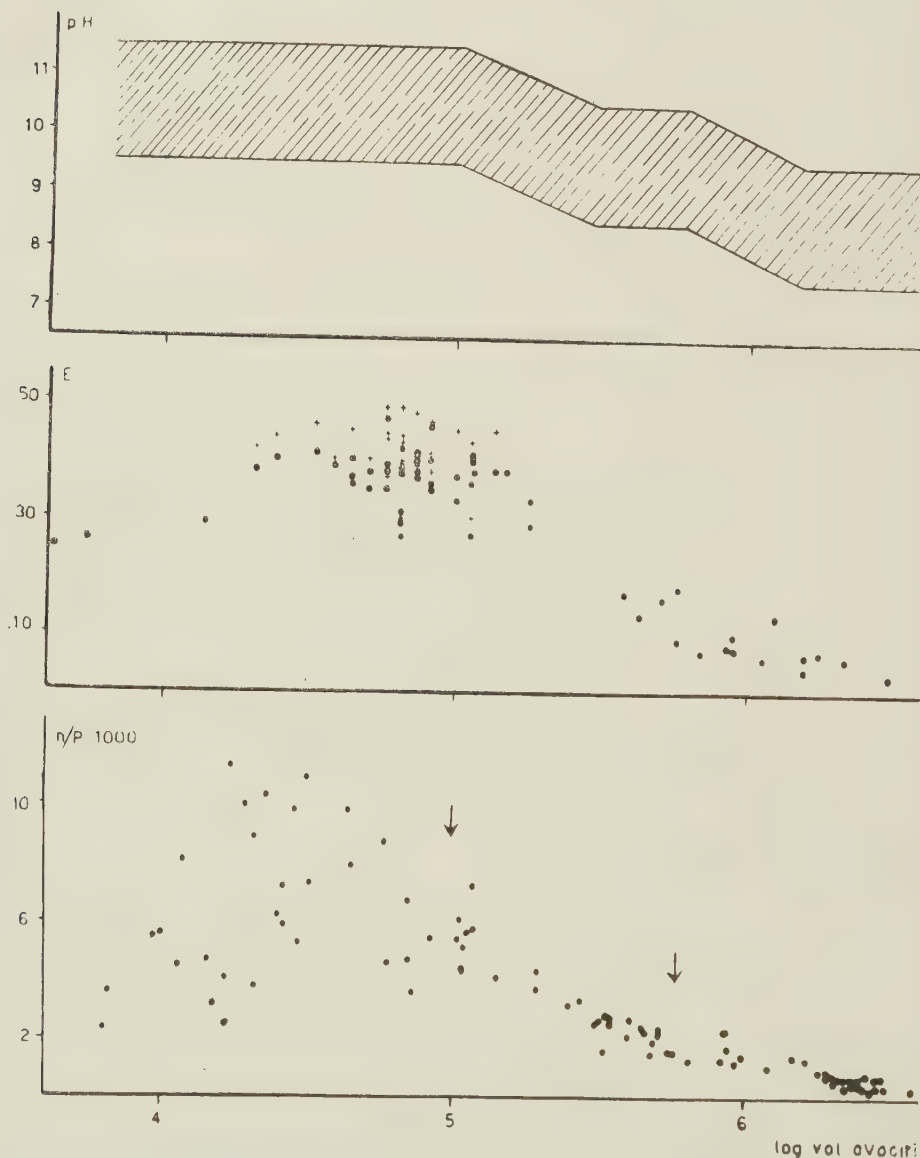


Fig. 1. - Nel diagramma in alto, la fascia tratteggiata indica la concentrazione dei ribonucleoproteidi nel citoplasma degli ovociti delle varie dimensioni, espressa dal valore del pH di viraggio nella colorazione con verde di metile e pironina in mezzo tamponato, secondo i dati del Vannini. Nel diagramma sottostante, la medesima concentrazione è indicata, nel citoplasma (punti neri) o nella fascia vitellogena (croci), dal valore delle estinzioni (E) nel metodo istofotometrico, secondo i dati dell'Urbani. Nel diagramma più basso sono disposti i valori della grandezza relativa del nucleolo (rapporto nucleolo-plasmatico  $n/P$ , moltiplicato per mille), secondo i dati del Vannini. Sulle ascisse dei tre diagrammi è segnato il logaritmo del volume degli ovociti.

fascia vitellogena è presente. Nel diagramma delle misurazioni fotometriche, ricavato dai dati di Urbani, il periodo di esistenza della fascia vitellogena, indicato dalla posizione delle croci, risulta infatti nettamente più precoce che nel diagramma delle mie misurazioni dei rapporti nucleolo-plasmatici, in cui l'inizio e la fine di tale periodo sono contrassegnati da due frecce. È probabile che questa discordanza derivi dal fatto che il metodo di colorazione adoperato da Urbani è assai più adatto del mio, per riconoscere i primi accenni di formazione della fascia vitellogena e la presenza di questa in ovociti piuttosto giovani, molto ricchi di ribonucleoproteidi in tutto il citoplasma; mentre il metodo da me impiegato permette, viceversa, di riconoscere più facilmente limitati residui di una fascia vitellogena in dissolvimento, inclusi in un citoplasma a pironinofilia diminuita.

Evidentemente le indicazioni di Urbani comprendono fasi molto iniziali, a me sfuggite, di comparsa o di presenza della fascia vitellogena; invece i limiti da me indicati, escludenti le fasi più iniziali, si estendono fino a periodi terminali di esistenza di scarsissimi residui della fascia, certamente poco adatti, data la loro esiguità, ad una rilevazione fotometrica. La parte di diagramma posta a destra delle due frecce da me disegnate corrisponde, comunque, ad ovociti nei quali, dopo la completa scomparsa di ogni minima traccia di fascia vitellogena, il processo della vitellogenesi appare in pieno svolgimento.

## COMMEMORAZIONI

### Commemorazione del Corrispondente Attilio Colacevich (1906-1953).

Tenuta (\*) dal Socio GIORGIO ABETTI.

Nel corso normale della vita umana non dovrei essere proprio io a commemorare il mio primo e caro allievo, col quale ho avuto la fortuna di lavorare per ben un quarto di secolo. Se è sempre doloroso ricordare un amico scomparso, ben potete immaginare quanto più lo sia in questo caso tanto contrario all'ordine naturale degli eventi.

Arrivò la famiglia Colacevich a Firenze profuga da Fiume avendo perduto il suo capo ed ogni suo avere: la madre con cinque figli, fra i quali Attilio che aveva appena ottenuto il diploma di capitano di lungo corso. Imparando l'astronomia nautica, egli si appassionò allo studio del cielo e salendo in Arcetri, appena giunto a Firenze, domandò consiglio per continuarlo e si iscrisse alla Facoltà di Scienze dell'Università di Firenze. Furono allora anni difficili per la sua famiglia e per lui, ma con tenacia e costanza compì i suoi studi universitari con ottimo esito nel 1929, svolgendo una tesi

(\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

di laurea sulla variabilità delle righe dell'idrogeno e del calcio nello spettro di alcune cefeidi. Fa parte questa ricerca di un vasto programma di lavoro per arrivare alla conoscenza dei fenomeni presentati da queste strane stelle pulsanti che prendono il nome dal loro prototipo, una stella luminosa nella costellazione del Cefeo. Lo studio delle variazioni di luce, delle caratteristiche fisiche, di temperatura e di pressione alle quali va soggetta l'atmosfera esterna dell'astro, che più o meno rapidamente va soggetto a pulsazioni con periodo ben determinato, occupa da tempo gli astronomi. In questo primo suo lavoro si nota già la capacità del Colacevich di trarre il maggior profitto dai modesti mezzi di osservazione di cui poteva disporre e quella di concludere risultati.

Finiti gli studi universitari, benché non si potesse dire che la sua salute, forse in conseguenza delle penose vicende passate, fosse molto buona, tuttavia fu chiamato al servizio militare nel quale raggiunse il grado di tenente del genio. Ebbe allora, prima di ritornare alla vita civile, un momento di scoraggiamento e pensò di emigrare per cercare di sollevare le condizioni di vita della sua famiglia. Per fortuna poté invece ritornare in Arcetri a proseguire i suoi studi prediletti, dedicandosi ancora alle Cefeidi e rapidamente ampliando le sue conoscenze in vari campi dell'astronomia. È di quel tempo (1931) il suo nitido saggio sulle teorie, ipotesi ed osservazioni concernenti la costituzione delle stelle sulla via allora aperta da Eddington, Jeans, Russell, come pure quella sua Nota che ha assunto carattere, diremo così storico, sulla trasmissione per radio della luce lunare attraverso al cannocchiale di Galileo da Arcetri a Chicago, in occasione dell'esposizione mondiale inaugurata in quella città alla presenza di Guglielmo Marconi.

Caratteristiche principali dei lavori di osservazione e teorici di Colacevich sono lo spirito di iniziativa nella scelta dei temi ed il loro accurato, coscienzioso sviluppo.

Avendo ottenuto nel 1935 una borsa di studio dalla Fondazione Rockefeller, si recava all'Osservatorio Lick sul Monte Hamilton in California ed ivi in breve tempo, familiarizzandosi con gli strumenti e metodi impiegati in quell'Osservatorio, scopriva la variabilità della velocità radiale della stella  $\delta$  *Scuti*, eccezionale cefeide a breve periodo che ha dato luogo a numerose successive ricerche. Un altro problema di cui si interessò Colacevich all'Osservatorio Lick è quello della rotazione delle stelle. Questa si può determinare, in casi particolari, dal profilo delle righe del loro spettro. In base alle osservazioni da lui eseguite col rifrattore di 90 cm dell'Osservatorio Lick ed annesso spettrografo a tre prismi, impiegando un metodo semplificato, rispetto a quello dell'inglese Carroll, Colacevich ha dedotto i valori della rotazione delle componenti più luminose di sistemi binari spettroscopici, valori che in generale bene concordano con quelli calcolati teoricamente. Questo lavoro destò interesse e fu criticato dall'astronomo russo Krat; non tardò la risposta del Colacevich, pubblicata nei Rendiconti della Accademia dei Lincei in cui questi, difendendo il suo metodo, dimostra chiaramente come, non solo non avessero fondamento le obiezioni del Krat, ma

altresì come il metodo da questi proposto sia errato. Cortese e nello stesso tempo modesto nell' polemica, è preciso e convincente nelle sue argomentazioni.

Non è possibile in questi brevi cenni della sua vita seguirlo in tutti i suoi lavori e bisogna limitarsi a ricordarne soltanto i principali. Ritornato in Arcetri si occupava delle relazioni fra la luminosità, la massa e le altre caratteristiche dei sistemi spettroscopici binari e della loro posizione nella evoluzione stellare, determinando quali sieno i sistemi appartenenti alla classe delle stelle giganti e quali alla classe delle stelle nane. Stabiliva poi la curva di frequenza del rapporto delle masse nelle componenti di 245 di tali sistemi e per alcuni arriva alla determinazione del valore di tale rapporto. È da notarsi come un lavoro analogo e contemporaneo dell'astronomo inglese Plummer, condotto con metodo del tutto diverso, concluda risultati in ottimo accordo con quelli di Colacevich.

Nel 1937 otteneva brillantemente la libera docenza in astronomia, che lo portava ad incarichi didattici, i quali però non lo distolsero mai dalle osservazioni e ricerche sperimentali e teoriche. Avendolo io seguito per tanti anni della sua attività, fu sempre per me motivo di meraviglia e di ammirazione il suo interesse per sempre nuovi problemi nei quali egli rapidamente e coscienziosamente si familiarizzava, accrescendo le sue cognizioni e portandovi, con inesauribile vena, nuovi contributi.

In varie eclissi lunari ha determinato la distribuzione della luce residua in diverse lunghezze d'onda nel cono di penombra e in quello d'ombra della Terra, ciò che può dare un'idea delle condizioni dell'atmosfera terrestre al momento dell'eclisse. Nella fisica solare era importante giungere ad una misura quantitativa dell'intensità delle perturbazioni alle quali periodicamente va soggetto il Sole. Colacevich e Viaro ne iniziarono uno studio accurato, ed il primo approfondendo lo studio della luce diffusa, che influenza i risultati, cercava di valutarla usando un apposito predispersore costruito per la torre solare di Arcetri, arrivando a concludere un sicuro risultato per il valore dell'intensità centrale della riga  $H_{\alpha}$ .

Dopo circa un anno di soggiorno nell'isola di San Pietro, come direttore della Stazione astronomica di Carloforte per l'osservazione delle variazioni di latitudine, Colacevich ritornava in Arcetri nel 1941 e la sua attività prendeva un altro corso.

Avendo egli avuto opportunità ed interesse a seguire i corsi superiori tenuti all'Istituto nazionale di Ottica in Arcetri, in breve tempo si metteva al corrente dei problemi ottici più attuali, pubblicando varie Note, come per esempio quelle sulla distribuzione del flusso luminoso nelle caustiche, e sulle aberrazioni del terzo ordine nei sistemi ottici centrati.

Essendosi trattato e discusso al Seminario di Arcetri sul tipo di riflettore astronomico a grande campo inventato dall'ottico tedesco Bernardo Schmidt ed essendo desiderabile di provvedere l'Osservatorio di Arcetri di uno strumento di tale tipo, Colacevich ne studiava e pubblicava una completa teoria basata sull'ottica ondulatoria. Subito dopo dalla teoria passava



alla pratica dapprima costruendo, con l'aiuto dei tecnici dell'Istituto di Ottica e delle Officine Galileo, un riflettore di 16 cm. con apertura relativa di circa 1 a 3. Per l'occasione ideò un metodo pratico per provare durante la lavorazione la superficie ottica del quarto ordine che deve avere la lastra correttrice. Poiché questo primo esperimento ebbe buon successo venne intrapresa la costruzione di un riflettore di maggiori dimensioni, con lo specchio di vetro pyrex del diametro di 52 cm e la lastra correttrice di 32 cm, e con l'apertura relativa di 1 a 3. Pur nelle sue modeste dimensioni, questo riflettore, che copre senza aberrazioni sensibili un campo di  $6^\circ$ , permette di fotografare stelle fino alla 15<sup>a</sup> grandezza su lastre pancromatiche, con mezz'ora di posa. In dieci anni, da quando lo strumento è entrato in attività, si può affermare che esso è stato usato con molto profitto dagli astronomi di Arcetri, come ne fanno fede i risultati pubblicati nelle Memorie dell'Osservatorio.

In occasione di queste costruzioni ottiche, Colacevich è stato condotto ad ideare una forma modificata del tipo Schmidt correggendo la aberrazione sferica, invece che con la lastra lavorata con una superficie del quarto ordine, per mezzo di un menisco divergente a facce sferiche parallele. La teoria di questo nuovo tipo era già stata completata nel luglio del 1943 e prima di pubblicarla, date anche le difficili condizioni di lavoro e di vita di quegli anni, Colacevich, sempre cauto e coscienzioso, desiderava di sottoporla all'esperienza. A guerra finita si venne a sapere che lavori simili, del tutto indipendenti, erano stati compiuti all'estero, pertanto si decise di pubblicare la sua teoria col titolo: «Sistemi ottici a simmetria centrale e loro applicazione». Subito dopo, in base alla sua teoria, Colacevich, in collaborazione con Luciano Berti delle Officine Galileo, costruiva un nuovo obiettivo catadiottrico con un rapporto di apertura di circa 0.5, con un campo di circa  $30^\circ$ . Una camera fotografica di questo tipo è particolarmente utile per esaminare sorgenti estese di debole intensità, come le nebulose, le comete, e, con dispersione di uno o due prismi, il loro spettro, o quello della luce del cielo notturno, o quella della corona solare a notevoli distanze dal Sole.

Essendo importante di ampliare il programma di osservazioni solari che si eseguono all'Osservatorio di Arcetri, in seguito alle invenzioni dell'astronomo francese Lyot, le quali permettono di osservare la corona fuori delle eclissi totali di Sole, nel corso del 1947 fu intrapresa in Arcetri la costruzione di un coronografo. Colacevich prese parte attiva in questa, non solo, ma iniziò anche la costruzione, sempre in collaborazione col Berti, di un filtro interferenziale. È noto come il coronografo del tipo Lyot può essere utilmente usato soltanto in stazioni elevate sul livello del mare, per evitare la poca trasparenza e la turbolenza dei più bassi strati atmosferici. Allo scopo di studiare le condizioni delle stazioni di alta montagna, visitammo insieme l'Osservatorio del Pic du Midi nei Pirenei e quello di Campo Imperatore, dove Colacevich eseguì anche, con la sua camera ad alta luminosità, osservazioni sullo spettro del cielo notturno.

Poiché il coronografo, il cui compimento fu anche ritardato a causa della spedizione per osservare l'eclisse del 1952 nel Sudan, è uno strumento piuttosto complicato, e prima di usarlo in alta montagna è conveniente di provare la sua efficienza, si decise di trasportarlo da Arcetri a Capodimonte. Colacevich, nominato per concorso direttore di quell'Osservatorio nel 1948, poteva disporre di una cupola adatta a contenerlo e così il completamento del lavoro e prove decisive potevano essere comodamente eseguite a Capodimonte, in attesa di future possibilità. La morte lo colse quando, con i tecnici di quell'Osservatorio, stava attendendo a questo lavoro.

Pure immerso in questa notevole attività nel campo dell'ottica astronomica, non dimenticava Colacevich la pura astronomia, sia continuando le sue ricerche teoriche sui sistemi binari, sia trattando e discutendo il problema del supposto «ammasso del Sole». Già nel 1940, egli in seguito ai lavori di astronomi italiani e stranieri, comparsi sull'argomento, dubitava che si potesse affermare l'esistenza di tale ammasso, cioè che stelle vicine e con piccolo moto relativamente al Sole costituissero un sistema fisico, come altri simili ammassi aperti o correnti stellari esistenti nella Via Lattea. Qualche anno dopo Colacevich riprendeva l'argomento, pubblicando due Note nei Rendiconti dei Lincei, in cui egli dimostra con chiarezza e precisione come le stelle, che si supponevano costituire il così detto ammasso del Sole, fanno parte del vasto moto preferenziale definito dalla nota corrente dell'Orsa Maggiore, la quale comprende un'alta percentuale di stelle. Appassionandosi a simili ricerche statistiche, Colacevich discuteva le relazioni analitiche tra le distribuzioni delle velocità lineari delle stelle, arrivando a formule di rapida applicazione numerica, di cui dà un esempio per il caso in cui la distribuzione delle velocità radiali peculiari sia del tipo gaussiano.

In collaborazione con Maria Cristina Ballario, estendendo le ricerche statistiche alla distribuzione delle velocità delle stelle fino alla 5,5 grandezza, vengono messe in evidenza con un paziente lavoro sui dati di circa 2500 stelle, le caratteristiche delle due correnti stellari, una nella costellazione dell'Orsa Maggiore, l'altra in quella del Toro e la dipendenza della velocità media di queste stelle dalla longitudine galattica dell'apice. Essendo stato aumentato in questi lavori, rispetto a precedenti analoghi, il numero delle stelle appartenenti alle due correnti, si può affermare essere preferibile la ipotesi delle due correnti di Kapteyn, piuttosto che quella dell'ellissoide di distribuzione di Schwarzschild.

Nel 1948 Colacevich lasciava Arcetri, per assumere la direzione dell'Osservatorio di Capodimonte a Napoli. Il suo interessamento per portare questo Osservatorio, nel quale fino allora si era svolta un'attività quasi completamente nel campo dell'astronomia di posizione, ad un maggiore sviluppo, provvedendolo di nuovi strumenti, si dimostrò subito efficace e conclusivo. Anche per la parte didattica le sue doti di insegnante furono subito apprezzate, sia all'Università che all'Istituto universitario navale.

Appunto allo scopo di accelerare il rinnovamento dell'Osservatorio, con una borsa di studio dell'Unione astronomica internazionale e del Consiglio

nazionale delle ricerche, nell'anno seguente si recava una seconda volta negli Stati Uniti d'America. Meta di questo viaggio furono l'Osservatorio Warner and Swasey di Cleveland, Ohio, e quello di Mc Donald a Fort Davis nel Texas. Anche questa volta, nei pochi mesi in cui egli fu assente dall'Italia, la messe di osservazioni ed i risultati conclusi fu veramente notevole.

In collaborazione con il prof. J. Nassau, direttore del primo Osservatorio, si occupava del problema della classificazione spettrale delle stelle a carbonio nell'infrarosso, portando in patria dell'importante materiale che forma ancora oggetto di studio. Eseguita inoltre ricerche sullo spettro della stella nuova apparsa quell'anno, nella costellazione dello Scudo. All'Osservatorio Mc Donald, con lo spettrografo a quarzo annesso al riflettore di 82-pollici, Colacevich otteneva spettrogrammi per la binaria spettroscopica *32 Cygni* costituita da una componente supergigante a relativamente bassa temperatura superficiale con atmosfera estesa e da un compagno a temperatura molto più alta. In collaborazione con M. G. Fracastoro, deduceva da tali spettrogrammi gli elementi fotometrici e studiava i fenomeni che presentano le righe del suo spettro durante l'eclisse. Eseguita inoltre osservazioni spettroscopiche di altre binarie ad eclisse e si impadroniva rapidamente dei nuovi metodi di fotometria fotoelettrica in uso in quell'Osservatorio. Poteva quindi compiere una serie di osservazioni sull'interessante sistema binario ad eclisse *DM Persei* che riduceva poi a Capodimonte concludendo, dalle variazioni di luce da esso presentate durante l'eclisse, che nel sistema deve esistere un flusso di materia, il quale collega ed avvolge le due componenti ed eventualmente si disperde nello spazio.

I precisi risultati conseguibili con il nuovo metodo di fotometria fotoelettrica lo indussero ad iniziare analoghi lavori a Capodimonte. Avendo portato con sé al ritorno in patria alcune cellule a moltiplicazione interna, faceva costruire in Arcetri e a Capodimonte un fotometro fotoelettrico che applicava ad un modesto ed antiquato equatoriale di Fraunhofer esistente a Capodimonte. Poco tempo dopo il fotometro già funzionava e la sua descrizione, insieme ai primi risultati, riferentesi alla variabile *V 451 Ophiuchi*, si trovano pubblicati nelle «Memorie della Società astronomica italiana», con la scoperta di un minimo secondario e che il periodo risulta doppio di quello ammesso in precedenti osservazioni. In un'altra Nota, redatta e pubblicata qualche mese prima della sua scomparsa, Colacevich, combinando le sue osservazioni di queste stelle con quelle spettrografiche, ottenute all'Osservatorio Dunlap di Toronto, dà gli elementi orbitali del sistema, stabilendo le caratteristiche fisiche del sistema costituito da una componente più luminosa che viene eclissata dal minore compagno al minimo principale. Questa ed altre simili osservazioni, continuate dai suoi collaboratori, hanno ottenuto un alto riconoscimento, in occasione dell'assemblea dell'Unione astronomica internazionale a Roma.

Scriveva allora Colacevich che per proseguire utilmente simili osservazioni e ricerche, le quali riprendevano una ben nota tradizione dell'Osservatorio di Capodimonte, occorreva dotarlo di un telescopio meno antiquato



e più potente di quello in uso. Sappiamo che egli aveva già quasi pronto un modesto, ma pratico progetto, per la costruzione di un telescopio di apertura non inferiore ai 50 centimetri, secondo i sistemi ottici da lui ideati.

Nel 1952 Colacevich fece parte della missione italiana, che si recò a Chartum nel Sudan per osservare l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio. Gli fu affidato un coronografo per la fotografia diretta della corona solare in varie radiazioni e in luce polarizzata ed inoltre da Capodimonte portò la sua camera spettrografica ad alta luminosità.

Sereno e tranquillo come sempre lavorò indefessamente con i compagni per il montaggio degli strumenti, sempre in buone condizioni di salute malgrado il Sole cocente sotto il quale si doveva lavorare. Il suo non facile lavoro, fu da lui egregiamente eseguito e al ritorno in patria ne trasse i risultati preliminari che poté presentare al Convegno Volta, nel settembre 1952. Questo seguì subito dopo l'assemblea generale dell'Unione astronomica internazionale alla quale Colacevich prese attiva parte. Al Convegno Volta, indetto dall'Accademia dei Lincei, che ebbe luogo a Roma e ad Arcetri egli presentò due comunicazioni: una sullo spettro della corona esterna, l'altra sulla polarizzazione della luce della corona. Lo spettro della corona, fotografato con la sua camera ad alta luminosità, presenta delle righe di emissione fino a grande distanza dal sole, ciò che prima non era mai stato osservato, forse per il fatto che mai era stato fotografato tale spettro con una camera avente un così forte rapporto di apertura. Colacevich, nell'esporre i suoi risultati, cautamente osserva che sarà bene confermarli, ripetendo simili osservazioni in future eclissi.

Dovevano essere queste purtroppo le sue ultime produzioni scientifiche, benché non cessasse mai di lavorare anche quando la malattia che lo colse, pochi mesi dopo questi avvenimenti, non lasciava più alcuna speranza di guarigione. Dopo aver subito a Firenze, nel maggio 1953, un'operazione chirurgica poté ritornare a Capodimonte, dove morì il 24 agosto a 47 anni di età.

Due mesi prima era stato nominato Socio Corrispondente dell'Accademia dei Lincei.

La sua salma riposa nel cimitero di San Felice a Ema vicino all'Osservatorio di Arcetri, nel quale si è svolta la maggior parte della sua geniale e proficua attività scientifica e didattica.

Per la sua opera di scienziato e per le sue doti personali il ricordo di Attilio Colacevich resterà sempre vivo in tutti coloro che l'hanno conosciuto e che ne rimpiangono l'immatura perdita. Ai giovani astronomi il compito di non dimenticare i suoi insegnamenti, studiando e proseguendo l'opera sua.



## COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che assiste alla seduta il prof. André Lichnerowicz del « Collège de France » e porge all'illustre ospite il cordiale saluto della Classe e suo personale.

Il Presidente informa quindi i Colleghi di una richiesta, indirizzata tempo fa all'Accademia dal prof. Giuseppe Pagano, intesa a rivendicare la priorità di una sua scoperta nel campo della fisiologia, rispetto a scienziati stranieri che si sono occupati, successivamente al Pagano, delle stesse questioni da lui studiate. La Presidenza ha preso in esame tale richiesta e ha interpellato alcuni Soci particolarmente competenti in materia. È risultato che, indubbiamente, il Pagano ha il merito della scoperta ma che tale merito è stato riconosciuto da tutti i fisiologi, sia italiani che stranieri. Non è sembrato pertanto che sussistessero gli estremi per la rivendicazione desiderata dal Pagano e si è provveduto a dargli comunicazione in tal senso. Ma, insistendo egli nella sua tesi, la Presidenza ha ritenuto necessario sottoporre la questione alla Classe per un nuovo esame e per una decisione definitiva.

Su proposta del Socio Giuseppe Levi, i Soci Pupilli e Margaria sono incaricati di studiare la pratica e di riferire in proposito.

I due predetti Soci accettano.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il prof. Giordani dà la parola al Socio Abetti che commemora il compianto Collega Attilio Colacevich.

Il Presidente ringrazia il prof. Abetti per la commossa ed elevata orazione e rinnova ai familiari del Socio Colacevich, presenti alla seduta, l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia, rendendosi inoltre interprete della fervida adesione dell'Università di Napoli, alla quale il valoroso scienziato scomparso apparteneva.

Il Presidente ricorda che per sabato 10 aprile è stata fissata la commemorazione di G. B. Grassi e chiede ai Colleghi, e in particolare al Socio Cotronei che terrà l'orazione commemorativa, di decidere se tale commemorazione debba aver luogo nella seduta ordinaria di Classe o in una seduta pubblica a Classi riunite.

Il Socio Cotronei osserva che la grande figura del Grassi si presta indubbiamente ad una commemorazione solenne e che, onorando Grassi, l'Accademia onora l'Italia. Egli sarebbe pertanto favorevole a tenere la commemorazione in una seduta pubblica a Classi riunite.

Poiché la Classe si associa all'unanimità alla proposta del Collega Cotronei, il Presidente accoglie la proposta stessa, stabilendo, quale data per la predetta seduta pubblica, sabato 10 aprile, alle ore 10.

Il prof. Giordani comunica che la « Fraternité mondiale », della quale é Presidente generale il prof. A. H. Compton, Socio Straniero dell'Accademia, ha informato che il professore stesso sarà a Roma dal 24 al 27 aprile c. a. e potrebbe tenere una conferenza in Accademia.

La Presidenza, mentre ha ritenuto opportuno aderire alla richiesta, si propone, inoltre, di raccogliere intorno all'illustre Collega straniero i Soci dell'Accademia e altre personalità in un ricevimento che avrà luogo il 26 aprile, data fissata per la conferenza stessa.

Il Socio Cassinis, al quale si uniscono tutti i Colleghi, plaude all'iniziativa, mettendo in evidenza i nobili scopi che si propone la « Fraternité mondiale ».

Il Presidente Giordani è lieto di informare i Colleghi delle buone notizie che egli ha avuto circa la salute dei Soci U. Amaldi, Gola e M. G. Levi ai quali rinnova, a nome della Classe, il sincero augurio di poter presto ritornare all'Accademia.

Il Presidente, infine, prega i Soci Nazionali di voler trattenersi, dopo la seduta ordinaria, per ascoltare alcune comunicazioni della Presidenza.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Rondoni offre in omaggio ed illustra brevemente una cinquantina di pubblicazioni, alcune delle quali sue, riguardanti ricerche sperimentali, anatomo-patologiche e cliniche sui tumori svolte nel 1953 dal personale scientifico dell'Istituto Nazionale per lo studio e la cura dei tumori di Milano. Presenta inoltre il I fascicolo 1954 della rivista « Tumori », che contiene i primi lavori usciti dal Centro per la oncologia sperimentale del C.N.R., Sezione Milanese presso il detto Istituto; e ringrazia il Prof. Colonnetti, Presidente del C.N.R., che ha voluto e sostenuto il Centro stesso.

Il Socio De Blasi, per conto del Collega Marotta, offre in omaggio e presenta un Atlante dal titolo: « Microrganismi al microscopio elettronico », contenente numerose riproduzioni fotografiche di batteri, protozoi, spirochete, virus e fagi, mettendo in evidenza che tale Atlante è la prima opera completa sull'argomento che sia apparsa in Europa.

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno presentato pubblicazioni.

Il Segretario accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza il volume pubblicato dal C.N.R., in occasione della prima riunione scientifico-tecnica, indetta dal Consiglio stesso in occasione della XVII Fiera del Levante, dal titolo: « Convegno sulla meccanizzazione dell'agricoltura nei suoi aspetti scientifici e tecnici », l'opera « Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut », edita per il centenario del predetto Istituto, e il volume III (fasc. II - Physics and Chemistry) del « Reports of the Swedish Deep-Sea Expedition » 1947-1948.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: De Blasi (a nome del Collega Marotta), G. Levi, Bompiani, Cotronei, Armellini, Bonino, Chiarugi, Cambi, Margaria, Segre e Pupilli.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

BURNIAT P. - Surfaces algébriques de genre géométrique nul et de bi-genre quelconque (pres. dal Socio B. SEGRE).

CAPRARO V. e CRESSERI A. - Alcuni problemi riguardanti l'assorbimento intestinale della  $B_{12}$  (pres. dal Socio R. MARGARIA).

CHITI L. - Sul differenziamento autonomo di neuroni di pollo in impianto in allanto-corion (pres. dal Socio G. COTRONEI).

DE SIMONI F. - Le soluzioni generali della statica a simmetria sferica nell'ultima teoria unitaria di Einstein (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

GALLARATI D. - Sopra una superficie dell'ottavo ordine dotata di 157 nodi (pres. dal Socio B. SEGRE).

GIANNUZZI M. A. - Sul satellite oscuro nel sistema  $\zeta$  Aquari. Nota II (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

GIOVANNELLA B. e PECINI M. - Sul comportamento di vari tessuti di Teleosteo adulto impiantati nella camera anteriore dell'occhio di Rana (pres. dal Socio G. COTRONEI).

GOBETTO A. - Dispositivi di blocco in grosse arterie della loggia ascellare di feti di «Sus Scrofa Dom.» (pres. dal Socio G. LEVI).

GOBETTO A. - Sulla presenza e sul comportamento del glicogeno nelle cellule del grasso bruno interscapolare di «Mus Musculus» (pres. dal Socio G. LEVI).

GRASSO V. - Fenomeni di semiletalità in sporidi di «Ustilago kolleri» Wells (pres. dal Socio A. CHIARUGI).

MIRONE P., Spettro ultrarosso dell'aldeide furilica (pres. dal Socio G. B. BONINO).

URBANI E. - Dipeptidasi ed acidi nucleici nel metabolismo della cellula (pres. dal Socio G. COTRONEI).

YANO K. - Geometria conforme in varietà quasi hermitiane (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

ZACCHEI A. M. - Sul significato del nucleo dell'istmo in base ad osservazioni in Anfibi Anuri (pres. dal Socio G. COTRONEI).

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 13 marzo 1954*

- ARIENTI F. — Vedi: RONDONI P. e ARIENTI F.
- BASSI Maria. — *Azione di estratti di urine di donne portatrici di cancro uterino sulla pelle di topo*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 2.
- BERNELLI-ZAZZERA Aldo. — Vedi: PIZZETTI Federico e BERNELLI-ZAZZERA Aldo.
- BERTOGLI Daniele e LEONARDELLI Gian Battista. — *Significato dell'iperplasia gigante-follicolare (malattia di Brill-Symmers) sul tessuto linfatico dell'anello di Waldeyer*. Estr. da «Archivio Italiano di Otolgia, Rinologia e Laringologia», vol. LXIV, 1953, fasc. 5.
- BERTOGLI Daniele. — Vedi: LEONARDELLI Gian Battista e BERTOGLI Daniele.
- BISSI Amleto. — *Terapia schelo-chirurgica dei grossi angiomi cavernosi*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 3.
- BISSI Amleto e PASINI Carlo. — *Considerazioni sui tumori a cellule granulose della lingua*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 2.
- BISSI A., PAGNONI A. e PEROTTI B. — *Contributo allo studio della pericardite calcarea costrittiva. (Eccezionale evoluzione di un caso non comune)*. Estr. da «Radiologia», vol. IX, 1953, n. 10.
- BISSI Amleto. — Vedi: BUCALOSSI Pietro e BISSI Amleto.
- BOSELLI A. e PIEMONTE M. — *Alterazioni della protidemia nella diversa evoluzione delle metastasi da cancro mammario*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 4.
- BUCALOSSI Pietro. — *Il problema del dolore nei cancerosi*. Estr. da «I Problemi del Servizio Sociale», quaderno 4.
- BUCALOSSI Pietro e BISSI Amleto. — *Considerazioni generali sui melanoblastomi e sui problemi del loro trattamento*. Estr. da «Gazzetta Internazionale di Medicina e Chirurgia», vol. LVIII, 1953, nn. 1-2.
- BULLO Enzo. — *Valore dello studio strati-grafico del torace nella patologia dell'albero tracheo-bronchiale*. Estr. da «Corso di Broncologia», vol. I, Milano, 1952.
- CALVI Nardo. — *Contributo alla conoscenza radiologica dei condrosarcomi*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 4.
- CARMINATI V. e CHIRICO M. — *Oncogenesi indotta da trattamento con agenti granulomatogeni in ratti trattati con 3-4 benzofirene*. Nota I: *Esperienze con anidride silicica*. Comunicazione. Estr. da «Atti del Convegno di Cancerologia», Bolzano, 21-23 giugno 1952.
- CATANIA Vinicio C. e PIZZETTI Federico. — *Metastasi linfoghiandolari periferiche da neoplasie a sede ignota*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 6.
- CHIEREGO F. — Vedi: GALLICO E., CHIEREGO F. e RABOTTI G. C.
- CHIRICO Mario e MANZOTTI Mario. — *Contributo sperimentale allo studio della «resistenza alla deformazione eritrocitaria»*. Estr. da «Haematologica», vol. XXXVI, 1952, fasc. 10.
- *Revisione del concetto di poichilocitosi*. Nota seconda: *Nel patologico: l'«eterocitosi»*. Estr. da «Haematologica», vol. XXXVI, 1952, fasc. 10.
- CHIRICO Mario e VESCOVO Riccardo. — *Plasticità eritrocitaria e anisocitosi*. Estr. da «Haematologica», vol. XXXVII, 1953.
- *La «resistenza alla deformazione eritrocitaria» nelle macrocitosi in corso di cirrosi epatica*. Estr. da «Giornale di Clinica Medica», vol. XXXIV, 1953, fasc. 12.
- CHIRICO M. — Vedi: CARMINATI V. e CHIRICO M.
- CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE. — *Convegno sulla meccanizzazione dell'agricoltura nei suoi aspetti scientifici e tecnici. Bari, 17 settembre 1953. (I<sup>a</sup> Riunione Scientifico-tecnica indetta dal C.N.R. in occasione della XVII Fiera del Levante)*. Roma, 1953. Pp. XXIV-196, in-8°.



- CUDKOWICZ G. — Vedi: RONDONI P. and CUDKOWICZ G.
- D'ALÒ Roberto. — *Endometrioma rettale a tipo neoplastico*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 1.
- DESTRO F. — Vedi: GOISIS M. e DESTRO F. — Vedi: GOISIS M., DESTRO F. e SIRTORI C.
- DI PIETRO Sergio. — *L'uso della trietilenmelamina (T.E.M.) nella chemioterapia delle neoplasie*. Estr. da «Minerva Medica», vol. I, 1953, n. 19.
- FILIPPI Paolo. — *Contributo alla conoscenza istomorfologica ed istogenetica dei condromi broncopulmonari primitivi*. — Estr. da «Rivista di Anatomia Patologica e di Oncologia», vol. VII, 1953, n. 1.
- GALLICO Edoardo. — *Le sostanze radiomimetiche nel quadro del meccanismo d'azione delle radiazioni ionizzanti*. Estr. da «Pubblicazioni Chimiche, Biologiche e Mediche», vol. I, 1953.
- GALLICO Edoardo e PIZZETTI Federico. — *Studio dello stress chirurgico in base al microgramma*. Estr. da «Minerva Chirurgica», a. VII, 1953, n. 18.
- GALLICO E., CHIEREGO F. e RABATTI G. C. — *Studio elettroforetico delle proteine nei liquidi patologici*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 4.
- GIACOMELLI V. — *L'azione del pregnenolone sul tessuto di granulazione*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 5.
- GOISIS M. e DESTRO F. — *Le discheratosi della vulva*. Estr. da «Annali di Ostetricia e Ginecologia», a. LXXV, 1953, fasc. 5.
- GOISIS M., DESTRO F. e SIRTORI C. — *L'endometriosi*. Estr. da «Annali di Ostetricia e Ginecologia», a. LXXV, 1953, fasc. 8.
- GOISIS M. — Vedi: SIRTORI C. e GOISIS M.
- GRATTAROLA Renzo. — *L'attività della corteccia surrenale durante la radium-terapia: dosaggio del deidroisoandrosterone*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 6.
- *L'attività surrenalica durante la radium-terapia per carcinoma dell'utero*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 6.
- *Indagine cromatografica quantitativa durante radium-terapia per carcinoma dell'utero. Influenza dei gruppi androgeni e glucoattivi del metabolismo glucidico*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 6.
- ISTITUTO NAZIONALE DI OTTICA. — *Catalogo delle pubblicazioni*. Firenze, 1953. Pp. 162, in-8°.
- LADO P. e SOMMARIVA S. — *Comportamento delle fosfatasi seriche «in vitro» per interazione con 3-4 benzopirene*. Comunicazione. Estr. da «Atti del Convegno di Cancerologia», Bolzano, 21-23 giugno 1952.
- LEONARDELLI Gian Battista e BERTO GALLI Daniele. — *Sul significato della Linfopatia gigantomollicolare (così detta malattia di Brill-Symmers)*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 5.
- LEONARDELLI Gian Battista e MEDA Piero. — *I tumori maligni nelle prime vie aeree e digestive nell'età infantile*. Estr. da «Archivio Italiano di Otologia, Rinologia e Laringologia», vol. LXIV, 1953, fasc. 4.
- LEONARDELLI Gian Battista e PIZZETTI Federico. — *I «cilindromi». Contributo alla conoscenza istopatologica, istochimica e clinica dei «cilindromi» e delle neoplasie «cilindromatosimili»*. Estr. da «Archivio Italiano di Otologia, Rinologia e Laringologia», vol. LXIV, 1953, fasc. 3.
- *Modificazioni morfologiche del tessuto linfopiteliale della tonsilla palatina da azotoprite*. Estr. da «Minerva Otorinolaringologica», a. III, 1953, n. 1.
- LEONARDELLI Gian Battista. — Vedi: BERTO GALLI Daniele e LEONARDELLI Gian Battista.
- Vedi: PIZZETTI Federico e LEONARDELLI Gian Battista.
- LOMONACO F. — Vedi: PRICOLO V. e LOMONACO F.
- LUCIANI L. — Vedi: PARACCHI P. e LUCIANI L.
- LUZZATTI Guido e PEROTTI Bruno. — *La stratiografia in proiezione laterale nella diagnostica delle affezioni del torace*. Saluzzo, Edizioni Minerva Medica, 1953. Pp. 103, in-8°, con figg.
- MANZOTTI Mario. — Vedi: CHIRICO Mario e MANZOTTI Mario.
- MEDA Piero. — Vedi: LEONARDELLI Gian Battista e MEDA Piero.
- Microrganismi al microscopio elettronico*. Milano, Ed. Sagdos, 1952. Pp. 64, in-4°, con figg. e tavv.
- MIRAGLIA Ferruccio. — *Contributo casistico e istogenico ai tumori di Brenner*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 4.

- MIRAGLIA Ferruccio. — *Singolare metastasi «per impianto» sull'endometrio di un adenocarcinoma cervicale*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 3.
- NATALE Prisco. — *Considerazioni sullo stadio zero del cancro dell'utero*. Estr. da «Rassegna Clinico-Scientifica», a. XXIX, 1953, n. 7.
- *Risultati a 5 anni di 2000 casi di cancro dell'utero trattati negli anni 1934-1944*. Estr. da «Atti della Società Italiana di Ostetricia e Ginecologia», vol. XLI. Congresso di Napoli, ottobre 1951.
- NECCO A. — Vedi: RONDONI P. e NECCO A. *K. Nederlands Metereologisch Institut*, 1954-1954. 's-Gravenhage, Staatsdrukkerij, 1954. Pp. 469, in-8°, con tavv.
- PAGNONI A. — Vedi: BISSI A., PAGNONI A. e PEROTTI B.
- PARACCHI P. e LUCIANI L. — *Il carcinoma della sfera genitale nelle donne anziane (1169 casi dai 60 anni in su)*. Estr. da «Minerva Ginecologica», a. V, 1953, n. 10.
- PARVIS D. e SIRTORI C. — *Modificazioni morfologiche e citochimiche in batteri sottoposti all'azione di sostanze cancerogene*. Estr. da «Bollettino I. S. M.», vol. XXXII, 1953.
- PASINI Carlo. — Vedi: BISSI Amleto e PASINI Carlo.
- PELLEGRINI Amedeo. — *Le carcinome intra-épithélial des bronches. Contribution à l'étude du cancer bronchique «in situ» ou soit distant tel*. Estr. da «Les Bronches», vol. III, 1952, nn. 2-3.
- PEROTTI Bruno. — *Sulle cosiddette «pseudoe-pifisi» falangee*. Estr. da «Archivio di Ortopedia», vol. LXVI, 1953, fasc. 6.
- PEROTTI Bruno. — Vedi: LUZZATTI Guido e PEROTTI Bruno.
- Vedi: BISSI A., PAGNONI A. e PEROTTI B.
- PIEMONTE Mauro. — *Chemioterapia e radioterapia della cura dei tumori maligni*. Estr. da «Rassegna Chimico-Scientifica», a. XXIX, 1953, n. 4.
- *Contributo alle conoscenze del quadro clinico radiologico della radionecrosi mandibolare*. Estr. da «La Radiologia Medica», vol. XXXIX, 1953, fasc. 3.
- PIEMONTE M. — Vedi: BOSELLI A. e PIEMONTE M.
- PIZZETTI Federico e BERNELLI-ZAZZERA Aldo. — *Neoplasia doppia (carcinoma e sarcoma) da co-cancerogenesi cutanea del topo*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 3.
- PIZZETTI Federico e LEONARDELLI Gian Battista. — *Sopra le modificazioni indotte da colchicina colchicoside e podofillotossina sul tessuto linfopiteliale della tonsilla palatina*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 4.
- PIZZETTI Federico. — Vedi: CATANIA Vinicio e PIZZETTI Federico.
- Vedi: GALLICO Edoardo e PIZZETTI Federico.
- Vedi: LEONARDELLI Gian Battista e PIZZETTI Federico.
- Vedi: SIRTORI Carlo e PIZZETTI Federico.
- PRICOLO V. e LOMONACO F. — *Mesotelioma peduncolato della pleura*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 4.
- RABOTTI G. C. — Vedi: GALLICO E., CHIEREGO F. e RABOTTI G. C.
- Reports of the Swedish Deep-Sea Expedition 1947-1948*. Vol. III: *Physics and Chemistry*, fasc. II. Göteborg, Kungl. Vetenskaps-och Vitterhets-Samhälle, 1953. Pp. LV-125, in-4°, con figg.
- ROCK T. — *Contributo alla conoscenza dei fibrosarcomi dell'osso*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. I.
- ROCK T. — Vedi: SIRTOSI C., ROCK T. e VERONESI U.
- RONDONI Pietro. — *Alcuni problemi di sintesi delle proteine*. Estr. da «Lo Sperimentale», vol. CIII, 1953, fasc. 1-2.
- *Fattori esterni del cancro, con particolare riguardo ai canceri professionali*. Estr. da «Gazzetta Sanitaria», 1953, nn. 7-8.
- *Patologia cellulare ed oncologia sperimentale*. Estr. da «La Ricerca Scientifica», a. XXXIII, 1953, n. 5.
- *Recenti progressi delle conoscenze sul cancro*. Estr. da «I Problemi del Servizio Sociale», quaderno 4.
- *La sintesi della sostanza vivente*. Estr. da «Rassegna Clinico-Scientifica», a. XXIX, 1953, n. 1.
- *La struttura della cellula batterica*. Estr. da «Bollettino I.S.M.», vol. XXXII, 1953.
- RONDONI P. e ARIENTI F. — *Ueber die Wirkung einiger Steroide auf den Ascorbinsäuregehalt der Organe bei Ratten*. Estr. da «Zeitschrift für Vitaminforschung», vol. XXIV, 1952, n. 3.
- RONDONI P. and CUDKOWICZ L. — *Hydrogen Peroxide in Tumours*. Estr. da «Experientia», vol. IX, 1953, n. 9.

- RONDONI P. e NECCO A. — *Azione combinata di colchicina e di un acridinico su culture di fibroblasti embrionali di pollo*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 3.
- RUSSENBERGER G. V. — Vedi: SIRTORI C. e RUSSENBERGER G. V.
- SIRTORI Carlo. — *L'esame citologico. (Possibilità, limiti, metodiche)*. Comunicazione. Estr. da «Atti del Convegno di Cancrologia», Bolzano, 21-23 giugno 1952.
- *Tumori muscolari*. — Estr. da «Bollettino della Lega Italiana per la lotta contro i Tumori e Rassegna di Oncologia», vol. XXVII, 1953, n. 3.
- *Valore dell'esame citoistologico nella diagnosi dei tumori polmonari*. Estr. da «Gazzetta Internazionale di Medicina e Chirurgia», vol. LVIII, 1953, nn. 1-2.
- SIRTORI C. e GOISIS M. — *Importanza del fattore «imbibizione della sostanza fondamentale» nella riduzione volumetrica di miomi uterini*. Estr. da «Annali di Ostetricia e Ginecologia», a. LXXIV, 1952, fasc. 11.
- SIRTORI Carlo e PIZZETTI Federico. — *Situazione attuale e prospettive future della chemoterapia del cancro*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 3.
- *Sulla patogenesi del carcinoma endometriale prima della menopausa e sui riflessi pratici di alcuni dati statistici*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 1.
- SIRTORI C. e RUSSENBERGER G. V. — *Studio istochimico dei mioblastomi con la reazione di Hotchkiss-Mc Manus*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 1.
- SIRTORI Carlo e VERONESI Umberto. — *Trasformazione neoplastica delle ciste cutanee: incidenza, aspetto morfologico, patogenesi, contributo casistico*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 5.
- SIRTORI Carlo, ROCH T. e VERONESI U. — *Contributo critico e casistico alla conoscenza dei tumori del sistema nervoso simpatico*. Estr. da «Tumori», a. XXXIX, 1953, fasc. 6.
- SIRTORI Carlo. — Vedi: PARVIS D. e SIRTORI C.
- Vedi: GOISIS M., DESTRO F. e SIRTORI C.
- SOMMARIVA S. — Vedi: LADO P. e SOMMARIVA S.
- TRISCHITTA Antonino. — *Systema Naturae usque ad genera viventium atque fossilium secundum nomenclaturam ternariam plurinominalem expositum*. Estr. da «Atti dell'Accademia Peloritana dei Pericolanti», Cl. di Sc. Fis. Mat. e Nat., vol. XLIX, 1950-54.
- Tumori*. Archivio bimestrale fondato da G. Fichera e diretto da P. Rondoni. Milano, a. XL., 1954, fasc. 1.
- VERONESI Umberto. — Vedi: SIRTORI Carlo e VERONESI Umberto.
- Vedi: SIRTORI C., ROCK T. e VERONESI U.
- VESCOVO Riccardo. — Vedi: CHIRICO Mario e VESCOVO Riccardo.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 10 aprile 1954*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Aerodinamica.** — *Stranezze del « Tricomi-gas ».* Nota (\*) del Corrisp. FRANCESCO G. TRICOMI.

1. Nello studio del moto bidimensionale di un gas compressibile nelle vicinanze della velocità del suono  $u$ , si trova <sup>(1)</sup> che, sotto certe condizioni (stazionarietà, irrotazionalità, ecc.), la *funzione di corrente*  $\psi$  soddisfa alla equazione alle derivate parziali di 2° ordine, di tipo misto

$$(1) \quad A(w) \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0,$$

dove  $\theta$  è l'angolo che la velocità  $\mathbf{v}$  del fluido forma con una direzione fissa,  $w$  è una variabile adimensionale legata alla velocità scalare  $v = |\mathbf{v}|$  dall'equazione

$$(2) \quad w = - \int_{v_c}^v \frac{\rho}{\rho_0} \frac{dv}{v},$$

dove  $v_c$  è la *velocità critica* (per cui  $v = u = v_c$ ),  $\rho$  è la densità del gas (con  $\rho = \rho_0$  per  $v = 0$ ) e si è posto

$$(3) \quad A(w) = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 (1 - M^2)$$

essendo  $M = v/u$  l'importantissimo *numero di Mach*.

(\*) Presentata nella seduta del 10 aprile 1954.

(1) Vedi per esempio la mia Conferenza: *Correnti fluide transoniche ed equazioni a derivate parziali di tipo misto*. « Rend. Seminario Mat. Torino », 12, pp. 37-52 (1952-53).



Una delle difficoltà dell'Aerodinamica transonica, cioè di quella in cui si raggiunge e supera il valore  $M = 1$ , è che la (1) non coincide esattamente con l'equazione *standard* di tipo misto:

$$(T) \quad \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

che io studiai (nelle «Memorie» di quest'Accademia) già trent'anni or sono e che perciò viene oggi generalmente citata col mio nome. Si può però parlare di una coincidenza *approssimata* nell'intorno di  $M = 1$ , per cui è  $A(w) = 0$ , oppure (ciò che poi torna ad essere lo stesso) si può identificare *rigorosamente*  $A(w)$  con  $w$  (o, più esattamente, con una quantità proporzionale a  $w$ ) pensando così di sostituire al gas effettivo, in cui - detta  $p$  la pressione - vale l'equazione di stato adiabatica:

$$(4) \quad \frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k, \quad k = \frac{c_p}{c_v} = 1,405,$$

con un gas fittizio - detto da alcuni autori americani «Tricomi-gas» <sup>(2)</sup> - per cui vale un'equazione di stato  $p = f(\rho)$  non molto diversa dalla (4) nelle vicinanze di  $M = 1$ .

Pur riconoscendo verso i colleghi che hanno voluto onorarmi dando il mio nome a questo gas fittizio, non posso nascondere un certo disagio di fronte ad esso, perché - fuori delle immediate vicinanze di  $M = 1$  - esso presenta un comportamento piuttosto strano. Soprattutto mi sorprende il fatto che, al crescere di  $v$  oltre la velocità del suono  $u = v_c$ , il numero di Mach  $M$ , dopo essere passato per un massimo uguale a 1,14 circa, comincia a decrescere e, al limite per  $v \rightarrow \infty$  (non vi è una velocità-limite finita) torna uguale ad *uno*!

2. Per renderci conto di quanto sopra osserviamo anzitutto che, quando vale l'equazione caratteristica del «Tricomi-gas» e cioè

$$(5) \quad A(w) = a^3 w = a^2 \eta$$

avendo posto

$$(6) \quad a = \frac{\rho_0}{\rho_c} (1 + k)^{1/3} \quad \text{e} \quad \eta = a w;$$

l'equazione fondamentale (1) assume la forma

$$\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

e pertanto non differisce che per le lettere usate dall'equazione-*standard* (T).

(2) Vedi per esempio M. H. MARTIN e W. R. THICKSTUN, *An example of transonic flow for the Tricomi-gas*. «4<sup>th</sup> Symp. Applied Math. of the American Math. Soc. 1951», vol. 4, pp. 61-73. (New York McGraw-Hill, 1953).

Successivamente conviene porre in primo piano il rapporto  $v_c/v$  considerato come una funzione della variabile  $\eta$ , cioè la funzione

$$(7) \quad \varphi(\eta) = \frac{v_c}{v}$$

e osservare che in - virtù dell'integrale di Bernoulli e dell'equazione di stato, che forniscono rispettivamente le uguaglianze

$$\frac{dv}{d\rho} = -\frac{1}{\rho v}, \quad \frac{dp}{d\rho} = f'(\rho) = u^2$$

nonché dell'altra uguaglianza

$$\frac{dv}{d\eta} = -\frac{v\rho_0}{a\rho},$$

che immediatamente consegue dalla (2) - derivando successivamente la (7) due volte rispetto ad  $\eta$ , si ha

$$(8) \quad \varphi'(\eta) = -\frac{v_c}{v^2} \frac{dv}{d\eta} = \frac{\rho_0 v_c}{a\rho v}$$

e

$$\varphi''(\eta) = \left( -\frac{\rho_0 v_c}{a\rho v^2} + \frac{\rho_0 v_c}{a\rho u^2} \right) \frac{dv}{d\eta} = \frac{v_c}{a^2 v} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 (1 - M^2) = \frac{v_c}{a^2 v} A(w)$$

cioè

$$(9) \quad \varphi''(\eta) = \frac{A(w)}{a^2} \varphi(\eta).$$

Importante è soprattutto la (9) perché, nel caso del « Tricomi-gas », cioè quando vale la (5), essa ci mostra che la funzione  $\varphi(\eta)$  deve soddisfare alla semplice equazione differenziale del 2° ordine

$$(10) \quad \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} - \eta \varphi = 0$$

che - unitamente alle condizioni iniziali

$$(11) \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = \frac{\rho_0}{a\rho_c} = (1 + k)^{-1/3} = \kappa$$

immediatamente deducibili dalla (7) e la (8) - consente un agevole calcolo della funzione  $\varphi(\eta)$  in termini finiti. Precisamente, osservato che la (10) è sostanzialmente la nota « equazione di Airy », integrabile mediante funzioni di Bessel di ordine  $\pm 1/3$ , si ha

$$(12) \quad \varphi(\eta) = \sqrt{-\eta} \left[ 3^{-1/3} \Gamma(2/3) J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} \sqrt{-\eta^3} \right) - 3^{-2/3} \Gamma(1/3) \kappa J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \sqrt{-\eta^3} \right) \right].$$

3. La (12) mette in luce una prima stranezza del « Tricomi-gas ». Invero, essendo  $\varphi(\eta) = v_c/v$ , la funzione  $\varphi(\eta)$  deve essere essenzialmente *positiva* mentre il secondo membro della (12) ha carattere oscillatorio per  $\eta < 0$ ! Ne segue che la variabile  $\eta$  non potrà mai oltrepassare, decrescendo, il « primo » zero del secondo membro della (12) sul semiasse reale-negativo,

cioè un certo valore  $-\eta_0$  che risulta uguale a  $-1,158$  circa. E poiché per  $\eta = -\eta_0$  si ha  $\varphi(\eta) = 0$  cioè  $v = \infty$ , si vede pure che non c'è una velocità-limite finita.

Quanto al comportamento del numero di Mach  $M$ , esso si può determinare osservando anzitutto che è

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 (1 - M^2) = A(w) = a^2 \eta$$

e, in secondo luogo, che

$$\varphi'(\eta) = \frac{\rho_0 v_c}{a \rho v} = \frac{\rho_0}{a \rho} \varphi(\eta)$$

cioè che

$$\frac{\rho_0}{\rho} = a \frac{\varphi'(\eta)}{\varphi(\eta)}.$$

Si ottiene così l'equazione

$$(13) \quad M^2 = 1 - \eta \left[ \frac{\varphi(\eta)}{\varphi'(\eta)} \right]^2$$

da cui si deduce facilmente l'esistenza, nell'intervallo  $(0, -\eta_0)$ , di un solo massimo uguale a circa  $1,14$  per  $\eta = -0,4$  circa. E si constata inoltre che per  $\eta = -\eta_0$  (cioè per  $v = \infty$ ), essendo  $\varphi = 0$  ma  $\varphi' \neq 0$ , si ha da capo  $M = 1$  come per  $v = v_c$ !

Finalmente osserviamo che dalla (13) si trae facilmente l'esplicita espressione della velocità del suono  $u$  in funzione di  $\eta$  perché  $v_c/v = M \varphi(\eta)$ ; precisamente si ha così

$$(14) \quad \frac{v_c}{u} = \frac{\varphi(\eta)}{\varphi'(\eta)} \sqrt{\varphi'^2(\eta) - \eta \varphi^2(\eta)}.$$

Quanto all'equazione di stato, rimando alla mia conferenza cit. sotto <sup>(1)</sup>, in cui è riportato un grafico, dovuto al Cabannes, che la mette a confronto con l'equazione adiabatica (4).

**Cosmologia.** — *Sull'argomento galileiano della quarta giornata dei « Dialoghi » e sue attinenze col problema fondamentale della Geodesia.* Nota <sup>(\*)</sup> del Corrisp. VITTORIO NOBILE.

1. In alcune Note pubblicate recentemente in questi « Rendiconti » <sup>(1)</sup> ho rilevato in modo esplicito come un esame approfondito e obbiettivo dei problemi cosmologici galileiani non possa condurre a conclusioni concordanti coi giudizi che in una vasta letteratura sull'argomento sono stati formulati e presentati come definitivi. A quei giudizi gli autori sono pervenuti attra-

(\*) Presentata nella seduta del 10 aprile 1954.

(1) *Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo. Rilievi e precisazioni.* « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », ser. VIII, vol. IX, fasc. 6, 1950; vol. X, fasc. 5 e vol. XI fasc. 6, 1951.

verso discussioni generalmente vacue perché impostate su considerazioni ed elementi inessenziali, mentre rimane totalmente inavvertita agli autori stessi la imprescindibile necessità di una preliminare indicazione di riferimenti del tutto *speciali* senza i quali gli attributi di *moto* e di *quiete* che tanto frequentemente ricorrono nelle discussioni sulle due grandi questioni galileiane corrispondono, *di fatto* e in ogni caso, a spostamenti e posizioni a carattere insopprimibilmente *relativo*, ciò che toglie ogni senso alle questioni medesime.

In quanto a questo breve cenno retrospettivo esso non è fatto a scopo di semplice collegamento della trattazione presente con quella dei miei scritti anteriori dove le questioni galileiane sono state riesaminate, ma invece per rilevare come, non potendo sussistere alcun dubbio sulla già dimostrata insufficienza dei mezzi di indagine dell'epoca della disputa ad affrontare i problemi cosmologici colà trattati ed anche a permetterne una chiara definizione ed enunciazione, non fossero necessarie ulteriori illustrazioni e dovesse quindi apparire inutile il prendere in esame l'argomento *nuovo* addotto da Galileo nelle discussioni della quarta giornata. A tale certezza si è infatti condotti soprattutto per la decisiva considerazione che debba ritenersi *a priori* inammissibile la pretesa di poter pervenire ad una accettabile soluzione delle proposte questioni attraverso un qualsiasi processo raziocinativo nel quale la preliminare inderogabile condizione della precisazione dei riferimenti rimanga ignorata o comunque inosservata. Questo era il caso dell'argomento predetto.

Per essere più espliciti e per ricollegarci più strettamente al caso speciale che qui interessa, notiamo infatti che Galileo partiva, nelle sue argomentazioni, dal presupposto che il riferimento stellare (spazio collegato con le stelle « fisse ») potesse considerarsi legittimamente come l'*assoluto*. Ora nulla giustificava — prima della creazione della dinamica e della completa precisazione dei suoi principi fondamentali — quella implicita premessa. Gli aristotelici avrebbero potuto continuare in ogni caso e di fronte a qualsiasi risultato nuovo a negare *a priori* tutti i movimenti della Terra e ad attribuire le apparenze relative alle stelle (moto diurno, parallassi, ecc.) a moti d'insieme di questi corpi rispetto ad una Terra fissa e in quanto al fenomeno delle maree non sarebbe mancata loro la possibilità di ricorrere ad altri ritrovati e indicare altre spiegazioni di varia natura, più o meno discutibili.

Né va taciuto, al fine di una giustificazione piena per aver lasciato da parte nella trattazione generale già fatta l'argomento accennato, un altro rilievo del quale, nonostante il carattere di immediata evidenza, occorre fare esplicito cenno. Seguendo le vedute esposte nella quarta giornata, Galileo presenta, come è noto, il fenomeno delle maree quale conseguenza esclusiva e immediata della coesistenza dei due movimenti orbitale e rotatorio attribuiti alla Terra, ma è facile vedere che, anche a volere astrarre da ogni possibile osservazione sulla discussione vaga, sommaria e non esente da confusioni fatta intorno ad un problema di idrodinamica che Galileo affronta con la sola guida di una supposta analogia del fenomeno con altri che si offrono



all'osservazione comune, la validità delle concezioni e conclusioni galileiane è gravemente infirmata per il fatto che non interviene nessuna ipotesi sopra una azione diretta di alcuni fra i corpi celesti come causa sia pure concomitante del fenomeno in questione. Uno sviluppo delle indagini, anche con procedimento rigoroso, procedente in base alla esclusione della detta ipotesi non avrebbe dunque in alcun caso condotto a quell'accordo fra teoria e osservazione nel quale Galileo sperava per una convalida definitiva del « copernicismo ».

Tutto quanto precede mostra a sufficienza come, ai fini di una necessaria precisazione della effettiva posizione dei contendenti nella storica controversia, le discussioni della quarta giornata non avrebbero potuto in nulla modificare le deduzioni alle quali ero pervenuto in base agli argomenti delle prime tre, all'esame dei quali avevo quindi limitato la mia precedente trattazione.

2. Messo bene in luce quanto innanzi, si è condotti nel modo più diretto e naturale all'osservazione che, rimossi con la creazione della dinamica quegli ostacoli per i quali doveva considerarsi arbitrario e privo di significato l'assunto di una « immobilità » stellare e dato quindi un senso preciso ai movimenti attribuiti alla Terra, potesse bene a ragione porsi la questione di stabilire se un effetto del genere di quello preconizzato da Galileo (cioè perturbamento dell'equilibrio dei mari indipendente da quello direttamente riferibile all'attrazione luni-solare) fosse da attendersi e da mettersi in relazione coi predetti movimenti terrestri.

Una indagine nel senso ora accennato è mancata e si è diffusa invece largamente, anche fra gli autori più disposti ad una incondizionata apologia dell'uomo, la persuasione che le idee di Galileo sulla causa del fenomeno delle maree fossero totalmente fondate su *sostanziali errori*. L'esame di tale atteggiamento dei critici è ben facile, ma all'esame stesso è opportuno e utile - nonché, *dal punto di vista storico, doveroso* - far seguire alcune osservazioni sulla impostazione che deve darsi al problema nello stato attuale delle nostre conoscenze. Da tale più completa analisi risulteranno facilmente conclusioni abbastanza ovvie ma sfuggite ad autori insufficientemente preparati ad affrontare una trattazione esauriente della questione. In quanto agli affrettati giudizi, le considerazioni sulle quali questi si fondano sono di due specie. Anzitutto quelle relative alla mancanza, nelle argomentazioni di Galileo, di ogni ipotesi sopra un effetto gravitazionale dipendente da azione luni-solare, effetto che dopo Newton doveva ritenersi innegabile e che come tale era noto, pure senza una completa comprensione del problema, ai predetti autori. In secondo luogo va considerato che i « copernicisti » si trovavano in uno stato ideale di fiduciosa sicurezza riguardo alla efficacia conclusiva delle discussioni delle prime tre giornate, le quali, nel loro concetto, avevano avuto per effetto quello di *ridurre all'evidenza una realtà copernicana*. Tale sicurezza era del tutto illusoria e l'assunto irrealizzabile per le ragioni esposte nel mio precedente studio, ma quegli autori

convinti del contrario, erano propensi a considerare con diffidenza ogni pensiero nuovo che portasse loro sgraditi elementi di dubbio e turbasse l'assetto delle loro idee, tanto più che nel caso specifico la questione posta all'esame sfuggiva alla loro diretta competenza.

Venendo ora alla parte sostanziale del presente studio, notiamo che in un esame preliminare immediato delle nuove vedute risulta che il complesso dei dati e dei procedimenti deduttivi di cui si avvale Galileo può essere considerato insufficiente ai fini della ricerca *ma non però inconsistente*.

Notiamo infatti che Galileo deduce la impossibilità di uno stato di equilibrio delle acque dal solo fatto che pei punti della Terra appartenenti allo stesso parallelo la composizione della velocità dovuta al moto di rotazione con quella dovuta al moto orbitale dà luogo necessariamente a vettori scalarmente diversi. Ora la risultante di quelle due velocità è la velocità di *trascinamento* corrispondente al punto (molecola) che si considera e questo solo dato non può permettere nessuna deduzione sul moto *relativo alla Terra* dello strato di acqua che in parte la ricopre, mentre sono appunto conclusioni in tal senso quelle che occorrerebbero. Per la conoscenza del moto relativo sono indispensabili oltre ai dati sul moto di trascinamento anche altri riguardanti il moto *assoluto* e ciò non solo esige la introduzione del concetto di *forza* (escluso accuratamente da Galileo in tutto il corso delle discussioni) ma presuppone l'avvenuta generalizzazione del fondamentale legame tra forza e accelerazione, relazione messa in luce da Galileo ma solo limitatamente al caso dell'accelerazione costante (moto dei gravi).

È questo il punto in cui Galileo è immobilizzato nel corso dei suoi tentativi. Egli non ha il concetto generale (vettoriale) dell'accelerazione, rifiuta di ammettere quello di attrazione mutua fra i corpi e anche quello di *forza* in generale, per ragioni che qui sarebbe superfluo discutere. Gli manca così l'apporto di tutto ciò che sostanzialmente contiene e di ciò che esprime la seconda legge della dinamica, ossia di tutto ciò che ai nostri tempi è racchiuso nelle equazioni che la dinamica impone e che è di importanza assolutamente sostanziale ai fini della ricerca in questione. Ciò a prescindere dalla totale inesistenza, a quell'epoca, di mezzi matematici adeguati al compito di scrivere le accennate equazioni e di integrarle.

Appare dunque ben chiaro che la via giusta per poter affrontare il problema posto da Galileo era a lui assolutamente preclusa e ignota. Ma non appaiono ancora, in quanto egli espone sull'argomento, veri e propri *errori*.

3. Per esaminare più dappresso l'argomento, allo scopo di chiarire convenientemente la materia nei riguardi storici (reale posizione logica di Galileo), occorre fare ciò che gli autori del passato non hanno fatto né mai tentato: scrivere le equazioni del problema idromeccanico (movimento e equilibrio dei mari) nella forma più completa. Tali equazioni porgeranno gli elementi per conclusioni immediate sulla attendibilità delle congetture galileiane.

Si consideri lo strato liquido ricoprente la Terra come *sottile* <sup>(2)</sup> e si indichino: con  $\mathbf{v}_r$  il vettore della velocità relativa del punto (molecola) che si trova in P al tempo  $t$ , con  $\mathbf{a}_r$ ,  $\mathbf{a}_\tau$ ,  $\mathbf{a}_c$ ,  $\dot{p}$  e  $\rho$  rispettivamente le accelerazioni (vettori) relativa, di trascinamento e complementare e inoltre la densità e la pressione, il tutto corrispondente alla molecola (P,  $t$ ). Sia infine  $\mathbf{F}$  il vettore della risultante delle forze in P (azione newtoniana totale), relativo alla massa unitaria.

Potrà allora scriversi (forma euleriana delle equazioni dell'idrodinamica nel moto relativo)

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{a}_r - \mathbf{a}_\tau - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

In quanto alla equazione di continuità  $d\rho/dt = \rho \text{div } \mathbf{v}$  essa si riduce nel nostro caso per la incompressibilità del fluido a  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  (e vale, naturalmente, anche rispetto agli assi mobili perché da  $\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{G}}_a + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{G}) + \mathbf{v}_r$  e dalla definizione di divergenza segue  $\text{div } \mathbf{v}_r = \text{div } \mathbf{v}_a$ ).

Se ora si distinguono in  $\mathbf{F}$  i due vettori  $\mathbf{F}_T$  e  $\mathbf{F}_i$  che lo compongono e che corrispondono rispettivamente alle azioni esercitate sulla massa unitaria considerata dalla Terra e dall'insieme di tutti i corpi celesti  $C_i$  dei quali l'azione non sia trascurabile, se inoltre indichiamo con  $\boldsymbol{\omega}$  il vettore della rotazione terrestre e con  $\mathbf{G}_a$  quello della accelerazione assoluta del centro di massa predetto, potremo scrivere la (1) e l'equazione di continuità (notando che la derivata temporale  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  può, ai fini di questo studio, ritenersi nulla) sotto la forma

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{F}_T + \sum_i \mathbf{F}_i - \ddot{\mathbf{G}}_a - \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{G})] - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \\ \text{div } \mathbf{v}_r = 0. \end{cases}$$

Se ora si nota che le forze  $\mathbf{F}_T$  e  $\mathbf{F}_i$  sono conservative e dipendenti da potenziali ben noti, che il doppio prodotto vettoriale è il gradiente dello scalare  $1/2 \text{grad } [\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{P} - \mathbf{G}]^2$  e che il vettore  $\mathbf{G}_a$ , indipendente da P, può considerarsi come il gradiente di  $\ddot{\mathbf{G}}_a \times \mathbf{P} - \mathbf{G}$ , potremo porre le equazioni (2) sotto una forma definitiva. Osserviamo intanto che la differenza  $\sum_i \mathbf{F}_i - \ddot{\mathbf{G}}$  è quella fra le risultanti delle azioni (forze) che l'insieme dei corpi celesti esercita sopra una massa unitaria collocata in P e sopra un'altra identica posta in G. Questo insieme è quindi il gradiente dello scalare (funzione, evidentemente, anche del tempo)

$$(3) \quad W(\mathbf{P}, t) = f \sum_i \int_{C_i} \frac{k d\tau}{r(\mathbf{P})} - \ddot{\mathbf{G}}_a \times (\mathbf{P} - \mathbf{G}),$$

(2) Ciò implica che il centro di massa del tutto si può considerare fisso rispetto alla parte solida.

dove nell'integrale di volume  $k$  indica la densità nel punto generico M appartenente alle masse attraenti e  $r(P)$  la distanza fra M e il punto P già considerato. Le equazioni (2) assumono allora la forma

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \text{grad} \left[ f \int_T \frac{k d\tau}{r(P)} + W(P, t) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \frac{p}{\rho} \right] - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r, \\ \text{div } \mathbf{v}_r = 0 \end{cases}$$

supponendosi riferiti i punti P ad una terna solidale con la Terra, con l'origine in G e con l'asse delle  $z$  coincidente con l'asse di rotazione.

Queste equazioni riassumono le quattro equazioni ordinarie alle derivate parziali le quali — riducendosi l'equazione caratteristica alla forma  $p = \text{cost.}$  — bastano da sole a caratterizzare il campo vettoriale delle velocità e la pressione  $p(P, t)$  in corrispondenza a tutti i movimenti della massa liquida che siano possibili e compatibili con le forze in atto.

Lasciando qui da parte il problema generale del *moto* e i procedimenti che possono seguirsi per la costruzione, in vista di fini pratici, di una teoria semplificata, passerò a trattare brevemente della possibilità o meno di uno stato di equilibrio, problema il quale, come è noto, è di alto interesse anche per la Geodesia. Nello stato di equilibrio la seconda delle (4) è identicamente soddisfatta. In quanto alla prima essa dovrebbe egualmente essere verificata — essendo l'equilibrio un caso particolare del moto — *in ogni tempo* sempre che sia  $d\mathbf{v}_r/dt = 0$ ,  $\mathbf{v}_r = 0$ . Ciò implica che debba essere sempre nullo il gradiente che figura nelle (4). Si adempie nel modo più generale a tale condizione coll'esprimere che lo scalare corrispondente deve ridursi ad una funzione del *solo* tempo e del tutto arbitraria. Detta  $f(t)$  questa funzione, dovrebbe dunque sussistere, indipendentemente dal tempo, la relazione

$$(5) \quad f \int_T \frac{k d\tau}{r(P)} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \frac{p}{\rho} = -W(P, t) + f(t),$$

ciò che sarebbe impossibile, nello stato di equilibrio, in quanto che in tal caso l'espressione a primo membro è una funzione del solo punto, mentre quella al secondo varia anche in funzione del tempo. La (5) potrebbe solo sussistere qualora potesse scegliersi la funzione arbitraria in modo da differire dalla  $W(P, t)$  solo per una costante, ma ciò è da escludere perché la  $W$  dipende *essenzialmente* dal punto. L'equilibrio non può dunque aver luogo in alcun caso; la conclusione sebbene prevedibile è peraltro meno immediata di quanto poteva pensarsi.

È facile ora vedere quale sia la reale posizione di Galileo e comprendere in quale modo si sia potuto diffondere il falso concetto che le considerazioni dei « Dialoghi » siano *sostanzialmente errate*. Riguardo al primo punto, basta pensare, per una conclusione chiara, a ciò che Galileo avrebbe dedotto dalla presente analisi del problema se nessuna delle conoscenze necessarie per eseguirla gli fosse mancata e se soltanto egli avesse escluso — come era nel suo concetto — ogni diretto influsso di corpi celesti. Dalla espressione (3)



del *potenziale di marea* egli avrebbe tolto la prima parte, la quale è invece *insopprimibile* per le ragioni riconosciute innanzi, ma la seconda *basta* incontestabilmente da sola a fare escludere lo stato di equilibrio. Il termine  $-\ddot{\mathbf{G}}_a \times (\mathbf{P} - \mathbf{G})$  rappresenta dunque quello che si potrebbe bene a ragione chiamare *effetto galileiano*, in quanto dipende effettivamente, come si vede, tanto dal moto orbitale della Terra (a cui corrisponde  $\ddot{\mathbf{G}}_a^{(3)}$ ) quanto dalla variazione, col tempo, dell'angolo compreso fra la direzione dell'accelerazione assoluta di G (che è praticamente quella della congiungente G col centro del Sole) e la congiungente PG, variazione che è appunto dovuta alla rotazione terrestre.

Naturalmente la presenza del solo termine galileiano non può dar luogo alla costruzione di una teoria e quell'effetto non può corrispondere né qualitativamente né quantitativamente a tutto ciò che l'osservazione mostra e di cui l'attuale teoria delle maree dà ragione. Ma può ben fondatamente affermarsi che la spiegazione del fenomeno fornita da Galileo, sebbene gravemente incompleta e pertanto inammissibile, *non pecca per errori di concetto* ma solo mostra l'arditezza del pensiero che caratterizza l'insigne uomo e la fiducia di lui nel proprio potentissimo intuito. A tale intuito (che nella discussione intorno al problema delle maree indiscutibilmente si riafferma) Galileo imponeva il compito di anticipare di più che un secolo lo sviluppo del pensiero scientifico mondiale, ossia di affrettare il fatale cammino della storia.

4. È facile ora rendersi conto della ragione per cui il falso concetto della esistenza di fondamentali errori nelle considerazioni di Galileo sulla causa delle maree si sia potuto così largamente diffondere, in modo che anche qualche studioso autorevole lo ha, in passato, accolto senza controllo.

Fondamentale necessità della geodesia è quella di definire in maniera precisa ciò che debba intendersi per « forma della Terra » e la determinazione di una superficie rispondente a tale concetto sarebbe immediata e naturale se sussistesse uno stato permanente di equilibrio relativo dei mari. Mancando tale condizione, i geodeti hanno dovuto riferirsi ad una super-

(3) In realtà la  $\ddot{\mathbf{G}}_a$  e la  $\Sigma \mathbf{F}_i$  (che figura nella (2) e che può indicarsi per simmetria con  $\ddot{\mathbf{\Pi}}_a$ ) sono dovute all'azione di un medesimo campo gravitazionale su due masse unitarie supposte collocate rispettivamente in G e in P. Tale campo è quello determinato dal Sole e dagli altri corpi celesti dei quali si voglia considerare l'azione e si ha

$$\ddot{\mathbf{G}}_a = \text{grad } f \sum_i \int_{C_i} \frac{kd\tau}{r(G)},$$

mentre nella espressione analoga della  $\ddot{\mathbf{\Pi}}_a$  figura  $r(P)$  invece di  $r(G)$ . Ma Galileo, che avrebbe rifiutato di ammettere l'esistenza della  $\ddot{\mathbf{\Pi}}_a$  in quanto presentata come effetto di una *azione a distanza*, non poteva negare un effetto  $\ddot{\mathbf{G}}_a$ , che si rivelava, a differenza dell'altro, con un fatto geometrico evidente (curvatura della traiettoria di G, cioè moto orbitale della Terra), fatto che dava poi origine alla intuitiva spiegazione da lui proposta del fenomeno considerato. In quanto alla *causa prima* del moto orbitale, Galileo si richiamava, come è noto, ad argomenti oltrepassanti il metodo scientifico (mistici o metafisici).

ficie la quale pure non rappresentando una realtà fisica risulti tuttavia, dal punto di vista matematico, bene individuata e invariabile. L'ipotesi sulla cui base si perviene a definire la superficie cercata è quella del carattere periodico della funzione  $W(P, t)$  considerata in ciascun punto come funzione del tempo: ipotesi quasi del tutto rigorosa *a priori* e confermata dalla osservazione (invariabilità del livello mareografico medio in ciascun punto  $P$ ). Se quindi si immagina che alla  $W$  si sia sostituito il valore medio fra quelli che in ciascun punto la funzione assume durante il periodo, la relazione (4) può sussistere senza contraddizione nel presupposto dell'equilibrio. Prende così la forma

$$(6) \quad f \int_T \frac{kd\tau}{r(P)} + W(P) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \frac{p}{\rho} = C$$

e determina una semplice infinità di superficie isobariche, fra le quali può, naturalmente, ritenersi compresa quella al limite della massa liquida (superficie libera dei mari); si perviene così alla nozione di Geoide. Ciò che importa osservare ai fini del presente studio è che nelle considerazioni che hanno condotto a tale risultato non è stato necessario di fare distinzione alcuna fra le due parti che compongono la  $W(P, t)$  e una analoga situazione si presenta nella trattazione della teoria delle maree. Diventa, dopo questa constatazione, ben facile riconoscere come per un esame esauriente e decisivo del pensiero di Galileo sulla questione e per potere emettere sull'esistenza o meno di errori di lui fondati e ben meditati giudizi non era lecito affidarsi ai risultati di ricerche intraprese con obbiettivi differenti e per le quali occorreva una diversa impostazione dell'analisi. Non era infatti necessario nello studio di quelle altre questioni rilevare come le due parti della  $W$  possano assumere espressioni matematiche del tutto differenti, circostanza che è invece di importanza essenziale di fronte alla questione galileiana. Il conglobamento delle due parti anzidette fatto in ricerche d'altra natura ha portato molti critici improvvisati a credere che l'aver Galileo respinto nei « Dialoghi » ogni ipotesi sopra possibili azioni a distanza fra i corpi celesti li autorizzasse senz'altro, dopo il trionfale ingresso della legge newtoniana nella meccanica celeste, a dichiarare fuori della realtà i concetti galileiani in questione. Questi autori non si accorgevano, in mancanza delle cognizioni necessarie per un diretto e personale esame dell'argomento, che una parte della azione gravitazionale negata da Galileo si rivelava, come già detto, con effetti cinematici (accelerazioni di trascinamento) i quali nascevano bensì l'origine più remota da cui derivano ma non potevano sfuggire a Galileo o esser da lui trascurati e dovevano logicamente condurlo ad una sua spiegazione dei fatti osservati. La quale, sebbene gravemente incompleta, come l'analisi qui esposta dimostra, e del tutto insufficiente come rigore, deve tuttavia esser considerata come un primo ragionevole tentativo per una soluzione integrale del grande problema e non può in alcun modo esser classificata fra le illusioni e gli errori, come tanti autori hanno finora affermato.

**Fisiologia vegetale.** — *Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico.* — VIII. *Azione dell'acido indol-3-acetico e dell'acido ascorbico sull'assunzione e sulla perdita d'acqua da parte di tessuti vegetali* <sup>(\*)</sup>.  
Nota di SERGIO TONZIG e FEDERICA TREZZI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio S. TONZIG.

Queste ricerche costituiscono la continuazione e lo svolgimento di quelle eseguite sin nel 1951 e di cui è stato dato conto in una Nota preventiva pubblicata nel gennaio 1952. Loro scopo principale è, ancora una volta, quello di dimostrare come acido indol-acetico (AIA) e acido ascorbico (AA) — usati entro determinati intervalli di concentrazione — determinino opposti effetti sulla cellula vegetale. I fenomeni relativamente ai quali le due sostanze sono state saggiate sono l'assunzione e la perdita d'acqua. Sebbene non sia nostro intendimento affrontare, in questa Nota, il problema del meccanismo col quale AIA e AA influiscono su detti fenomeni, ci sembra che i risultati ottenuti diano già delle buone indicazioni che — peraltro — noi discuteremo, assieme ad altri risultati, in altra Nota.

Quale sia l'influenza che l'AIA esercita sull'assunzione d'acqua è già noto per essere stata fatta oggetto di studio già da parecchi ricercatori. La relativa letteratura è troppo nota perché ci sia bisogno di riferirla qui, sia pure sommariamente. E ciò tanto più in quanto, una volta stabilito che l'AIA stimola l'assunzione d'acqua nella cellula vegetale, ed una volta stabilito un rapporto tra siffatta azione stimolatrice e quella d'ordine più generale — probabilmente sarebbe meglio dire: d'ordine più terminale — che l'AIA esercita sull'accrescimento cellulare, i numerosi Autori che si sono occupati di questo fenomeno l'hanno fatto, ovviamente, allo scopo d'indagare sul meccanismo d'azione dell'AIA; un problema, dunque, che noi abbiamo già detto di non voler considerare in questa Nota.

Un'osservazione soltanto noi vogliamo mettere qui in rilievo. Dopoché Reinders <sup>(1)</sup>, per prima, ha dimostrato il fenomeno su dischetti di tubero di patata, la maggior parte degli Autori che si sono occupati di questi problemi hanno continuato a sperimentare su tessuti di riserva; ancora tubero di patata (Commoner e Mazia <sup>(2,3)</sup>, Commoner, Fogel e Muller <sup>(4)</sup>, Van Overbeek <sup>(5)</sup>,

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.

(1) D. E. REINDERS, «Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam», vol. 41, p. 820 (1938); e: «Rec. Trav. Bot. Néerl.», vol. 39, p. 1 (1942).

(2) B. COMMONER e D. MAZIA, «Plant Physiol.», vol. 17, p. 682 (1942).

(3) B. COMMONER e D. MAZIA, «Am. J. Bot.», vol. 31, suppl. 8 (1944).

(4) B. COMMONER, S. FOGEL e W. H. MULLER, «Am. J. Bot.», vol. 30, p. 23 (1943).

(5) J. VAN OVERBEEK, «Am. J. Bot.», vol. 31, p. 265 (1944).

Levitt <sup>(6)</sup>, Hackett e Thimann <sup>(7)</sup>, Thimann <sup>(8)</sup>, Hackett <sup>(9)</sup>, Brauner e Hasman <sup>(10)</sup>, ecc.) oppure dischi di tubero di topinambour (Bonner, Bandurski e Millerd <sup>(11)</sup>, Burström <sup>(12)</sup>). Naturalmente non sono mancate anche esperienze fatte su tessuti giovani ed in via di attivo accrescimento (ved. per esempio Commoner e Mazia <sup>(2)</sup>, Kelly <sup>(13)</sup>, Van Overbeek <sup>(14)</sup>, Showacre e du Buy <sup>(15)</sup>, ecc.). L'impiego dell'uno o dell'altro tipo di tessuti non ci sembra sia indifferente. È infatti ovvio ch'essi sono orientati verso destini diametralmente opposti e, in ogni caso, la quantità di plasma nei due tipi di tessuti è così sostanzialmente diversa che — se si tratta di fenomeni vitali — i risultati possono indurre, nei due casi, a interpretazioni del tutto diverse.

Ci sembra inoltre che non sia indifferente che le esperienze siano contenute in limiti abbastanza ristretti di tempo oppure siano prolungate addirittura per più giorni. A parte le condizioni di sterilità o meno, è evidente che — in questo secondo caso — i risultati non possono non risentire dell'effetto di fenomeni diversi da quello che ci si propone di studiare e che sono pertanto suscettibili di svisarne il risultato: il consumo di ingenti quantità di materiali respiratori, l'introduzione di sali minerali e, soprattutto, i fenomeni di proliferazione cellulare e di accrescimento plasmatico che non possono non introdurre una quantità di complicazioni. L'interpretazione dei risultati diviene, così, alquanto problematica.

Abbiamo fatto queste considerazioni per giustificare la scelta del materiale e la tecnica delle nostre ricerche. Ci sembra, inoltre, ch'esse debbano esser tenute presenti anche nella valutazione dei risultati.

Le esperienze con le quali abbiamo cercato di mettere in evidenza l'opposta azione dell'AIA e dell'AA sull'assorbimento d'acqua sono le seguenti:

1<sup>a</sup> ESPERIENZA: *assunzione diretta d'acqua da parte di segmenti di coleotile d'avena* (*Avena sativa* var. Victory). — Da 200 coleottili d'avena che avevano raggiunto una lunghezza di circa 2 cm. abbiamo prelevato il segmento terminale di 5 mm. di lunghezza. Divisi in 4 lotti di 50 pezzi ciascuno, e determinato il peso, i segmenti di coleotile sono stati tuffati in matracci di Erlenmeyer contenenti, rispettivamente, 150 cc. d'acqua oppure di soluzione d'AIA  $10^{-4}$  M, d'AA  $1/100$  M o, infine, d'una miscela in parti eguali d'AIA  $10^{-4}$  M ed AA  $1/100$  M. Tutte le soluzioni erano tamponate a pH 6,5 con tampone di Sørensen

(6) J. LEVITT, « Plant Physiol. », vol. 23, p. 505 (1948).

(7) D. P. HACKETT e K. V. THIMANN, « Plant Physiol. », vol. 25, p. 648 (1950); « Am. J. Bot. », vol. 39, p. 553 (1952); « Am. J. Bot. », vol. 40, p. 183 (1953).

(8) K. V. THIMANN, « Growth », vol. 15 (suppl.), p. 5 (1951).

(9) D. P. HACKETT, « Plant Physiol. », vol. 27, p. 279 (1952).

(10) L. BRAUNER e M. HASMAN, « Bull. Faculté Med. Istanbul », vol. 12, p. 57 (1949); « Protoplasma », vol. 41, p. 302 (1952).

(11) J. BONNER, R. S. BANDURSKI e A. MILLERD, « Physiol. Plantarum », vol. 6, p. 511 (1953).

(12) H. BURSTRÖM, « Physiol. Plantarum », vol. 6, p. 685 (1953).

(13) S. M. KELLY, « Am. J. Bot. », vol. 33, p. 837 (1946); « Am. J. Bot. », vol. 34, p. 521 (1947).

(14) J. VAN OVERBEEK, « Am. J. Bot. », vol. 29, p. 677 (1942).

(15) J. L. SHOWACRE e H. G. DU BUY, « Am. J. Bot. », vol. 34, p. 175 (1947).



(che era stato aggiunto anche nel matraccio con acqua semplice) e, durante tutta l'esperienza, nei matracci venne fatto gorgogliare una corrente d'aria. I gruppi di coleottili vennero poi ripesati, previa rapida asciugatura, a 5, 10, 24, 28 e 33 ore dall'inizio dell'esperienza. Temperatura costante di 23,5° C. I risultati sono riportati nella tabella I nella quale sono indicati sia i valori assoluti dei pesi, come anche il loro progressivo incremento percentuale (numeri in corsivo).

TABELLA I.

*Incremento in peso di segmenti apicali di avena per assunzione d'acqua.*

	Peso iniziale	5 ore	10 ore	24 ore	28 ore	33 ore
Controllo	0,1432	0,1826 <i>27,5 %</i>	0,1998 <i>39,5 %</i>	0,2329 <i>62,6 %</i>	0,2537 <i>77,2 %</i>	0,2702 <i>88,7 %</i>
AIA $10^{-4}$ M	0,1388	0,1860 <i>34,0 %</i>	0,2245 <i>61,7 %</i>	0,2618 <i>88,6 %</i>	0,2723 <i>96,2 %</i>	0,2914 <i>109,9 %</i>
AA $1/100$ M	0,1428	0,1718 <i>20,3 %</i>	0,1897 <i>32,8 %</i>	0,2262 <i>58,4 %</i>	0,2366 <i>65,7 %</i>	0,2433 <i>70,4 %</i>
AA+AIA	0,1423	0,1892 <i>33,0 %</i>	0,2236 <i>57,1 %</i>	0,2412 <i>69,5 %</i>	0,2552 <i>79,3 %</i>	0,2809 <i>97,1 %</i>

Nella fig. 1 il risultato dell'esperienza è espresso in forma grafica e, affinché il diverso comportamento dei quattro campioni appaia in forma meglio apprezzabile, con i medesimi risultati è stato costruito il grafico fig. 2 nel quale sono indicate le differenze percentuali del progressivo incremento in peso dei campioni in AIA, AA ed AIA+AA rispetto al controllo.

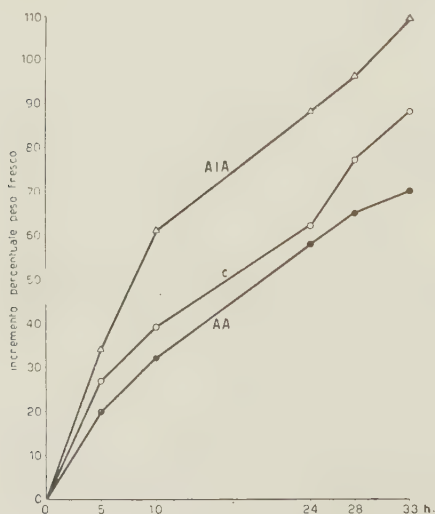


Fig. 1.

è omessa, per chiarezza del grafico, la curva relativa al campione in AIA + AA. Nella fig. 2 sono espresse le differenze percentuali, rispetto al controllo (linea orizzontale), del progressivo incremento in peso dei vari campioni.

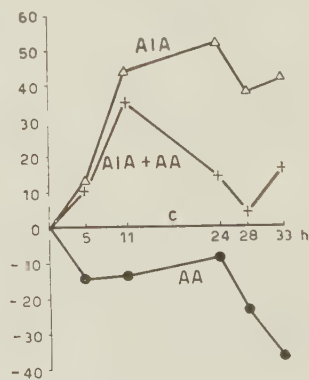


Fig. 2.

Fig. 1 e 2. - Assunzione diretta d'acqua da parte di segmenti di coleottili d'avena. Nella fig. 1, che esprime il progressivo incremento in peso,

2<sup>a</sup> ESPERIENZA: *assunzione diretta d'acqua da parte di segmenti d'ipocotile di ricino* (*Ricinus communis*). — Da 80 plantule di ricino venne prelevato un segmento subterminale d'ipocotile della lunghezza di 2 mm. Suddivisi in quattro gruppi di 20 pezzi, i segmenti sono stati pesati e poi posti in scatole Petri contenenti circa 50 cc. d'acqua oppure di solu-

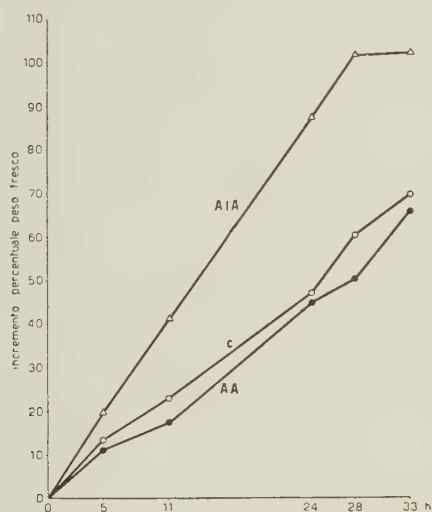


Fig. 3.

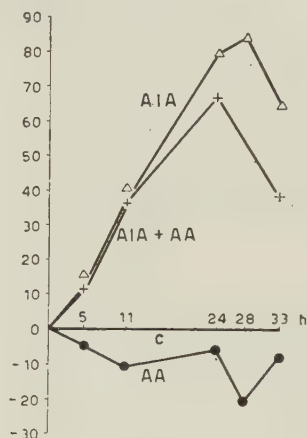


Fig. 4.

Figg. 3 e 4. — Assunzione diretta d'acqua da parte di segmenti d'ipocotile di ricino. Spiegazioni come nelle figg. 1 e 2.

zioni d'AIA  $10^{-4}$  M, d'AA  $1/100$  M e di parti eguali d'AIA  $10^{-4}$  M ed AA  $1/100$  M. Tutte le soluzioni tamponate a pH 6,5 (tampone anche nell'acqua). I segmenti d'ipocotile erano sostenuti su carta da filtro in modo che affiorassero sulla superficie del liquido. Temperatura costante di  $22,5^{\circ}$  C. L'incremento di peso è stato rilevato dopo 5, 11, 24, 28 e 33 ore. I risultati sono riportati nella tabella II e, come spiegato per l'esperienza precedente, essi sono espressi graficamente nelle figg. 3 e 4.

TABELLA II.

*Incremento in peso di segmenti di ipocotili di ricino per assunzione d'acqua.*

	Peso iniziale	5 ore	10 ore	24 ore	28 ore	33 ore
Controllo	0,4370	0,4935 13,5 %	0,5346 23,0 %	0,6430 47,9 %	0,6978 60,5 %	0,7382 70,0 %
AIA $10^{-4}$ M	0,4378	0,5226 19,4 %	0,6188 41,3 %	0,8213 87,6 %	0,8860 102,4 %	0,8843 102,4 %
AA $1/100$ M	0,4438	0,4935 11,2 %	0,5217 17,5 %	0,6435 45,5 %	0,6670 50,3 %	0,7377 66,0 %
AA+AIA	0,4533	0,5404 19,2 %	0,6395 41,1 %	0,8215 81,2 %		0,8564 89,0 %

3<sup>a</sup> ESPERIENZA: *assunzione diretta d'acqua da parte di dischi di lamina fogliare di lupino (Lupinus albus) e fagiolo (Phaseolus vulgaris)*. - Da foglie giovani, peraltro completamente sviluppate, sono stati prelevati dei dischetti di lamina fogliare del diametro di circa 1 cm. Tali dischetti, suddivisi in gruppi di 80, sono stati pesati e posti poi a galleggiare, entro scatole Petri, in circa 50 cc. d'acqua oppure di soluzione d'AIA 10-4 M, d'AA 1/100 M o di parti eguali d'AIA 10-4 M e AA 1/100 M. Tutte le soluzioni tamponate a pH 6,5 (tampone anche nell'acqua). Temperatura costante di 22,5° C. L'incremento di peso è stato rilevato dopo 24 ore. I risultati sono riportati nelle tabelle III e IV.

TABELLA III.

*Incremento in peso di dischi di lamina fogliare di fagiolo per assunzione d'acqua.*

	Peso iniziale	Peso dopo 24 ore	Incremento %	Differenza % dal controllo
Controllo . . . . .	0,3511	0,4746	35,2	100
AIA 10-4 M . . . . .	0,3427	0,4943	44,2	125,8
AA 1/100 M . . . . .	0,3434	0,4460	29,9	85,0
AIA+AA . . . . .	0,3686	0,5037	36,6	104,3

TABELLA IV.

*Incremento in peso di dischi di lamina fogliare di lupino per assunzione d'acqua.*

	Peso iniziale	Peso dopo 24 ore	Incremento %	Differenza % dal controllo
Controllo . . . . .	0,5337	0,6556	22,8	100
AIA 10-4 M . . . . .	0,5350	0,6620	23,7	103,9
AA 1/100 M . . . . .	0,5489	0,6572	19,7	86,3
AIA+AA . . . . .	0,5426	0,6594	21,5	94,2

A queste, abbiamo aggiunto altre due esperienze - delle quali abbiamo già dato notizia nella Nota preventiva più sopra citata ed il cui risultato, comunque, riportiamo anche qui - con le quali l'effetto dell'AIA e dell'AA sull'assunzione d'acqua è stato studiato non su piccole porzioni d'un organo ma su plantule più o meno intere. I fenomeni di cui si è seguito l'andamento sono stati quelli del pianto e della guttazione.

4<sup>a</sup> ESPERIENZA: *pianto in plantule di ricino*. - Plantule di ricino sono state trattate con pomata di lanolina e AIA (2 cc. di AIA 10-4 M per 1 gr. di lanolina) oppure con pomata di lanolina col 10% d'AA. Dopo 17 ore (durante le quali la pomata è stata rinnovata 2 volte) gli ipocotili sono stati recisi a circa 3 cm. dal colletto e se ne valutò

il pianto raccogliendone durante un'ora l'acqua emessa, acqua che venne alla fine pesata. I valori, che si riferiscono a 100 plantule sono:

controllo. . . . .	gr. 6,26	differenza % dal controllo
AIA. . . . .	» 7,45	+ 19,1
AA . . . . .	» 5,56	— 11,2

Una variante della medesima esperienza si ottenne somministrando l'AA per via radicale inaffiando i vasi (con sabbia) con AA 5‰ 20 ore prima della recisione degli ipocotili; e somministrando l'AIA mediante impacchi di ovatta imbevuta di soluzione d'AIA 10-4, parimenti 30 ore prima della recisione. Anche in questo caso i valori che seguono si riferiscono al peso dell'acqua eliminata col pianto da 100 plantule nello spazio di un'ora.

controllo. . . . .	gr. 9,98	differenza % dal controllo
AIA . . . . .	» 13,12	+ 31,5
AA. . . . .	» 0,00	— 100

I mutamenti che, nelle plantule di quest'ultima serie, sono stati determinati dal trattamento preliminare sono stati apprezzati valutando la vischiosità plasmatica nelle cellule epidermiche (tempo e forma di plasmolisi; plasmolitico  $\text{KNO}_3$  0,5 M) ed il contenuto in AA nell'ipocotile:

	tempo e forma di plasmolisi	AA gr. %
controllo	4 p 20 s; concava, infine convessa	0,060
AIA	5 p 30 s; concava	0,048
AA	2 p 40 s; convessa	0,120

5<sup>a</sup> ESPERIENZA: *guttazione in plantule d'avena*. — È stata misurata su plantule d'avena cresciute in soluzione nutritizia di Shive. L'esperienza è stata fatta in ambiente saturo d'umidità e a temperatura costante di 21°C. La somministrazione d'AIA è stata fatta spalmando la punta del coleotile con pomata di lanolina (2 cc. di AIA 1/10.000 per 1 gr. di lanolina); quella dell'AA addizionandolo alla soluzione nutritizia in ragione del 2‰. Le cifre che seguono indicano la quantità d'acqua emessa da 100 plantule nello spazio di un'ora.

controllo . . . . .	gr. 0,212	differenza % dal controllo
AIA . . . . .	» 0,280	+ 32,1
AA. . . . .	» 0,000	— 100

Esperienze abbastanza simili alle nostre, sull'effetto dell'AIA sul pianto di piantine di pisello (*Pisum*) e di girasole (*Helianthus annuus*) erano già state fatte da Skoog, Broyer e Grossenbacher<sup>(16)</sup> i quali ottennero risultati ben paragonabili ai nostri. Lundegardh<sup>(17)</sup> sperimentò invece su radici isolate di frumento e trovò che l'AIA, a seconda delle condizioni sperimentali, stimola il loro pianto a concentrazioni di 10-7 (radici intatte) oppure di 10-5 (radici decapitate).

Stranamente scarse sono le nostre conoscenze sull'effetto dell'AIA sopra la capacità di ritenzione d'acqua da parte di organi e di tessuti vegetali esposti ad evaporare. Diciamo « stranamente » giacché ci sembra che tali conoscenze potrebbero fornirci un importante orientamento nell'interpretazione del meccanismo d'azione dell'AIA sull'accrescimento cellulare. Rientrano, comunque, in quest'ordine d'idee le ricerche di Mitchell e Marth<sup>(18)</sup>, i quali

(16) F. SKOOG, T. C. BROYER e K. A. GROSSENBACHER, « Am. J. Bot. », vol. 25, p. 749 (1938).

(17) H. LUNDEGARDH, « Arkiv för Bot. », vol. I, p. 295 (1949).

(18) J. W. MITCHELL e P. C. MARTH, « Bot. Gaz. », vol. 112, p. 70 (1950).



constatarono che legumi di fagiolo, trattati ancora in pianta (quattro giorni prima del loro distacco) con acido 4-clorofenossiacetico, aumentano la loro capacità di ritenzione d'acqua dopo il loro raccolto ed immagazzinamento. Anche più simili alle nostre sono le esperienze di Jurišić<sup>(19)</sup> il quale controllò le variazioni dell'evaporazione di foglie di *Bryophyllum calycinum* recise subito sopra il loro punto d'inserzione, trattate con pomata d'eteroauxina sulla superficie di sezione e lasciate a sé parecchi giorni sotto campana di vetro. I risultati di questo Autore sono piuttosto inaspettati, almeno per noi che abbiamo sempre sostenuto nelle nostre precedenti note che l'AIA aumenta l'idrofilia del plasma: egli trovò infatti che la traspirazione delle foglie trattate aumentò del 50-100 %, rispetto ai controlli, nel primo giorno; diminuì poi nei giorni successivi; ma rimase tuttavia sempre più elevata che nelle foglie di controllo. È però da dire che le foglie di piante succulente hanno dispositivi del tutto particolari che ne regolano la traspirazione, dispositivi di cui esse stesse determinano attivamente una profonda denaturazione nel periodo iniziale dei loro fenomeni di regressione, e che è solo dopo che tale denaturazione è stata compiuta ch'esse possono rapidamente essiccare (Tonzig<sup>(20)</sup>). Può quindi essere - ma l'ipotesi andrebbe controllata - che l'AIA stimoli, nelle foglie staccate, siffatti fenomeni. Le uniche ricerche fatte col nostro stesso intendimento sono quelle di Levitt<sup>(6)</sup> il quale, peraltro, ottenne un risultato praticamente negativo e contrastante con i risultati che più sotto esponiamo. Non ci sembra tuttavia che le esperienze di Levitt siano del tutto persuasive giacché - a prescindere ch'esse sono state condotte su fette di tubero di patata, dunque su un parenchima amilifero a parer nostro inadatto a tale genere di ricerche - il trattamento preventivo al quale egli sottopose il materiale (liofilizzazione) è così radicale da portare a denominatore comune sia le fette trattate con AIA che quelle di controllo; dopo di che non ci sembra sia più possibile attendersi che l'essiccamento ulteriore riveli un diverso comportamento.

Ecco, comunque, le esperienze con le quali, oltre che studiare l'effetto dell'AIA sulla perdita d'acqua, noi ci siamo proposti anche di dimostrare l'azione antagonista dell'AA.

TABELLA V.

*Perdita d'acqua per evaporazione da parte di coleottili d'avena*  
(spiegazione nel testo).

	Acqua totale	1 <sup>a</sup> ora a 40° C	2 <sup>a</sup> ora a 45° C	3 <sup>a</sup> ora a 55° C	AA gr. %
Controllo	91,42	77,42	53,67	28,41	0,255
AIA	91,83	78,06	55,15	29,97	0,150
		+ 1,06	+ 1,90	+ 1,98	
AA	90,63	75,53	52,11	26,19	0,365
		- 2,67	- 2,34	- 3,00	

6<sup>a</sup> ESPERIENZA: *perdita d'acqua per evaporazione da parte di coleottili d'avena*. - Plantule d'avena sono state arricchite d'AIA mediante applicazione di pomata di lanolina (2 cc. d'AIA 10-4 in 1 gr. di lanolina) oppure sono state arricchite d'AA per immersione dell'apparato radicale in soluzione d'AA 2 ‰. Due giorni dopo l'inizio di tale trattamento i coleottili vennero recisi (segmenti di 2-3 cm.) e posti ad essiccare in stufa a temperature

(19) J. JURISČIĆ, « Anz. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. », vol. 76, p. 74 (1939).

(20) S. TONZIG, « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s. vol. 49, p. 32 (1942).

progressivamente maggiori (40° C durante la prima ora; 45° durante la seconda; 55° durante la terza). Di ora in ora i campioni vennero pesati ed i risultati sono inseriti nella tabella V. Va precisato che per « acqua totale » (espressa in ‰ del peso fresco) s'intende quella corri-

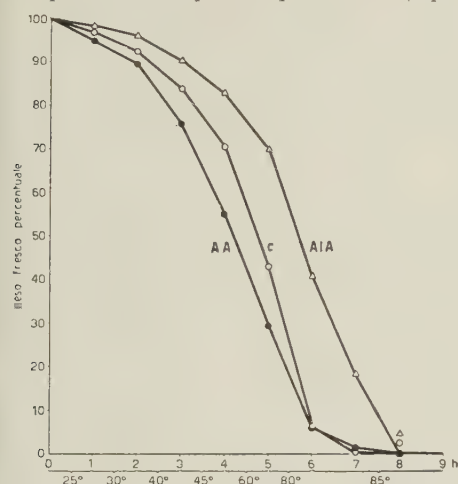


Fig. 5.

zione di peso per esposizione a temperature progressivamente più alte. La fig. 6 esprime le differenze, rispetto al controllo (linea orizzontale), delle perdite percentuali d'acqua nei campioni trattati.

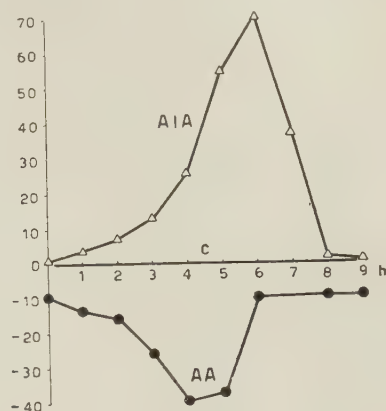


Fig. 6.

Figg. 5 e 6. — Perdita d'acqua per evaporazione da parte di foglie di lupino.

La fig. 5 esprime la progressiva diminuzione di peso per esposizione a temperature progressivamente più alte. La fig. 6 esprime le differenze, rispetto al controllo (linea orizzontale), delle perdite percentuali d'acqua nei campioni trattati.

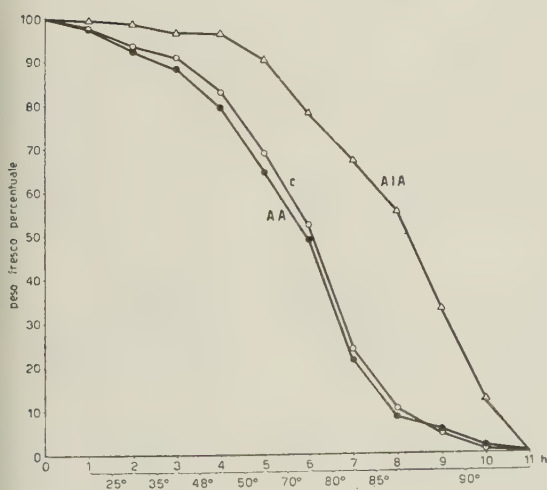


Fig. 7.

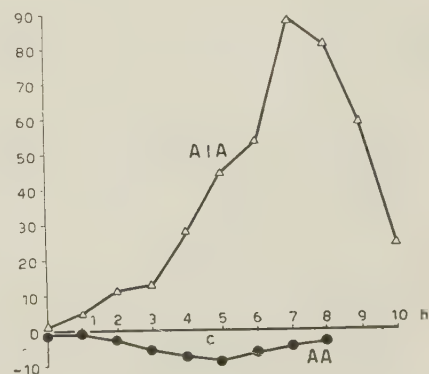


Fig. 8.

Figg. 7 e 8. — Perdita d'acqua per evaporazione da parte di segmenti d'ipocotile di lupino. Spiegazioni come per le figg. 5 e 6.

spondente alla diminuzione di peso tra l'inizio e la fine dell'esperienza. La valutazione non è, evidentemente, del tutto esatta; ma che l'errore non sia sostanziale lo dimostra il fatto stesso che tale acqua « totale » appare, rispetto al controllo, rispettivamente un poco maggiore o un poco minore nei campioni trattati con AIA o con AA. Nella tabella sono indicati: a) il per cento dell'acqua totale ancora presente al momento delle diverse pesate; b) le differenze, rispetto al controllo, delle perdite percentuali d'acqua nei campioni trattati con AIA o con AA (numeri in corsivo).

TABELLA VI.

*Perdita d'acqua per evaporazione da parte di foglie di lupino (spiegazione nel testo).*

	Acqua totale	1 <sup>a</sup> ora a 23° C	2 <sup>a</sup> ora a 30° C	3 <sup>a</sup> ora a 40° C	4 <sup>a</sup> ora a 45° C	5 <sup>a</sup> ora a 60° C	6 <sup>a</sup> ora a 80° C	7 <sup>a</sup> ora a 85° C	8 <sup>a</sup> ora a 85° C	9 <sup>a</sup> ora a 100° C	10 <sup>a</sup> ora a 100° C	AA gr. %
Controllo	88,90	96,72	92,65	83,96	70,30	43,17	6,28	0,15	6,10	0,05	0,00	0,069
AIA	89,28	98,14 +1,80	95,84 +3,57	90,31 +6,73	82,83 +12,91	70,00 +27,21	40,85 +34,95	18,25 +18,48	0,44 +0,72	0,00 +0,38	0,00 0	—
AA	83,99	95,00 -6,63	89,73 -7,83	75,92 -12,95	55,39 -19,82	29,41 -18,67	6,23 -4,96	1,24	0,09 -4,92	0,01 -4,91	0,00 0	0,420

TABELLA VII.

*Perdita d'acqua per evaporazione da parte di ipocotili di lupino (spiegazione nel testo).*

	Acqua totale	1 <sup>a</sup> ora a 23° C	2 <sup>a</sup> ora a 35° C	3 <sup>a</sup> ora a 45° C	4 <sup>a</sup> ora a 50° C	5 <sup>a</sup> ora a 70° C	6 <sup>a</sup> ora a 80° C	7 <sup>a</sup> ora a 85° C	8 <sup>a</sup> ora a 85° C	9 <sup>a</sup> ora a 90° C	10 <sup>a</sup> ora a 90° C	11 <sup>a</sup> ora a 100° C	AA gr. %
Controllo	93,61	97,69	93,66	90,86	82,87	69,05	52,18	23,80	10,17	4,38	0,84	0,00	0,017
AIA	94,11	99,41 +2,22	98,63 +5,47	96,56 +6,20	96,17 +13,80	90,09 +21,54	78,07 +26,39	67,02 +43,72	50,08 +40,41	33,02 +29,14	12,34 +12,0	0,00	—
AA	93,55	97,66 -0,09	92,53 -1,19	88,23 -2,69	79,39 -3,54	64,65 -4,46	49,19 -3,05	21,39 -2,47	8,51 -1,72	5,25	1,60	0,00	0,064

TABELLA VIII.

*Perdita d'acqua per evaporazione da parte di foglie verdi o albine d'«Acer Negundo» (spiegazione nel testo).*

	Acqua totale	1 <sup>a</sup> ora a 28° C	2 <sup>a</sup> ora a 35° C	3 <sup>a</sup> ora a 45° C	4 <sup>a</sup> ora a 60° C	5 <sup>a</sup> ora a 70° C	6 <sup>a</sup> ora a 80° C	7 <sup>a</sup> ora a 80° C	8 <sup>a</sup> ora a 90° C	t. plasmol.	AA gr. %
Foglie verdi . . . . .	1,0843	94,04	83,80	35,01	10,29	0,49	0,19	0,00	0,00	1 p 30 s	0,46
Foglie albine . . . . .	1,0034	93,55	87,56	46,33	25,58	2,00	2,11	0,00	0,00	2 p 30 s	0,17

7<sup>a</sup> ESPERIENZA: *perdita d'acqua per evaporazione da parte di foglie e di ipocotili di lupino*. - L'esperienza venne fatta esattamente come la precedente, però su piantine di lupino di cui vennero usate, dopo il trattamento preventivo, le foglie e, separatamente, dei segmenti di ipocotile di 3-5 cm. di lunghezza. I dati sono contenuti nelle tabelle VI e VII e, per permettere un loro miglior apprezzamento, diamo la rappresentazione grafica sia delle diminuzioni percentuali dell'acqua conservata (rispetto alla totale), sia delle differenze, rispetto al controllo, delle perdite percentuali d'acqua (figg. 5, 6, 7, e 8).

8<sup>a</sup> ESPERIENZA: *perdita d'acqua per evaporazione da parte di foglie verdi o albine d'«Acer Negundo»*. - Nelle due precedenti esperienze l'arricchimento in AA venne ottenuto sperimentalmente; con la presente esperienza si approfittò del naturalmente diverso contenuto d'AA nelle foglie verdi o in quelle albicate della medesima pianta. Foglie verdi e foglie albiche di *Acer Negundo* - perfettamente corrispondenti per età e grandezza - vennero raccolte in piena luce e senz'altro poste ad essiccare a temperature crescenti come spiegato per l'esperienza 6. Nella tabella VIII, che contiene i risultati, è anche indicato il diverso contenuto in AA dei due campioni e il diverso tempo di plasmolisi (plasmolitico  $\text{KNO}_3$  0,7 M). Cfr. inoltre la fig. 9.

Ci sembra che, come dati di fatto, i nostri risultati siano quanto mai chiari e, d'altra parte, noi non vogliamo addentrarci in questa Nota nella discussione delle deduzioni ch'essi permetterebbero dal punto di vista del meccanismo d'azione dell'AIA. Ci limitiamo pertanto a mettere in evidenza:

a) che l'AIA e l'AA influiscono in maniera opposta sui fenomeni che, direttamente o indirettamente (aumento di peso, pianto, guttazione) si accompagnano all'assunzione d'acqua, come pure sulla perdita d'acqua per evaporazione;

b) che l'AIA non soltanto stimola l'assunzione d'acqua, ma ne ritarda la perdita per evaporazione. Tale reperto ci sembra assumere particolare significato dal punto di vista dell'interpretazione del meccanismo d'azione delle sostanze di crescita.



Fig. 9. - Perdita d'acqua per evaporazione, a temperature crescenti, di foglie verdi (v) o albiche (a) d'*Acer Negundo*.



## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi matematica.** — *Caratterizzazione della trasformazione di Laplace mediante la relativa regola di derivazione negli spazi  $L^p$  e  $U$ .*  
Nota di GUSTAV DOETSCH, presentata (\*) dal Socio M. PICONE.

$L^p$  significhi lo spazio  $L^p(0, \infty)$ . Inoltre utilizzeremo la seguente  
*Definizione I.* — Lo spazio delle funzioni  $F(t)$  che sono sommabili in ogni intervallo finito  $0 \leq t \leq T$  e per le quali esiste l'integrale di Lebesgue improprio  $\int_0^{\infty} F(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T F(t) dt$ , venga chiamato  $U$ . Lo spazio viene metricizzato mediante la norma

$$\|F\| = \sup_{0 \leq t < \infty} \left| \int_0^t F(\tau) d\tau \right|.$$

Convergenza forte in  $U$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F(t)$ , significa convergenza uniforme di  $\int_0^t F_n(\tau) d\tau$  verso  $\int_0^t F(\tau) d\tau$  in  $0 \leq t \leq \infty$ . ( $U$  non è completo e perciò non è uno spazio di Banach).

Recentemente ho dimostrato (1): *Un funzionale  $\mathfrak{T}\{F\} = f$  che dipende ancora da un parametro complesso  $s: f = f(s)$ , il quale dunque costituisce una trasformazione funzionale, sia distributivo per un certo valore  $s$  con  $\Re s > 0$  e continuo a) in  $L^2$  o b) in  $V = L^2 + L$  o c) in  $W = L^2 + U$  (2).*

*Purché in tutti e tre i casi  $\mathfrak{T}$  soddisfi alla «regola di derivazione» in  $L^2$ :*

$$(1) \quad \mathfrak{T}\{F'\} = s\mathfrak{T}\{F\} - F(+0),$$

*allora è in  $L^2$  rispettivamente in  $V$  rispettivamente in  $W$  per tale valore di  $s$ :  $\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{L}$ , ove  $\mathfrak{L}$  significa la trasformazione di Laplace*

$$\mathfrak{L}\{F\} \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = f(s).$$

I teoremi relativi ai casi b) e c) seguono dal teorema relativo al caso a). Questo fu dimostrato al modo seguente: mediante la (1) è possibile calcolare univocamente il valore di  $\mathfrak{T}\{e^{-t/2} L_n(t)\}$ , ove  $L_n(t)$  è il polinomio (speciale)

(\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.

(1) G. DOETSCH, *Charakterisierung der Laplace-Transformation durch ihr Differenzierungsgesetz*. «Math. Nachr.» 5, pp. 219-230 (1951).

(2) Il segno + indica la somma di due insiemi (che possono avere elementi comuni).

di Laguerre. Risulta che tale valore coincide con  $\mathfrak{L}\{e^{-t/2} L_n(t)\}$ . Essendo, come è noto, la successione di funzioni  $e^{-t/2} L_n(t)$  chiusa <sup>(3)</sup> in  $L^2$ ,  $\mathfrak{T}$  e  $\mathfrak{L}$  coincidono su una successione chiusa e perciò, data la loro continuità in  $L^2$ , sono identiche.

Con ciò è dimostrato che la regola di derivazione è caratteristica per la trasformazione  $\mathfrak{L}$  nello spazio  $L^2$ . Per gli spazi  $L$  e  $U$  invece non segue un risultato altrettanto conciso perché ivi bisogna servirsi dello spazio  $L^2$ . Che per gli spazi  $L$  (più generalmente  $L^p$ ,  $p \geq 1$ ) e  $U$  vale lo stesso semplice enunciato come per  $L^2$  fu dimostrato da R. San Juan <sup>(4)</sup> con un altro metodo. Seguendo E. Levi <sup>(5)</sup> egli sfrutta il fatto (Steinhaus, Fréchet, F. Riesz) che un funzionale continuo in tali spazi può essere rappresentato mediante un integrale, il cui nucleo poi, in virtù della regola di derivazione (rispettivamente regola di integrazione o di composizione) risulta essere  $e^{-st}$ . Nel seguito dimostrerò che questi teoremi sugli spazi  $L^p$  e  $U$  possono essere dimostrati anche col metodo mio <sup>(6)</sup>. Ciò è conseguenza del fatto che la successione  $\varphi_n(t) = e^{-t/2} t^n$  è chiusa in tali spazi. Infatti ciò è tutto quello che viene utilizzato nel mio metodo, come ho già messo in rilievo in loc. cit. <sup>(1)</sup>, p. 224, osservazioni 1 e 2. Che in loc. cit. <sup>(1)</sup> venissero utilizzate le combinazioni ortonormali  $e^{-t/2} L_n(t)$  delle  $\varphi_n(t)$  era inessenziale e non aveva altro scopo che di permettere di rappresentare ogni  $F(t) \in L^2$  in modo particolarmente semplice come  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^n a_v e^{-t/2} L_v(t)$ .

LEMMA 1. — La successione  $\varphi_n(t) = e^{-at} t^n$  ( $\Re a > 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ) è completa nello spazio  $L^p$  ( $p \geq 1$ ).

Ciò è compreso in teoremi più generali sulla completezza di successioni della forma  $e^{-at} t^{h_n}$  <sup>(7)</sup>, ma può anche essere dimostrato agevolmente mediante la trasformazione  $\mathfrak{L}$ . Sia

$$\int_0^\infty e^{-at} t^n G(t) dt = 0 \quad \text{per } n = 0, 1, \dots$$

(3) Uso le notazioni « chiuso » e « completo » nel senso definito da ST. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*. Warszawa 1932, p. 72. Alcuni autori, ad esempio COURANT-HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Band I, 2. Auflage, Berlin 1931, pp. 45 e 94, chiamano chiuso ciò che qui viene chiamato completo e viceversa.

(4) R. SAN JUAN, a) *Caractérisation de la transformation de Laplace par la loi de composition appelée règle de la « Faltung »*. « Portugaliae Math. » 9, pp. 177-184 (1950); b) *Caractérisations fonctionnelles des transformations de Laplace*. Ibidem, 10, pp. 115-120 (1951); c) *Caracterizaciones funcionales de las transformaciones de Laplace generalizadas en los espacios  $L$ ,  $L^n$ ,  $R$  y  $U$* . « Revista mat. Hisp.-Amer. » (4), 12, pp. 41-62 (1952); d) *Caractérisation directe sous forme exponentielle des transformations de Laplace généralisées*. « Portugaliae Math. », 11, pp. 105-118 (1952).

(5) E. LEVI, *Proprietà caratteristiche della trasformazione di Laplace*. « Atti Accademia Naz. dei Lincei », Rend. Cl. Sc. Fis. mat. nat. (6), 24, pp. 422-426 (1937). Questa Nota si riferisce soltanto alla trasformazione di Laplace finita e allo spazio delle funzioni continue.

(6) In contraddizione all'opinione espressa da SAN JUAN in loc. cit. <sup>(4)</sup> c) p. 59, righe 10-5 dal basso, d) p. 117 righe 15-13 dal basso.

(7) Cfr. R. P. BOAS Jr, *Density theorems for power series and complete sets*. « Trans. Amer. Math. Soc. » 61, pp. 54-68 (1947) e la letteratura ivi citata.

ove  $G(t) \in L^q$  con  $1/p + 1/q = 1$  (per  $p = 1, q = \infty$   $L^\infty$  significa al solito lo spazio delle funzioni misurabili, essenzialmente limitate). La trasformata  $g$

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-st} G(t) dt$$

converge per  $\Re s > 0$  (anzi assolutamente); infatti per  $p = 1, q = \infty$  ciò è banale, e per  $p > 1$  ciò segue dalla disuguaglianza di Hölder

$$(3) \quad \int_0^\infty |e^{-st} G(t)| dt \leq \left( \int_0^\infty e^{-p\Re s t} dt \right)^{1/p} \left( \int_0^\infty |G(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

L'equazione (2) significa  $g^{(n)}(\alpha) = 0$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Siccome  $g(s)$  è analitica per  $\Re s > 0$  e  $\Re \alpha > 0$ , è  $g(s) \equiv 0$ , quindi  $G(t) = 0$  quasi dappertutto<sup>(8)</sup>.

*Definizione II.* - Lo spazio  $C(0, \infty)$  o più brevemente  $C$  sia l'insieme delle funzioni  $F(t)$  che sono continue in  $t \geq 0$ , uguali a zero in  $t = 0$  e hanno un limite  $F(\infty)$  per  $t \rightarrow \infty$ . Esso viene metricizzato con la norma

$$\|F\| = \sup_{0 \leq t < \infty} |F|.$$

Convergenza forte in  $C$  significa convergenza uniforme nell'intervallo  $0 \leq t \leq \infty$ .

LEMMA 2. - *La successione*

$$\Phi_n(t) = \int_0^t \varphi_n(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\alpha\tau} \tau^n d\tau \quad (n = 0, 1, \dots)$$

è completa in  $C$ , cioè da

$$(4) \quad \int_0^\infty \Phi_n(t) dG(t) = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

segue per ogni funzione  $G(t)$  a variazione limitata in  $(0, \infty)$ :  $G(t) = \text{cost.}$  eccetto su un insieme numerabile di punti.

*Dimostrazione.* - Siccome  $G$  è a variazione limitata in  $(0, \infty)$ , esiste  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = G(\infty)$ . La (4) non cambia se a  $G(t)$  si aggiunge una costante;

(8) In un modo ugualmente semplice si dimostra: La successione  $e^{-(\alpha+n)t}$  è in modo più generale  $e^{-(\alpha+\lambda_n)t}$  con  $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n} = \infty$  è completa in  $L^p$ . Infatti da

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha+\lambda_n)t} G(t) dt = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

segue  $g(\alpha + \lambda_n) = 0$ , dunque  $g(s) \equiv 0$  e quasi dappertutto  $G(t) = 0$ . Cfr. G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*. Vol. I, Basilea 1950, p. 76; risultati ancora più generali seguono dai teoremi p. 78.

perciò è possibile supporre  $G(\infty) = 0$ . Allora segue dalla (4) mediante integrazione per parti

$$(5) \quad 0 = \Phi_n(t) G(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \varphi_n(t) G(t) dt = - \int_0^\infty e^{-at} t^n G(t) dt.$$

Essendo  $G(t)$  limitata in  $(0, \infty)$  converge  $\mathfrak{L}\{G\} = g(s)$  per  $\Re s > 0$ . L'equazione (5) significa:  $g^{(n)}(a) = 0$ , donde segue  $g(s) \equiv 0$  e quasi dappertutto  $G(t) = 0$ .  $G(t)$  però è continua ad eccezione di al più un insieme numerabile di discontinuità di prima specie, dunque  $G(t) = 0$  eccetto nei punti di un insieme numerabile.

LEMMA 3. — La successione  $\varphi_n(t)$  è chiusa in  $L^p$  ( $p \geq 1$ ).

LEMMA 4. — La successione  $\Phi_n(t)$  è chiusa in  $C$ .

Questi teoremi seguono da quei due precedenti in virtù dell'equivalenza fra i concetti di successioni complete e di successioni chiuse in  $L^p$  e  $C$ . Tale equivalenza viene dimostrata dal Banach loc. cit. <sup>(3)</sup> p. 73 soltanto per il caso che le funzioni siano definite in un intervallo finito, ma essa sussiste anche per un intervallo infinito.

Questo è ben noto per  $L^2$ , mentre per  $L$  lo ha dimostrato Carleman <sup>(9)</sup>. Secondo quanto mi è stato verbalmente riferito, gli *Eléments de Mathématique* di Bourbaki porteranno delle dimostrazioni che valgono a tutta prima per intervalli infiniti.

LEMMA 5. — La trasformazione di Laplace costituisce in  $L^p$  ( $p \geq 1$ ) per  $\Re s > 0$  un funzionale limitato, dunque continuo.

Ciò è banale per  $p = 1$  e segue per  $p > 1$  dalla disuguaglianza di Hölder

$$\left| \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \right| \leq \left( \int_0^\infty |F(t)|^p dt \right)^{1/p} \left( \int_0^\infty e^{-q\Re st} dt \right)^{1/q} \quad \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

Dimostreremo ora i teoremi annunciati sugli spazi  $L^p$  e  $U$ .

TEOREMA 1. — Un funzionale distributivo  $\mathfrak{L}\{F\}$  che dipenda da un parametro complesso  $s$ , sia per un  $s$  con  $\Re s > 0$  continuo in  $L^p$  ( $p \geq 1$ ) e soddisfi per la successione  $\varphi_n(t) = e^{-t/2} t^n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) la regola di derivazione (1). Per tale valore  $s$  del parametro è allora  $\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L}$  in  $L^p$ .

Dimostrazione. — Siccome secondo il Lemma 3 la successione  $\varphi_n(t)$  è chiusa in  $L^p$  corrispondono ad ogni  $F \in L^p$  dei coefficienti  $a_v^{(n)}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ;  $v = 0, \dots, k_n$ ) tali che

$$F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{k_n} a_v^{(n)} \varphi_v(t),$$

ove  $\lim_{L^p}$  significa il limite forte nel senso della metrica di  $L^p$ .

(9) T. CARLEMAN, *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent*. Uppsala 1944, p. 59.



A causa della continuità di  $\mathfrak{T}$  in  $L^p$  è

$$\mathfrak{T}\{F\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{T}\left\{\sum_{v=0}^{k_n} a_v^{(n)} \varphi_v(t)\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{k_n} a_v^{(n)} \mathfrak{T}\{\varphi_v(t)\},$$

ove il limite si intende nel senso classico (nello spazio dei numeri complessi). In virtù della regola di derivazione valida per  $\varphi_v(t)$  è possibile calcolare  $\mathfrak{T}\{\varphi_v\}$  univocamente <sup>(10)</sup>:

$$\mathfrak{T}\{\varphi_v(t)\} = \frac{v!}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^{v+1}},$$

cosicch  si ottiene:

$$(6) \quad \mathfrak{T}\{F\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{k_n} a_v^{(n)} \frac{v!}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^{v+1}}.$$

Ma  $\mathfrak{L}$  - per  $\Re s > 0$  -   continuo in  $L^p$  (Lemma 5) e, come   ben noto, vale

$$\mathfrak{L}\{\varphi_v(t)\} = \frac{v!}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^{v+1}}.$$

Risulta dunque per  $\mathfrak{L}\{F\}$  nello stesso modo ugualmente il valore (6). In conseguenza    $\mathfrak{T}\{F\} = \mathfrak{L}\{F\}$ .

**TEOREMA 2.** - *Un funzionale distributivo  $\mathfrak{T}\{F\}$  che dipenda da un parametro complesso  $s$ , sia per un  $s$  con  $\Re s > 0$  continuo in  $U$  e soddisfi per la successione  $\varphi_n(t)$  alla regola di derivazione (I). Per il valore  $s$  del parametro   allora  $\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{L}$  in  $U$ .*

*Dimostrazione.* - Secondo il Lemma 4 la successione  $\Phi_n(t) = \int_0^t \varphi_n(\tau) d\tau$

  chiusa in  $C$ , dunque a pi  forte ragione nello spazio parziale  $C_0$  delle funzioni assolutamente continue in ogni intervallo finito, le quali si annullano per  $t = 0$  e hanno un limite per  $t \rightarrow \infty$ .

Per  $F \in U$   

$$\int_0^t F(\tau) d\tau \in C_0,$$

dunque

$$\int_0^t F(\tau) d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{k_n} a_v^{(n)} \Phi_v(t),$$

(10) Vedi loc. cit. (1), p. 221.

ove  $\lim^C$  significa il limite forte nel senso della metrica di C, cosicché secondo la definizione II vale:

$$\int_0^t F(\tau) d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{v=0}^{k_n} a_v^{(n)} \varphi_v(\tau) d\tau \text{ uniformemente in } 0 \leq t \leq \infty.$$

Secondo la definizione I cioè equivale a

$$F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{k_n} a_v^{(n)} \varphi_v(t).$$

A causa della continuità di  $\mathfrak{T}$  in U è

$$\mathfrak{T}\{F\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{T}\left\{\sum_{v=0}^{k_n} a_v^{(n)} \varphi_v(t)\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{k_n} a_v^{(n)} \mathfrak{T}\{\varphi_v(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{k_n} a_v^{(n)} \frac{v!}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^{v+1}}.$$

Essendo  $\mathfrak{L}$  continuo in U <sup>(11)</sup> risulta come nella dimostrazione del Teorema I per  $\mathfrak{L}\{F\}$  lo stesso valore, cosicché segue  $\mathfrak{T}\{F\} = \mathfrak{L}\{F\}$ .

Se si suppone al posto della validità della regola di derivazione quella della *regola di integrazione* <sup>(12)</sup> o quella della *regola di composizione* <sup>(13)</sup>, si perviene a teoremi analoghi <sup>(14)</sup>.

**Geometria.** — *Geometria conforme in varietà quasi hermitiane.*

Nota di KENTARO YANO, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio E. BOMPIANI.

Sia  $V_{2n}$  una varietà a  $2n$  dimensioni, di classe  $C^4$ , dotata di una metrica riemanniana definita positiva:

$$(I) \quad ds^2 = g_{jk}(x) dx^j dx^k,$$

e si supponga dato su  $V_{2n}$  un campo tensoriale emisimmetrico, di classe  $C^3$  e rango  $2n$ ,  $\varphi_{ij}(x)$ , ove gl'indici  $a, b, c, \dots, i, j, k, \dots$  assumono i valori da 1 a  $2n$ .

A. Lichnerowicz <sup>(1)</sup> ha dimostrato che si può sempre modificare il tensore fondamentale metrico  $g_{ij}$  di  $V_{2n}$ , in guisa tale da aversi

$$(2) \quad g^{bc} \varphi_{jb} \varphi_{kc} = g_{jk},$$

$g^{bc}$  essendo il tensore fondamentale controvariante.

(11) Vedi loc. cit. <sup>(1)</sup>, p. 229.

(12) Cfr. loc. cit. <sup>(8)</sup>, p. 87.

(13) Cfr. loc. cit. <sup>(8)</sup>, pp. 121 e 124.

(14) Vedi loc. cit. <sup>(1)</sup>, p. 230.

(\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) A. LICHNEROWICZ, *Généralisations de la géométrie kählérienne globale*. « Coll. de Géom. Diff. », Louvain, n. 14, 99-122 (1951).

Se si pone

$$(3) \quad \varphi_j^i = g^{ia} \varphi_{aj} \quad , \quad \varphi^{ij} = \varphi_a^i g^{aj},$$

l'equazione (2) dà:

$$(4) \quad \varphi^{ia} \varphi_{ka} = \delta_k^i \quad , \quad \varphi_a^i \varphi_k^a = -\delta_k^i.$$

La seconda di queste mostra che la nostra varietà ammette una struttura quasi-complessa <sup>(2)</sup>. Diremo una varietà riemanniana, per la quale esista un tensore emisimmetrico soddisfacente alle (2), una varietà *quasi hermitiana*.

Diremo poi che una varietà quasi hermitiana è *pseudo-hermitiana*, se su di essa svanisce il tensore di Nijenhuis <sup>(3)</sup>

$$(5) \quad t_{jk}^i = (\varphi_{a,j}^i - \varphi_{j,a}^i) \varphi_k^a - (\varphi_{a,k}^i - \varphi_{k,a}^i) \varphi_j^a,$$

ove l'indice  $i$  seguito da una virgola denota la derivazione parziale rispetto ad  $x^i$ .

B. Eckmann e A. Fröhlicher <sup>(4)</sup> hanno dimostrato che se la varietà è di classe  $C^\omega$  e il tensore  $\varphi_j^i$  è esso pure di classe  $C^\omega$ , una varietà pseudo hermitiana è la rappresentazione reale di una varietà hermitiana ad  $n$  dimensioni complesse.

Se, su una varietà quasi hermitiana, il tensore emisimmetrico:

$$(6) \quad \varphi_{ijk} = \varphi_{ij,k} + \varphi_{jk,i} + \varphi_{ki,j}$$

svanisce identicamente, la varietà si dice quasi kähleriana; se poi su una varietà quasi kähleriana il tensore  $t_{jk}^i$  di Nijenhuis svanisce identicamente, la varietà si dice pseudo kähleriana. Una varietà pseudo kähleriana di classe  $C^\omega$ , e per la quale anche il tensore  $\varphi_j^i$  è di classe  $C^\omega$ , dà la rappresentazione reale di una varietà kähleriana di dimensione complessa  $n$ .

Consideriamo ora una trasformazione conforme

$$(7) \quad \bar{g}_{jk} = \rho^2 g_{jk}$$

della metrica in una varietà quasi hermitiana. Poiché si ha:

$$(8) \quad \bar{g}^{ij} = \frac{1}{\rho^2} g^{ij},$$

risulta dalla (2) che il tensore  $\varphi_{ij}$  si trasforma in  $\bar{\varphi}_{ij}$  secondo la formula

$$(9) \quad \bar{\varphi}_{ij} = \rho^2 \varphi_{ij}$$

(2) CH. EHRESMANN, *Sur les variétés presque complexes*. « Proc. Int. Congr. of Math. » 2, 412-419 (1950).

(3) A. NIJENHUIS,  $X_{n-1}$ -forming sets of eigenvectors. « Kon. Ned. Akad. », Amsterdam 54, 200-212 (1951).

(4) B. ECKMANN e A. FRÖHLICHER, *Sur l'intégrabilité des structures presque complexes*, « C.R. », 232, 2284-2286 (1951).

e di conseguenza i tensori  $\varphi_j^i$  e  $\varphi^{ij}$  si trasformano rispettivamente in  $\bar{\varphi}^{\prime\prime}$  e  $\bar{\varphi}^{ij}$  secondo le:

$$(10) \quad \bar{\varphi}_j^i = \varphi_j^i, \quad \bar{\varphi}^{ij} = \frac{1}{\rho^2} \varphi^{ij}.$$

È ben noto che il cosiddetto tensore di Weyl,

$$(11) \quad C_{jkl}^i = R_{jkl}^i + \Pi_{jk} \delta_l^i - \Pi_{jl} \delta_k^i + g_{jk} \Pi_l^i - g_{jl} \Pi_k^i$$

costruito unicamente a partire da  $g_{jk}$  è invariante per la trasformazione (7) e soddisfa alle

$$(12) \quad C_{jkl;a}^a = -(n-3)(\Pi_{jk;l} - \Pi_{jl;k}),$$

ove

$$(13) \quad \Pi_{jk} = -\frac{R_{jk}}{n-2} + \frac{g_{jk} R}{2(n-1)(n-2)}, \quad \Pi_k^i = g^{ij} \Pi_{jk},$$

ed  $R_{jkl}^i$ ,  $R_{jk}$ ,  $R$  sono rispettivamente il tensore di curvatura, il tensore di Ricci e la curvatura scalare costruiti con  $g_{jk}$ , mentre il punto e virgola denota la derivazione covariante rispetto ai simboli di Christoffel  $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$ .

Corrispondenti tensori conformi costruiti a partire da  $\varphi_{ij}$  si ottengono come segue:

Per una trasformazione conforme (9) il tensore  $\varphi_{ijk}$  definito da (6) si trasforma in  $\bar{\varphi}_{ijk}$  alla maniera seguente:

$$(14) \quad \bar{\varphi}_{ijk} = \rho^2 [\varphi_{ijk} + 2\varphi_{ij}\rho_k + 2\varphi_{jk}\rho_i + 2\varphi_{ki}\rho_j],$$

ove

$$(15) \quad \rho_k = \frac{\partial \log \rho}{\partial x^k}.$$

Se si moltiplica la (14) per  $\bar{\varphi}^{jk} = \frac{1}{\rho^2} \varphi^{jk}$  e si fa uso della (4), si trova

$$(16) \quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i + 4(n-1)\rho_i,$$

ossia

$$(17) \quad 2\rho_i = \frac{1}{2(n-1)}(\bar{\varphi}_i - \varphi_i),$$

dove si è posto

$$(18) \quad \bar{\varphi}_i = \bar{\varphi}_{ijk} \bar{\varphi}^{jk}, \quad \varphi_i = \varphi_{ijk} \varphi^{jk}.$$

Se si elimina  $\rho_i$  fra le (14) e (17), si trova che il tensore

$$(19) \quad C_{ijk} = \varphi_{ijk} - \frac{1}{2(n-1)}(\varphi_{ij}\varphi_k + \varphi_{jk}\varphi_i + \varphi_{ki}\varphi_j)$$

obbedisce alla legge di trasformazione:

$$(20) \quad \bar{C}_{ijk} = \rho^2 C_{ijk},$$



cioè,  $C_{ijk}$  è un invariante conforme relativo di peso 2. Così

$$(21) \quad g^{ia} C_{ajk} \text{ e } \varphi^{ia} C_{ajk}$$

sono entrambi tensori conformi.

Si verifica poi facilmente che il tensore  $C_{ijk}$  soddisfa alle identità

$$(22) \quad C_{ijk} \varphi^{jk} = 0,$$

la quale mostra, che per  $2n = 4$ ,  $C_{ijk}$  si annulla identicamente.

Osserviamo ancora che il tensore  $\varphi_{jk}^i$  di Nijenhuis definito dalla (5) è un tensore conforme.

Poiché  $\rho_i$  è un vettore gradiente, dalla (17) segue:

$$(23) \quad \bar{C}_{jk} = C_{jk},$$

ove si è posto

$$(24) \quad \bar{C}_{jk} = \bar{\varphi}_{j,k} - \bar{\varphi}_{k,j}, \quad C_{jk} = \varphi_{j,k} - \varphi_{k,j},$$

e di conseguenza  $C_{jk}$  è un tensore conforme.

Ora si vede senza difficoltà che il tensore  $\varphi_{ijk}$  definito dalla (6) soddisfa alle identità

$$(25) \quad \varphi_{ijk,l} + \varphi_{ikl,j} + \varphi_{ilj,k} - \varphi_{jkl,i} = 0.$$

In conseguenza, dalle (19) e (25) segue la relazione:

$$\begin{aligned} & C_{ijk,l} + C_{ikl,j} + C_{ilj,k} - C_{jkl,i} - \frac{1}{2(n-1)} (\varphi_{ijk} \varphi_l + \\ & \quad + \varphi_{ikl} \varphi_j + \varphi_{ilj} \varphi_k - \varphi_i \varphi_{jkl}) = \\ & = - \frac{1}{2(n-1)} (\varphi_{ij} C_{kl} + \varphi_{ik} C_{lj} + \varphi_{il} C_{jk} + C_{ij} \varphi_{kl} + C_{ik} \varphi_{lj} + C_{il} \varphi_{jk}), \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} (26) \quad & C_{ijk,l} + C_{ikl,j} + C_{ilj,k} - C_{jkl,i} - \frac{1}{2(n-1)} (C_{ijk} \varphi_l + \\ & \quad + C_{ikl} \varphi_j + C_{ilj} \varphi_k - \varphi_i C_{jkl}) = \\ & = - \frac{1}{2(n-1)} (\varphi_{ij} C_{kl} + \varphi_{ik} C_{lj} + \varphi_{il} C_{jk} + C_{ij} \varphi_{kl} + C_{ik} \varphi_{lj} + C_{il} \varphi_{jk}). \end{aligned}$$

La (26) prova che

$$\begin{aligned} (27) \quad & C_{ijkl} = C_{ijk,l} + C_{ikl,j} + C_{ilj,k} - C_{jkl,i} - \\ & - \frac{1}{2(n-1)} (C_{ijk} \varphi_l + C_{ikl} \varphi_j + C_{ilj} \varphi_k - \varphi_i C_{jkl}) \end{aligned}$$

è un tensore conforme.

Dalla (26) otteniamo

$$(28) \quad \varphi^{ij} C_{ijkl} - \frac{1}{4(n-1)} \varphi^{ab} \varphi^{cd} C_{abcd} \varphi_{kl} = - \frac{n-2}{n-1} C_{kl}.$$

Si supponga ora che esista una trasformazione conforme (9) che renda  $\bar{\varphi}_{ijk} = 0$ , cioè che la nostra varietà quasi hermitiana sia conforme a una varietà quasi kähleriana.

Dobbiamo avere allora

$$C_{ijk} = 0, \quad C_{kl} = 0.$$

Inversamente, se valgono le relazioni scritte or ora, il sistema di equazioni alle derivate parziali

$$2 \frac{\partial \log \rho}{\partial x^i} = - \frac{1}{2(n-1)} \varphi_i$$

è integrabile; quindi, effettuando una trasformazione conforme  $\bar{\varphi}_{ij} = \rho^2 \varphi_{ij}$ , si ottiene  $\bar{\varphi}_i = 0$ , e di conseguenza da

$$\bar{C}_{ijk} = C_{ijk} = 0,$$

segue

$$\bar{\varphi}_{ijk} = 0.$$

Ma, se  $2n > 4$ , dalle (27) e (28) appare che  $C_{kl} = 0$  è conseguenza di  $C_{ijk} = 0$ , mentre, se  $2n = 4$ ,  $C_{ijk}$  è identicamente nullo. Dunque si ha: *Condizione necessaria e sufficiente affinché una varietà quasi hermitiana sia conforme a una varietà quasi kähleriana è che, per  $2n > 4$ ,  $C_{ijk} = 0$  e, per  $2n = 4$ ,  $C_{kl} = 0$ .*

Giacché l'equazione  $\ell^i_{jk} = 0$  è invariante per trasformazioni conformi, possiamo enunciare anche questo risultato per le varietà pseudo-complesse. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una varietà pseudo-hermitiana sia conforme a una varietà pseudo-kähleriana, è che per  $2n > 4$ , sia  $C_{ijk} = 0$  e, per  $2n = 4$ ,  $C_{kl} = 0$ .*

Per una varietà complessa con metrica hermitiana

$$(29) \quad ds^2 = 2 g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^\beta,$$

ove  $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, \dots, n$ ;  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \dots = n+1, n+2, \dots, 2n$  ed è  $z^\alpha = \bar{z}^\alpha$ , noi abbiamo

$$(30) \quad \varphi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -ig_{\alpha\bar{\beta}} \\ +ig_{\beta\bar{\alpha}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$(31) \quad \varphi_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = -i(g_{\alpha\bar{\beta},\gamma} - g_{\gamma\bar{\beta},\alpha}), \quad \varphi_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}} = -i(g_{\alpha\bar{\beta},\bar{\gamma}} - g_{\alpha\bar{\gamma},\bar{\beta}})$$

e, di conseguenza

$$(32) \quad \begin{cases} \varphi^{\alpha\bar{\epsilon}} \varphi_{\beta\bar{\epsilon}\gamma} = g^{\alpha\bar{\epsilon}} (g_{\beta\bar{\epsilon},\gamma} - g_{\gamma\bar{\epsilon},\beta}), \\ \varphi^{\alpha\bar{\epsilon}} \varphi_{\epsilon\bar{\beta}\bar{\gamma}} = g^{\alpha\bar{\epsilon}} (g_{\epsilon\bar{\beta},\bar{\gamma}} - g_{\epsilon\bar{\gamma},\bar{\beta}}). \end{cases}$$

Se ora definiamo una connessione metrica, con torsione, mediante le

$$(33) \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = g^{\alpha\bar{\epsilon}} g_{\beta\bar{\epsilon},\gamma}, \quad \bar{\Gamma}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} = g^{\bar{\alpha}\epsilon} g_{\epsilon\bar{\beta},\bar{\gamma}}$$

l'annullarsi del tensore di torsione

$$(34) \quad S^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}) = \frac{1}{2} \varphi^{\alpha\bar{\epsilon}} \varphi_{\beta\bar{\epsilon}\gamma}$$

equivale all'annullarsi di  $\varphi_{ijk}$  e corrisponde alla condizione di Kähler.

Dalla (34) abbiamo poi

$$(35) \quad S_{\beta} \equiv S_{\beta\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} \varphi^{\alpha\bar{\varepsilon}} \varphi_{\beta\bar{\varepsilon}\alpha} = -\frac{1}{4} \varphi^{ij} \varphi_{ij\beta} = -\frac{1}{4} \varphi_{\beta}.$$

Quindi dalle (34), (35) e

$$C_{\beta\bar{\varepsilon}\gamma} = \varphi_{\beta\bar{\varepsilon}\gamma} - \frac{1}{2(n-1)} (\varphi_{\beta\bar{\varepsilon}} \varphi_{\gamma} + \varphi_{\varepsilon\gamma} \varphi_{\beta}),$$

si trova

$$\frac{1}{2} \varphi^{\alpha\bar{\varepsilon}} C_{\beta\bar{\varepsilon}\gamma} = S_{\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{1}{n-1} (\delta_{\beta}^{\alpha} S_{\gamma} - \delta_{\gamma}^{\alpha} S_{\beta}),$$

$$C_{\beta\gamma} = -4 [S_{\beta, \gamma} - S_{\gamma, \beta}],$$

$$C_{\beta\bar{\gamma}} = -4 [S_{\beta, \bar{\gamma}} - S_{\bar{\gamma}, \beta}].$$

Cioè, come è stato provato da W. J. Westlake<sup>(5)</sup>: *Condizione necessaria e sufficiente affinché una varietà hermitiana sia conforme a una varietà kähleriana è che, per  $n > 2$  si abbia*

$$S_{\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{1}{n-1} (\delta_{\beta}^{\alpha} S_{\gamma} - \delta_{\gamma}^{\alpha} S_{\beta}) = 0$$

e, per  $n = 2$ ,

$$S_{\beta, \gamma} - S_{\gamma, \beta} = 0 \quad , \quad S_{\beta, \bar{\gamma}} - S_{\bar{\gamma}, \beta} = 0.$$

**Geometria.** — *Sopra una superficie dell'ottavo ordine dotata di 157 nodi.* Nota di DIONISIO GALLARATI, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

1. Il massimo numero di nodi che fino ad ora si sia riusciti ad imporre ad una superficie dell'ottavo ordine  $\mathfrak{F}^8$ , appartenente all'ordinario spazio  $S_3$ , è 153; il risultato deveasi a B. Segre<sup>(1)</sup>.

In questa Nota costruisco una superficie dell'ottavo ordine che possiede 157 nodi, con un metodo che consiste sostanzialmente nel combinare in modo opportuno diversi metodi che già sono stati utili per ottenere superficie algebriche aventi un elevato numero di nodi.

2. In uno spazio proiettivo a quattro dimensioni  $S_4$  consideriamo una  $V_3^3$  che possegga 10 nodi (e cioè il massimo numero di punti doppi isolati

(5) W. J. WESTLAKE, *Conformally Kähler manifolds*. « Proc. Cambr. Phil. Soc. » 50, 16-19, (1954).

(\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) B. SEGRE, *Sul massimo numero di nodi delle superficie algebriche*. « Atti Acc. Ligure Sc. Lett. », vol. X, fasc. I, p. 15, Genova (1952).

che possa avere una forma cubica di  $S_4$ ); stabiliremo che *esiste un pentaedro*  $T(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$  *tale che:*

1°  $A_0$  sia un punto semplice di  $V_3^3$  ed  $A_1, A_2, A_3, A_4$  non appartengono a  $V_3^3$ ;

2°  $A_0 A_4$  sia una tangente di  $V_3^3$  e tocchi  $V_3^3$  in un punto distinto da  $A_0$  e da  $A_4$ ;

3°  $A_0 A_2 A_4$  ed  $A_0 A_3 A_4$  siano due piani tangenti di  $V_3^3$  e tocchino  $V_3^3$  in punti non appartenenti ad alcuno degli spigoli di  $T$ ;

4°  $A_0 A_1 A_2$  ed  $A_0 A_1 A_3$  siano due piani tritangenti di  $V_3^3$  e tocchino  $V_3^3$  in punti nessuno dei quali appartenga ad alcuno degli spigoli di  $T$ ;

5°  $A_0 A_1 A_2 A_3$ ,  $A_0 A_1 A_2 A_4$ ,  $A_0 A_1 A_3 A_4$  siano tre iperpiani tangenti di  $V_3^3$  e tocchino  $V_3^3$  in tre punti non appartenenti ad alcuna delle facce piane di  $T$ .

Si costruisce un siffatto pentaedro nel modo seguente:

Sia  $\tau_1$  un generico  $S_3$  tangente di  $V_3^3$  ed  $\mathfrak{F}_1^3$  la superficie cubica sezione di  $\tau_1$  con  $S_3$ ; se  $\tau_{12}$  e  $\tau_{13}$  sono due piani tritangenti di  $\mathfrak{F}_1^3$  non passanti per il punto doppio di  $\mathfrak{F}_1^3$  ed aventi a comune una retta  $r$  non appartenente a  $V_3^3$ , assumiamo come vertice  $A_0$  di  $T$  uno dei tre punti in cui  $r$  sega  $V_3^3$  e come vertice  $A_1$  un punto generico di  $r$  (non appartenente a  $V_3^3$ ).

Siano poi  $\tau_2$  e  $\tau_3$  due  $S_3$  tangenti di  $V_3^3$  non contenenti alcuno dei dieci nodi di  $V_3^3$  e passanti rispettivamente per  $\tau_{12}$  e  $\tau_{13}$ , e sia  $\tau_{23}$  il piano comune a  $\tau_2$  e  $\tau_3$ .

Da  $A_0$  conduciamo una retta  $t$  che tocchi altrove la curva  $\Gamma^3$  sezione di  $\tau_{23}$  con  $V_3^3$  e su  $t$  prendiamo genericamente il punto  $A_4$ .

Per  $t$  conduciamo un piano tangente alla superficie cubica sezione di  $\tau_2$  con  $V_3^3$  e collochiamo il punto  $A_2$  in modo generico sulla retta in cui questo piano sega  $\tau_{12}$ ; in modo analogo conduciamo per  $t$  un piano tangente alla superficie cubica sezione di  $\tau_3$  con  $V_3^3$  ed assumiamo come punto  $A_3$  un punto generico della retta intersezione di questo piano con  $\tau_{13}$ .

Il pentaedro  $T(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$  soddisfa alle condizioni volute.

3. Assumiamo il pentaedro  $T(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$  ora costruito come pentaedro di riferimento in  $S_4$  e supponiamo che  $V_3^3$ , rispetto a questo riferimento, abbia l'equazione

$$\Phi(x_0, \dots, x_4) = \alpha x_0^2 + 2\beta x_0 + \gamma = 0$$

dove  $\alpha, \beta, \gamma$  denotano forme quaternarie nelle sole variabili  $x_1, x_2, x_3, x_4$  di gradi rispettivi 1, 2, 3.

La forma del sesto ordine  $V_3^6$  di equazione:

$$(1) \quad \Theta(x_0, \dots, x_4) = \alpha(x_1^2, \dots, x_4^2)x_0^4 + 2\beta(x_1^2, \dots, x_4^2)x_0^2 + \gamma(x_1^2, \dots, x_4^2) = 0$$

possiede 219 punti doppi  $D_i$ , e precisamente <sup>(2)</sup>:

(2) Cfr. B. SEGRE, loc. cit. in <sup>(1)</sup>, ed anche D. GALLARATI, *Alcune riflessioni intorno ad una Nota del prof. B. Segre*. « Atti Acc. Ligure Sc. Lett. », vol. X, fasc. I, Genova (1952).



- 1° un punto doppio in  $A_0$ ;
- 2° 160 punti doppi provenienti da dieci nodi di  $V_3^3$ ;
- 3° 24 punti doppi provenienti dai punti di contatto con  $V_3^3$  delle tre facce iperpiane di  $T$  che toccano  $V_3^3$ ;
- 4° 24 punti doppi provenienti dai punti di contatto con  $V_3^3$  delle due facce piane di  $T$  tritangenti di  $V_3^3$ ;
- 5° 8 punti doppi provenienti dai punti di contatto con  $V_3^3$  delle due facce piane di  $T$  tangenti di  $V_3^3$ ;
- 6° 2 punti doppi provenienti dal punto di contatto con  $V_3^3$  della retta  $A_2 A_4$ .

Dal punto  $A_0$  escono 48 rette appartenenti alla  $V_3^6$  e 109 rette ognuna delle quali contiene due dei rimanenti punti  $D_i$ : dimostreremo ora che queste  $109 + 48 = 157$  rette sono generatrici doppie di un cono  $\Gamma_3^8$  il quale è segato da un generico  $S_3^*$  in una superficie  $\mathfrak{F}^8$  che possiede 157 nodi.

4. Dimostriamo il seguente lemma:

1° Se  $D$  è un punto doppio di  $V_3^6$  che non stia né sull'iperpiano  $x_0 = 0$  né sul cono  $\Gamma_3^4$  di equazione  $\beta(x_1^2, \dots, x_4^2) = 0$ , la retta  $A_0 D$  risulta generatrice doppia del cono  $\Gamma_3^8$  di equazione

$$(2) \quad \Delta(x_1, \dots, x_4) \equiv \beta^2(x_1^2, \dots, x_4^2) - \alpha(x_1^2, \dots, x_4^2) \gamma(x_1^2, \dots, x_4^2) = 0.$$

2° Una generatrice doppia del cono  $\Gamma_3^8$  che non giaccia sul cono  $\Gamma_3^4$  contiene due punti doppi di  $V_3^6$ , distinti tra loro e da  $D$  <sup>(3)</sup>.

• Se  $D$  è un punto doppio di  $V_3^6$ , ivi si ha

$$(3) \quad \frac{1}{4} \theta_0 = x_0 [\alpha(x_1^2, \dots, x_4^2) x_0^2 + \beta(x_1^2, \dots, x_4^2)] = 0.$$

$$(4) \quad \frac{1}{2} \theta_i = x_i [\alpha_i(x_1^2, \dots, x_4^2) x_0^2 + 2\beta_i(x_1^2, \dots, x_4^2) x_0^2 + \gamma_i(x_1^2, \dots, x_4^2)] = 0$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)^{(4)}$$

oltre naturalmente alla (1), conseguenza delle (3) (4).

Se  $D$  non appartiene al piano  $x_0 = 0$ , la (3) riducesi alla

$$\alpha(x_1^2, \dots, x_4^2) x_0^2 + \beta(x_1^2, \dots, x_4^2) = 0,$$

onde la (1) fornisce

$$\beta(x_1^2, \dots, x_4^2) x_0^2 + \gamma(x_1^2, \dots, x_4^2) = 0.$$

Pertanto, se  $D$  non sta sul cono  $\beta(x_1^2, \dots, x_4^2) = 0$ , nel punto  $D$  risulta  $\alpha(x_1^2, \dots, x_4^2) = 0$ , ed inoltre

$$(5) \quad \alpha(x_1^2, \dots, x_4^2) : \beta(x_1^2, \dots, x_4^2) : \gamma(x_1^2, \dots, x_4^2) = 1 : -x_0^2 : +x_0^4.$$

(3) La dimostrazione di questo lemma è molto vicina a quella d'un lemma analogo stabilito nella mia Nota: *Intorno a certe superficie aventi un elevato numero di punti singolari isolati*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XI, fasc. 6, pp. 344-347 (1951): la riporto qui per comodità del lettore.

(4) Indichiamo con  $\theta_k, \alpha_k, \dots$  le derivate parziali di  $\theta(x_1, \dots, x_4), \alpha(x_1, \dots, x_4) \dots$  rispetto ad  $x_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ).

Le (4) (5) implicano che un qualunque punto della retta  $A_0 D$  annulli

$$-\frac{1}{2} \Delta_i = x_i [\gamma(x_1^2, \dots, x_4^2) \alpha_i(x_1^2, \dots, x_4^2) - 2\beta(x_1^2, \dots, x_4^2) \beta_i(x_1^2, \dots, x_4^2) + \\ + \alpha(x_1^2, \dots, x_4^2) \gamma_i(x_1^2, \dots, x_4^2)] \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

e ciò dimostra la prima parte del lemma

Sia ora  $R(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$  la traccia sull'iperpiano  $x_0 = 0$  di una generatrice doppia del cono  $\Gamma_3^8$  tale che  $\beta(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2) \neq 0$ . Risulta:

$$\beta^2(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2) - \alpha(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2) \gamma(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2) = 0$$

e quindi  $\alpha(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2) \neq 0$ , ed inoltre:

$$(6) \quad \frac{1}{2} \Delta_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4) = \bar{x}_i [2\beta(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2) \beta_i(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2) - \\ - \alpha(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2) \gamma_i(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2) - \alpha_i(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2) \gamma(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2)] = 0;$$

se  $\bar{x}_0$  è uno dei valori (distinti e non nulli) di  $x_0$  per cui

$$\alpha(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2) : \beta(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2) : \gamma(\bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_4^2) = 1 : -x_0^2 : x_4^2$$

il punto  $M(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$  è doppio per  $V_3^6$  perché in forza delle (3) (4) (6) si ha:

$$\theta_i(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

È così dimostrata la seconda parte del lemma.

Per concludere che le 109 rette  $A_0 D_i$  sono generatrici doppie (e solo doppie) per il cono  $\Gamma_3^8$  basta quindi osservare che per il modo in cui sono stati scelti i punti  $A_1, A_2, A_3, A_4$  l'iperpiano  $x_0 = 0$  non contiene alcuno dei punti  $D_i$ ; inoltre poiché  $A_0$  è un punto generico di  $V_3^{(5)}$  l'iperpiano  $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$  e la quadrica  $\beta(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$  non contengono nessuno dei dieci nodi di  $V_3^3$ , né alcuno dei punti di contatto con  $V_3^3$  di facce (di dimensioni 1, 2, 3) di  $T$  e quindi i coni  $\alpha(x_1^2, \dots, x_4^2) = 0$  e  $\beta(x_1^2, \dots, x_4^2) = 0$  non contengono necessariamente nessuno dei punti doppi di  $V_3^6$ .

Il cono  $\Gamma_3^8$  possiede poi come ulteriori generatrici doppie le 48 rette

$$\alpha(x_1^2, \dots, x_4^2) = \beta(x_1^2, \dots, x_4^2) = \gamma(x_1^2, \dots, x_4^2) = 0,$$

e quindi la sezione di  $\Gamma_3^8$  con un generico  $S_3^*$  è una  $\mathfrak{F}^8$  con 157 nodi.

5. Relativamente alla configurazione dei 157 nodi di  $\mathfrak{F}^8$  si può osservare che:

1° 48 di essi sono la completa intersezione di una quadrica con una  $F^4$  ed una  $F^6$  di  $S_3^*$ .

(5) Preso infatti  $A_0$  genericamente su  $V_3^3$  siano  $m, n$  due rette di  $V_3^3$  passanti per  $A_0$ ; se  $\pi$  è il piano da esse determinato si può assumere come iperpiano  $\tau_1$  un generico  $S_3$  tangente a  $V_3^3$  uscente da  $\pi$ . In  $\tau_1$  consideriamo due piani tritangenti di  $\mathfrak{F}_1^3$  uscenti da  $m$  ed  $n$  rispettivamente e segantisi secondo una retta non appartenente ad  $\mathfrak{F}_1^3$  (passante per  $A_0$ ) che si può assumere comè retta  $A_0 A_1$ , ecc.

2° 80 si distribuiscono 8 ad 8 a formare dieci configurazioni proiettivamente identiche alla configurazione degli otto vertici di un cubo e nessuno di tali 80 punti appartiene ad alcuna delle facce del tetraedro  $T^*(A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*)$ , ove  $A_i^*$  è la traccia sull' $S_3^*$  (che contiene  $\mathfrak{F}^8$ ) della retta  $A_0 A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

3° Il piano  $A_1^* A_2^* A_3^*$  contiene sedici nodi di  $\mathfrak{F}^8$ , di cui sei appartengono alla retta  $A_1^* A_2^*$ , sei alla retta  $A_1^* A_3^*$  e gli altri quattro sono vertici di un quadrangolo avente  $A_1^* A_2^* A_3^*$  come triangolo diagonale.

4° Il piano  $A_1^* A_2^* A_4^*$  contiene undici nodi di  $\mathfrak{F}^8$ , sei dei quali appartengono alla retta  $A_1^* A_2^*$ , uno coincide con  $A_4^*$  e gli altri quattro sono i vertici di un quadrangolo avente  $A_1^* A_2^* A_4^*$  come triangolo diagonale.

5° Il piano  $A_1^* A_3^* A_4^*$  contiene undici nodi di  $\mathfrak{F}^8$ , sei su  $A_1^* A_3^*$ , uno in  $A_4^*$  e quattro formanti un quadrangolo avente  $A_1^* A_3^* A_4^*$  come triangolo diagonale.

6° Il piano  $A_2^* A_3^* A_4^*$  contiene cinque nodi di  $\mathfrak{F}^8$ , uno in  $A_4^*$ , due sulla retta  $A_2^* A_4^*$ , due sulla retta  $A_3^* A_4^*$ .

Assunto  $T^*(A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*)$  come tetraedro di riferimento e dette  $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$  le coordinate proiettive omogenee di punto in  $S_3^*$  (rispetto a tale riferimento) si vede subito che  $\mathfrak{F}^8$  è mutata in sé dalle omografie del gruppo  $G_8$

$$y_1^* : y_2^* : y_3^* : y_4^* = x_1^* : \pm x_2^* : \pm x_3^* : \pm x_4^*$$

e quindi:

7° I 140 nodi di  $\mathfrak{F}^8$  diversi da  $A_4^*$  e non giacenti sul piano  $A_1^* A_2^* A_3^*$  sono a coppie allineati con  $A_4^*$ .

8° I 146 nodi di  $\mathfrak{F}^8$  non appartenenti alla faccia  $A_1^* A_2^* A_4^*$  sono a coppie allineati con  $A_3^*$ .

9° I 146 nodi di  $\mathfrak{F}^8$  non appartenenti alla faccia  $A_1^* A_3^* A_4^*$  sono a coppie allineati con  $A_2^*$ .

10° I 152 nodi di  $\mathfrak{F}^8$  non appartenenti alla faccia  $A_2^* A_3^* A_4^*$  sono a coppie allineati con  $A_1^*$ .

11° Ognuna delle rette che passa per uno dei 140 nodi di  $\mathfrak{F}^8$  non contenuti in alcuno degli spigoli di  $T^*$  e che è appoggiata a due spigoli opposti di  $T^*$  contiene un altro nodo di  $\mathfrak{F}^8$ .

Notiamo ancora che le omografie del  $G_8$  mutano in sé il gruppo dei 48 nodi di  $\mathfrak{F}^8$  che sono tracce sull' $S_3^*$  delle 48 rette di  $V_3^6$  passanti per  $A_0$ .

6. Rileviamo infine che la superficie  $\mathfrak{F}^8$  sopra costruita consente di migliorare i risultati già noti sullo studio del comportamento asintotico del massimo  $\mu(n)$  del numero dei nodi che può possedere una superficie algebrica d'ordine  $n$  appartenente allo spazio ordinario.

B. Segre <sup>(6)</sup> ha mostrato come un computo di parametri faccia apparire probabile l'esistenza d'una  $\mathfrak{F}^8$  avente 160 nodi ed ha aggiunto che se si riu-

(6) B. SEGREG, loc. cit. in (1).

scisse a dimostrare che esiste una siffatta  $\mathfrak{F}^8$  si potrebbe concludere che

$$(7) \quad \frac{1}{2} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{n^3} > \frac{5}{16}.$$

Non è forse inutile osservare che per giungere a tale risultato è sufficiente la conoscenza della  $\mathfrak{F}^8$  di cui è oggetto la Nota presente.

Consideriamo in  $S_3$  una superficie algebrica d'ordine  $n_0$ ,  $\mathfrak{F}^{n_0}$ , avente  $d_0$  nodi  $D_i$  e riferiamo i punti di  $S_3$  ad un tetraedro  $T$  le cui quattro facce siano piani bitangenti di  $\mathfrak{F}^{n_0}$  non contenenti alcuno dei  $d_0$  punti  $D_i$  (supposto che esista un tetraedro siffatto). Se

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

è l'equazione di  $\mathfrak{F}^{n_0}$ , la superficie  $\mathfrak{F}^{2n_0}$  di equazione

$$f(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2) = 0$$

possiede allora  $8d_0 + 32$  nodi. E quindi

$$\mu(2n_0) \geq 8d_0 + 32;$$

iterando il procedimento si ottiene senza difficoltà

$$\mu(2^m n_0) \geq 2^{3m} d_0 + \frac{32}{7}(2^m - 1),$$

e quindi la (7) può essere sostituita con la

$$(8) \quad \frac{1}{2} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{n^3} \geq \frac{1}{n_0^3} \left( d_0 + \frac{32}{7} \right);$$

ora è facile riconoscere che nella (8) può porsi  $n_0 = 8$ ,  $d_0 = 157$  <sup>(7)</sup>, sicché

$$\frac{1}{2} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{n^3} \geq \frac{1}{512} \left( 157 + \frac{32}{7} \right) = \frac{5}{16} + \frac{11}{7 \cdot 2^9}.$$

**Geometria algebrica.** — *Surfaces algébriques de genre géométrique nul et de bigenre quelconque.* Nota di POL BURNIAT, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio B. SEGRE.

1. Depuis 1896, date à laquelle remontent les premiers exemples de surfaces de genre géométrique nul et de bigenre positif — la surface d'Enriques <sup>(1)</sup> et la surface de Castelnuovo <sup>(2)</sup> — nos connaissances en matière de surfaces possédant cette propriété ne se sont enrichies que de quelques modèles dus

(7) Basta allo scopo osservare che 157 è più basso del limite superiore 181 assegnato da BASSET per il numero dei nodi di una  $\mathfrak{F}^8$  ottenuto appunto notando che il numero dei piani bitangenti di una  $\mathfrak{F}^n$  uscenti da un punto generico dello spazio non può essere negativo; cfr. A. B. BASSET, *The maximum number of double points on a surface*, « Nature », 73, p. 246 (1906).

(\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) *Introduzione alla geometria sopra les superficie algebriche*. « Memorie Soc. It. delle Scienze detta dei XL », t. X, pp. 1-81, 1896.

(2) *Sulle superficie di genere uno*. « Memorie Soc. It. delle Scienze », pp. 103-123, 1896.



essentiellement à L. Godeaux <sup>(3)</sup> et à L. Campedelli <sup>(4)</sup>. Encore ces modèles ne concernent-ils que les premières valeurs du bigenre.

L'usage fait par Campedelli des plans doubles n'est guère prolongeable. Le problème de l'existence des courbes de diramation qui conviennent pose des difficultés souvent prohibitives.

Utilisant des plans quadruples on obtient fort aisément le théorème de portée générale suivant:

*Il existe des surfaces algébriques régulières de genre géométrique  $p_g = 0$  et de genre linéaires  $p^{(1)} = 1$  pour toute valeur du bigenre  $P_2$ .*

*Il existe des surfaces algébriques irrégulières (l'irrégularité étant nécessairement un) de genre géométrique  $p_g = 0$  et de genre linéaire  $p^{(1)} = 1$  pour toute valeur impaire du bigenre au moins.*

## 2. Procédons à un rapide rappel.

Soit  $F_0$  une surface algébrique irréductible dotée d'une involution  $I_0$  rationnelle, d'ordre 4, composée avec trois involutions  $I_r$  d'ordre 2, deux à deux permutable,  $r = 1, 2, 3$ .  $F_0$  est birationnellement un plan double  $F_0 = 4F$  doté de trois courbes de diramation  $E_1, E_2, E_3$ , la courbe  $E_r$  correspondant à la courbe des points unis pour l'involution  $I_r$  de  $F$  soit  $U_r$ . On voit de plus que  $F_0$  est une surface double  $2F_r$  dont le support est lui-même un plan double  $2F$  doté des courbes de diramation  $E_s + E_t$ ,  $s \neq t \neq r = 1, 2, 3$ .

Les courbes  $E_s + E_t$  peuvent être prises d'ordres pairs. Désignons par  $e_r$  une moitié linéaire de  $E_s + E_t$ . Si  $X^0$  représente l'être de  $F_0$  qui, composé avec  $I_0$ , possède l'image  $X$  sur  $F$ , on voit facilement que l'on a

$$(I) \quad e_r^0 \equiv U_s + U_t, \quad r \neq s \neq t = 1, 2, 3.$$

A partir des (I) et du théorème d'Enriques-Castelnuovo liant les systèmes canoniques virtuels impurs  $|k_0|$  et  $|k|$  de  $F_0$  et de  $F$ ,

$$k_0 \equiv k + U_1 + U_2 + U_3,$$

on trouve sans difficulté que

1° Le système canonique  $|k_0|$  de  $F_0$  est la combinaison linéaire de ceux de systèmes de courbes  $U_r + |e'_r|$  qui sont effectifs,  $r = 1, 2, 3$ .

2° Le système bicanonique  $|2k_0|$  de  $F_0$  est la combinaison linéaire de ceux des systèmes linéaires de courbes  $|(E_1 + E_2 + E_3)''|$  et  $U_r + U_s + + |(e_r + e_s)''|$  qui sont effectifs.

3° Si  $a$  est droite générique du plan  $F$ , l'adjoint de la courbe  $a^0$  de  $F_0$  est la combinaison linéaire de ceux des systèmes de courbes  $U_r + |a + e'_r|$  qui sont effectifs.

## 3. Cela rappelé, nous pouvons dire

*Le plan quadruple abélien  $F_0 = 4F$  doté des courbes de diramation*

$$E_1 = C_{2r+2} (O^{2r+2}) \quad , \quad E_2 = C_2 \quad , \quad E_3 = C_2^* \quad , \quad r > 0,$$

(3) *Sur une surface algébrique de genre zéro et bigenre un.* « Rend. Acc. Lincei », vol. XIV, 1931.

(4) *Sui piani doppi con curva di diramazione dell'ottavo ordine.* Idem, pp. 203-208, 1931; *Sui piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine.* Idem, pp. 536-542, 1932.

est régulier. Il possède les genres géométrique et linéaire  $p_g = 0$  et  $p^{(1)} = 1$ . Son bigenre vaut  $P_2 = 2r + 1$ . Le système bicanonique de ce plan quadruple est composé avec les courbes elliptiques du faisceau linéaire  $|C_s(O)|^0$ .

Il est entendu que nous représentons par  $C_m(\Sigma A_i^{n_i})$  une courbe plane d'ordre  $m$  et dotée des points-base  $n_i$ -uples assignés  $A_i$ .

Les courbes  $e_r, E_1 + E_2 + E_3, e_r + e_s$  sont actuellement

$$e_1 \equiv C_2, \quad e_2 \equiv e_3 \equiv C_{r+2}(O^{r+1}), \quad E_1 + E_2 + E_3 \equiv C_{2r+6}(O^{2r+2}),$$

$$e_1 + e_2 \equiv e_1 + e_3 \equiv C_{r+4}(O^{r+1}), \quad e_2 + e_3 \equiv C_{2r+4}(O^{2r+2}).$$

Les courbes  $e_i$  sont dénuées d'adjoint. On a donc  $p_g = 0$ , ( $n^\circ 2, I$ ).

Les courbes  $e_r + e_s$  sont dénuées de second adjoint. Le système bicanonique du plan quadruple 4 F donné coïncide donc avec le système ( $n^\circ 2, II$ )

$$|(E_1 + E_2 + E_3)''^0| = |C_{2r}(O^{2r})|^0$$

et 4 F est de bigenre  $P_g = 2r + 1$ . De plus, ce système bicanonique est composé avec les courbes  $C_1^0(O)$  du faisceau linéaire  $|C_1(O)|^0$ . Or les droites quadruples de support  $C_1(O)$  portent  $2 C_1(O) \cdot (E_1 + E_2 + E_3) = 8$  points de diramation. D'après la formule de Zeuthen, elles ont donc le genre  $w$  tel que

$$2w - 2 = 2(O - 2) + 8 \quad \text{ou} \quad w = 1.$$

Le plan quadruple en question possède par conséquent le genre linéaire  $p^{(1)} = 1$ .

On peut vérifier directement la régularité du plan quadruple 4 F. En effet ( $n^\circ 2, III$ ) les courbes  $a^0 = 4a$  portent ici  $4r + 12$  points de diramation. Elles sont donc de genre  $2r + 3$ . D'autre part, leur adjoint est la combinaison linéaire ( $n^\circ 2, III$ ) de systèmes linéaires de courbes dont les parties variables ont sur F les images  $|a + e'_r|$ , c'est-à-dire les systèmes  $|C^0|$ ,  $|C_r(O^r)|$  et  $|C_r(O^r)|$  qui sont respectivement  $\infty^0$ ,  $\infty^r$  et  $\infty^r$ . On tire de là que l'adjoint d'une courbe  $a^0$  est  $\infty^{2r+2}$  et découpe sur cette courbe la série canonique complète. Le plan quadruple 4 F considéré est bien régulier (théorème de Picard).

Pour établir ce dernier point, on pouvait aussi utiliser un théorème de De Franchis.

4. Le plan quadruple abélien 4 F = F<sub>0</sub> doté des courbes de diramation

$$E_1 = C_{2r+1}(O^{2r+1}), \quad E_2 = C_3(O + A^2), \quad E_3 = C_3(O + A^2), \quad r \geq 1$$

est régulier. Il possède les genres géométrique et linéaire  $p_g = 0$  et  $p^{(1)} = 1$ . Son bigenre vaut  $P_2 = 2r$ . Son système canonique est composé avec les courbes elliptiques du faisceau linéaire d'image  $|C_1(O)|$  sur F.

La démonstration se conduit de façon identique à la précédente dès que l'on a constaté que les courbes  $e_i, E_1 + E_2 + E_3, e_r + e_s$  sont maintenant

$$e_1 = C_3(O + A^2), \quad e_2 \equiv e_3 \equiv C_{r+2}(O^{r+1} + A), \quad E_1 + E_2 + E_3 \equiv C_{2r+7}(O^{2r+3} + A^4)$$

$$e_1 + e_2 \equiv e_1 + e_3 \equiv C_{r+5}(O^{r+2} + A^3), \quad e_2 + e_3 \equiv C_{2r+4}(O^{2r+2} + A^2).$$

On constate que le système canonique  $|k_0|$  de  $4F$  n'est pas effectif, que son système canonique impur s'écrit

$$|(E_1 + E_2 + E_3)''|^\circ = |C_{2r+1}(O^{2r+1} + A^2)|^\circ = 2C_1^\circ(O + A) + (2r-1)|C_1(O)|^\circ,$$

ce qui prouve que  $4F$  a le bigenre  $P_2 = 2r$ , son système canonique étant composé avec les courbes elliptiques  $C_1^\circ(O)$  du faisceau  $|C_1(O)|^\circ$ .

La régularité de  $4F$  se démontre comme plus haut.

5. Une surface de genre  $p_g = 0$  et de genre arithmétique  $p_a \leq -2$  est une réglée de genre  $p_g - p_a$ . Les surfaces que nous considérons, de bigenre  $P_2 > 0$ , quand elles sont irrégulières, ne peuvent avoir que le genre arithmétique  $p_a = -1$ . Il existe de telle surfaces pour toute valeur de  $P_2$  impaire. Précisément:

*Un plan quadruple  $4F$  doté des courbes de diramation*

$$E_1 = C_{2r+4}(O^{2r+4}) \quad , \quad E_2 = C_2(A^2) \quad , \quad E_3 = C_2^*(A^2) \quad , \quad r \geq 0$$

*possède les genres  $p_a = -1$ ,  $p_g = 0$ ,  $p^{(1)} = 1$  et le bigenre  $2r+1$ . Il porte un faisceau elliptiques de courbes de genre  $2r+1$ .*

Une fois de plus, il suffit de raisonner comme au n. 3, compte tenu des relations

$$e_2 \equiv C_{r+3}(O^{r+2} + A) \equiv e_3 \quad , \quad e_1 \equiv C_2(A^2) \quad , \quad E_1 + E_2 + E_3 \equiv C_{2r+8}(O^{2r+4} + A^4)$$

$$e_1 + e_2 \equiv C_{r+5}(O^{r+2} + A^3) \equiv e_1 + e_3 \quad , \quad e_2 + e_3 \equiv C_{2r+6}(O^{2r+4} + A^2).$$

On trouve encore que  $p_g = 0$ , que  $|2k_0|$  se réduit au système

$$|(E_1 + E_2 + E_3)''|^\circ = |C_{2r+2}(O^{2r+2} + A^2)|^\circ = 2C_1^\circ(O + A) + 2r|C_1(O)|^\circ$$

et que, par conséquent,  $4F$  est de bigenre  $P_2 = 2r+1$ , son système canonique pur étant composé avec les courbes elliptiques du faisceau linéaire de image  $|C_1(O)|$ .

Dans le cas actuellement considéré, les courbes  $a^\circ$  de  $4F$  ont le genre  $2r+5$ , car elles portent  $2(2r+8)$  points de diramation, mais les systèmes  $|a + e'_i|$  deviennent  $|C_0(A)|$ ,  $|C_{r+1}(O^{r+1})|$ ,  $|C_{r+1}(O^{r+1})|$  et possèdent les dimensions respectives  $-1$ ,  $r+1$  et  $r+1$ . Autant dire que l'adjoint d'une courbe  $a^\circ$  ne possède que la dimension  $2r+3$  et découpe sur  $a^\circ$  une série canonique de défaut 1. Le plan quadruple  $4F$  est par suite de genre  $p_a = -1$ .

Le fait était prévisible. En effet, la surface  $F_0 = 4F$  est une surface double  $2F_1$  dont le support  $F_1$  est lui même la surface double  $2F$  dotée de la courbe de diramation  $E_2 + E_3 = C_4(A^4)$ . Celle-ci est composée avec quatre droites d'un faisceau. Elle est donc une réglée elliptique dont le système des génératrices est doublement représenté sur ce faisceau. Il s'ensuit que  $F_0$  porte un faisceau elliptique de courbes  $C_1^\circ(A)$  de genre  $2r+1$  parce que le support de ces courbes porte  $2(2r+4)$  point de diramation.

On vérifie aisément que les courbes  $C_i^0$  ( $O + A$ ) donnent lieu à des courbes exceptionnelles de première espèce sur  $F_0$ .

6. Les énoncés qui viennent d'être formulés prouvent bien que

1° *Pour toute valeur du bigenre, il existe des surfaces régulières de genres  $p_g = 0$ ,  $p^{(1)} = 1$ .*

2° *Tout au moins, pour les valeurs impaires du bigenre, il est de surfaces de genres  $p_a = -1$ ,  $p_g = 0$ ,  $p^{(1)} = 1$ .*

On observe sans peine que les dernières surfaces présentées sont des surfaces elliptiques de déterminant 4.

**Meccanica.** — *Sul comportamento energetico di alcuni sistemi meccanici non-lineari.* Nota di LUIGI CAPRIOLI, presentata (\*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. In alcuni trattati di Meccanica non-lineare, di relativamente recente pubblicazione <sup>(1)</sup>, è citato, come esempio di oscillatore meccanico autoefficiente <sup>(2)</sup>, il sistema (indicato schematicamente in fig. 1) costituito da un pattino appoggiato con attrito ad una cinghia che si muove in un piano orizzontale con velocità costante (a ciò provvedendo un motore opportunamente regolato) e soggetto, oltre che alla citata forza di attrito, anche ad una forza elastica e ad una forza dissipativa di tipo viscoso <sup>(3)</sup>.

Ritenendolo non del tutto privo di qualche interesse, espongo, in questa Nota, un semplice esame energetico del sistema, limitandomi, per ora, al caso di piccola non-linearità (caratterizzata da un parametro numerico  $\varepsilon$ ) e sotto ipotesi che, come si vedrà, è lecito ritenere non troppo restrittive dal punto di vista pratico. Da tale esame appare che l'energia fornita dal motore in un certo tempo (multiplo del periodo di oscillazione del pattino), per mantenere costante la velocità della cinghia, può, per effetto delle oscillazioni del pattino,

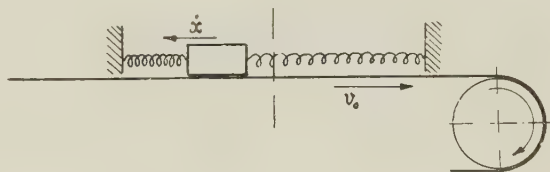


Fig. 1.

(\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.

(1) A. A. ANDRONOW, C. E. CHAIKIN, *Theory of oscillations*. Princeton University Press, 1949; J. J. STOKER, *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*. Interscience Publishers, New-York 1950; N. W. McLACHLAN, *Ordinary nonlinear differential equations in eng. and phis.* « Sciences », Oxford Clar. Press, 1950.

(2) Cfr. D. GRAFFI, *Equazioni delle oscillazioni non-lineari in relazione alle applicazioni*. « Atti del IV Congr. U.M.I. », Taormina 1951, Perrella, Roma 1953.

(3) Cfr. anche W. HAACHE, *Über die Nichtlineare Mechanik*. « Phisic. Blatter », 9, J., 1953, H. 9.



aumentare od anche diminuire (rispetto al valore relativo alle condizioni di quiete del pattino). Tale variazione di energia, che, nelle ipotesi qui ammesse, è sempre dell'ordine del parametro  $\varepsilon$ , può inoltre risultare, anche se positiva, insufficiente a compensare la dissipazione di energia che si manifesta per effetto della resistenza viscosa agente sul pattino; nel qual caso, tale compensazione si verifica a spese di una minor dissipazione di energia nell'attrito fra il pattino e la cinghia.

Un tale comportamento è, del resto, molto analogo a quello di certi oscillatori di tipo elettrico (cfr. nota <sup>(12)</sup>); e, in particolare, di quelli a tubi elettro-nici: è ben noto, infatti, che la dissipazione anodica che si ha in questi ultimi in regime oscillatorio può essere anche notevolmente minore di quella a riposo.

2. Osserviamo, anzitutto, che, detta  $v_0$  la velocità (costante <sup>(4)</sup>) della cinghia ed  $x$  l'ascissa del pattino (considerato qui come un punto materiale di massa  $m$ ) rispetto alla posizione in cui è nulla la forza di richiamo (la quale forza indicheremo pertanto con  $-\bar{k}^2 x$ , essendo  $\bar{k}$  una costante), l'equazione del moto del pattino è:

$$(1) \quad \ddot{x} + \frac{\bar{k}^2}{m} x + \frac{h^2}{m} \dot{x} + \frac{1}{m} F(v_0 + \dot{x}) = 0$$

dove  $h$  è una costante ed  $F(v_0 + \dot{x})$  la forza di attrito, che supponiamo funzione della sola velocità relativa  $v_0 + \dot{x}$  fra il pattino e la cinghia. Supposto, inoltre, che la (1) ammetta, in prima approssimazione, la soluzione periodica  $x(t)$  di periodo  $T$  (vedi più oltre le condizioni (8), (9) a ciò sufficienti e che qui ammetteremo verificate), la energia  $W_a$  che il motore  $S$  eroga nel tempo  $T$ , per vincere la reazione del pattino, vale

$$(2) \quad v_0 \int_0^T F(v_0 + \dot{x}) dt = W_{a0} + v_0 \int_0^T [F(v_0 + \dot{x}) - F(v_0)] dt,$$

dove  $W_{a0}$  è la energia che nel tempo  $T$  sarebbe fornita dal motore, supposto il pattino in quiete. Tenuto conto, poi, che  $\int_0^T \dot{x} dt = 0$ , si ha, per la energia  $W_d$  che in un periodo si dissipa per effetto dell'attrito fra il pattino e la cinghia, la espressione

$$(3) \quad \int_0^T (v_0 + \dot{x}) F(v_0 + \dot{x}) dt = W_{a0} + v_0 \int_0^T [F(v_0 + \dot{x}) - F(v_0)] dt + \\ + \int_0^T \dot{x} [F(v_0 + \dot{x}) - F(v_0)] dt.$$

(4) Ciò presuppone, naturalmente, che il motore cui è dovuto il moto della cinghia sia regolato a velocità costante.

Segue così che, rispetto al comune valore  $W_{a_0}$ , assunto quando il pattino è in quiete, le energie  $W_a$ ,  $W_d$  subiscono, per effetto delle oscillazioni, i rispettivi incrementi

$$\Delta W_a = v_0 \int_0^T [F(v_0 + \dot{x}) - F(v_0)] dt$$

$$\Delta W_d = v_0 \int_0^T [F(v_0 + \dot{x}) - F(v_0)] dt + \int_0^T \dot{x} [F(v_0 + \dot{x}) - F(v_0)] dt;$$

sicché l'energia conferita all'oscillatore in un periodo del moto vale ovviamente:

$$W_a - W_d = \Delta W_a - \Delta W_d = - \int_0^T \dot{x} [F(v_0 + \dot{x}) - F(v_0)] dt$$

e compensa l'energia dissipata per effetto della forza  $-h^2 \dot{x}$ ; segue, infatti, dalla (1) (moltiplicando per  $\dot{x}$  ed integrando in un periodo) che è:

$$(4) \quad \Delta W_a - \Delta W_d = h^2 \int_0^T \dot{x}^2 dt.$$

3. Ad una valutazione degli ordini di grandezza delle quantità  $\Delta W_a$ ,  $\Delta W_d$  potrà pervenirsi se, assegnata la funzione  $F(v_0 + \dot{x})$ , si possa determinare, sia pure in via approssimata, la funzione  $\dot{x}(t)$ . A tale scopo, osserviamo anzitutto che, derivando la (1) rispetto al tempo e posto

$$y = \dot{x}(t) \quad , \quad \omega^2 = \frac{k^2}{m} ,$$

si ottiene la equazione (di Liénard)

$$(5) \quad \ddot{y} + \omega^2 y + \omega \frac{1}{m\omega} [h^2 + F'(v_0 + y)] \dot{y} = 0$$

per la esistenza di soluzioni periodiche della quale sono sufficienti <sup>(5)</sup> le condizioni

$$(6) \quad \begin{cases} h^2 + F'(v_0 + y) < 0 & \text{per } n < y < p \\ 0 < h^2 + F'(v_0 + y) & \text{per } y < n, p < y \end{cases}$$

(con  $n < 0$  e  $p > 0$ ),

$$(7) \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} [h^2 y + F(v_0 + y)] = +\infty.$$

(5) G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. P. II, Cap. XII, § 3; Zanichelli, Bologna 1949.

Tali condizioni risulteranno qui soddisfatte, in quanto supporremo che, analogamente a quanto si verifica nell'oscillatore elettronico studiato da Van der Pol <sup>(6)</sup>, la  $F(v_0 + y)$  sia un polinomio di terzo grado, cioè che sia:

$$F(v_0 + y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 \quad (7)$$

con

$$(8) \quad h^2 + a_1 < 0 \quad (8) \quad , \quad a_3 > 0.$$

Noi supporremo, inoltre, molto piccola la non-linearità della (5): più precisamente, assunto

$$\frac{h^2 + a_1}{m\omega} = \varepsilon \quad , \quad |\varepsilon| \ll 1,$$

con che può scriversi

$$\frac{1}{m\omega} [h^2 + F'(v_0 + y)] = \varepsilon [1 + \frac{2 a_2}{\varepsilon m\omega} y + \frac{3 a_3}{\varepsilon m\omega} y^2] = \varepsilon f(y),$$

supporremo che la quantità (adimensionale)  $\varepsilon f(y)$  risulti, per tutti i valori che può assumere  $y$ , dell'ordine di  $\varepsilon$  <sup>(9)</sup>.

Applicando, allora, i procedimenti approssimati della Meccanica non-lineare <sup>(10)</sup>, si ottiene la soluzione periodica della (5):

$$(9) \quad y(t) = c \sin(\omega t + \Phi) + \varepsilon y_1$$

in cui  $\Phi$  è una costante, la grandezza  $c$  ha il valore (reale: cfr. relazioni (8)):

$$c = 2 \sqrt{-\frac{\varepsilon m\omega}{3 a_3}}$$

che è notoriamente dell'ordine di  $\varepsilon^0$  (cfr. nota <sup>(9)</sup>); mentre la quantità  $y_1$  vale

$$c \left[ \frac{1}{3} \sin 2(\omega t + \Phi) - \frac{1}{7} \cos 3(\omega t + \Phi) \right].$$

Si ha così, a meno di termini dell'ordine di  $\varepsilon^2$ :

$$\Delta W_a \cong \frac{\pi}{\omega} a_2 v_0 c^2;$$

(6) B. VAN DER POL, *The nonlinear theory of electric oscillations*, « P.I.R.E. », 22, 1051-1086 (1934).

(7) Condizione necessaria affinché una tale assunzione sia lecita è che sia sempre (per ogni valore di  $y$ ):  $|y| < v_0$ , e ciò al fine di escludere che la variabile  $v_0 + y$  possa assumere il valore zero, in corrispondenza del quale la forza di attrito presenta, come è ben noto, una discontinuità pari a  $2 F(v_0)$ .

(8) Ciò equivale ad ammettere che sia  $a_1 = F'(v_0)$  negativa, cioè alla ben nota condizione (verificata dalla esperienza) che la caratteristica  $F(v_0 + y)$  sia discendente in  $v_0$ .

(9) Debbono perciò essere di ordine non inferiore ad  $\varepsilon$  i numeri  $\left| \frac{2 a_2 y}{m\omega} \right|$ ,  $\left| \frac{3 a_3 y^2}{m\omega} \right|$ ; poiché inoltre, come vedremo, il massimo di  $|y|$  vale sensibilmente  $c$ , risulteranno dell'ordine di  $\varepsilon$  anche i numeri  $\left| \frac{2 a_2 c}{m\omega} \right|$ ,  $\left| \frac{3 a_3 c^2}{m\omega} \right|$ .

(10) N. MINORSKY, *Introduction to nonlinear Mechanics*; J. W. EDWARD, « Mich. », 1947.

la quantità  $\Delta W_a$  è dunque dell'ordine di  $\epsilon$  (cfr. nota <sup>(9)</sup>) ed ha il segno del coefficiente  $a_2$ . Segue poi, dalla (4), che è

$$\Delta W_d = \Delta W_a - h^2 \int y^2 dt$$

e cioè, a meno di termini dell'ordine di  $\epsilon^2$ :

$$\Delta W_d = \frac{\pi}{\omega} c^2 [a_2 v_0 - h^2].$$

Si conclude quindi che, se è  $a_2 = 0$  <sup>(11)</sup>, nel qual caso la equazione (5) si riduce a quella di Van der Pol <sup>(6)</sup>, il motore non eroga, in regime oscillatorio, energia maggiore di quella fornita a riposo; l'energia fornita all'oscillatore è in tal caso, dovuta alla minore dissipazione  $-\frac{\pi}{\omega} c^2 h^2$  per l'attrito fra pattino e cinghia. Se è, invece,  $a_2 < 0$  (naturalmente, verificando  $a_2$  l'ipotesi di piccola non-linearità), le oscillazioni si mantengono sempre, grazie alla minore dissipazione di energia per l'attrito con la cinghia; quest'ultima energia compensa, inoltre, anche la minore erogazione del motore ( $\Delta W_a = \frac{\pi}{\omega} a_2 v_0 c^2$ ). Se, infine, è  $a_2 > 0$ , il motore eroga, nel regime oscillatorio del pattino, una quantità di energia maggiore di quella erogata quando il pattino è in quiete; questa maggiore erogazione è sufficiente a mantenere le oscillazioni del pattino, se è  $h^2 \leq a_2 v_0$ ; nel qual caso l'energia dissipata per l'attrito fra il pattino e la cinghia non diminuisce, in regime oscillatorio, rispetto al valore relativo alla condizione di quiete del pattino; essa può anzi aumentare (quando sia  $h^2 < a_2 v_0$ ). Se è invece  $a_2 v_0 < h^2$ , la maggiore erogazione, da parte del motore, della energia  $\frac{\pi}{\omega} a_2 v_0 c^2$  non è sufficiente a mantenere le oscillazioni del pattino: il bilancio energetico dell'oscillatore è effettuato, in questo caso, grazie alla minore dissipazione di energia (pari a  $(h^2 - a_2 v_0) \frac{\pi}{\omega} c^2$ ) nell'attrito fra il pattino e la cinghia <sup>(12)</sup>.

(11) Ciò equivale ad ammettere che per  $\dot{x} = 0$  la caratteristica  $F(v_0 + \dot{x})$  presenti un flesso: non sembra che esistano ragioni per escludere *a priori* che ciò possa verificarsi in pratica; come, del resto, non si hanno criteri precisi circa il segno di  $a_2$ . I dati in proposito che mi è stato possibile attingere alla bibliografia fisica-matematica sono assai poco esaurienti; né d'altra parte, riesce agevole la ricerca di tali elementi nella assai vasta letteratura tecnica.

(12) Considerazioni del tutto analoghe a quelle qui esposte potrebbero ripetersi per un oscillatore elettrico del tipo (indicato in fig. 2) costituito da un conduttore non lineare  $Z$ , ai cui estremi è derivato un circuito  $R, L, C$  in serie, l'alimentazione del sistema essendo effettuate a corrente costante da un opportuno generatore  $S$ . Detta  $q$  la carica del condensatore all'istante generico, e con ovvio significato degli altri simboli, sussiste la equazione

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{L} v(I_0 + q) = 0,$$

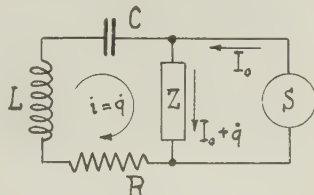


Fig. 2.

della quale è evidente, supposto l'andamento della caratteristica  $v(I_0 + q)$  simile a quello della funzione  $F(v_0 + \dot{x})$ , l'analogia con la (1) del testo.



**Meccanica.** — *Di alcune proprietà cinematiche riguardanti i moti rigidi di rotolamento* (\*). Nota di BRUNO FORTE, presentata (\*\*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. PREMessa. — Un generico moto rigido, per il quale sia nulla istante per istante la velocità di traslazione, può, notoriamente, riguardarsi come generato dal puro rotolamento di una superficie rigata su di un'altra. È prevedibile quindi che ogni sua proprietà, indipendente dalla particolare legge oraria secondo la quale esso moto avviene, sia legata alle caratteristiche geometriche di tali superficie. L'esperienza suggerisce di assegnare le due rigate  $S$  e  $S'$ , rispettivamente mobile e fissa, che individuano il dato movimento, tramite:

a) le loro indicatrici sferiche,  $\sigma$  e  $\sigma'$ , luoghi dei punti intersezione delle semirette parallele alle loro generatrici, aventi l'origine in un medesimo punto

$O$ , con la sfera che ha centro in esso e raggio  $r$ ;

b) le loro curve di stringimento  $c$  e  $c'$ , il cui generico punto  $I$  (« punto centrale ») è la posizione limite del piede, sulla generatrice per esso, della retta di minima distanza fra tale generatrice ed un'altra qualunque, al tendere di questa ultima alla prima considerata;

c) i parametri di distribuzione  $k$  e  $k'$  dei piani tangenti attorno ad una loro generica generatrice (da considerarsi quindi funzioni note dei punti di  $\sigma$  e  $\sigma'$ ). Il parametro  $k$  (ri-

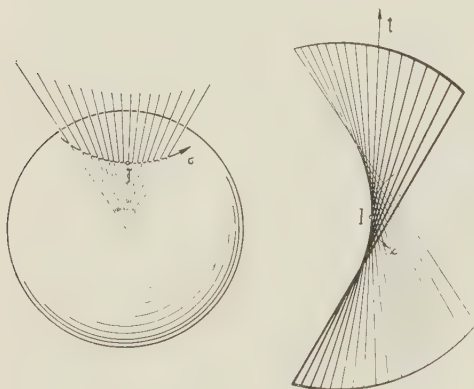


Fig. 1.

spettivamente  $k'$ ) assegna infatti, col suo valore, la legge di corrispondenza (o di distribuzione)  $t = k \tan \varphi$  ( $t' = k' \tan \varphi'$ ) tra le ascisse  $t$  ( $t'$ ) dei punti della considerata generatrice, contate a partire dal punto centrale  $I$  su di essa, e gli angoli  $\varphi$  ( $\varphi'$ ) formati dai piani tangenti in detti punti col piano tangente in  $I$  ( $I'$ ) alla rigata  $S$  ( $S'$ );

d) gli angoli  $V$  e  $V'$  sotto i quali le curve di stringimento  $c$  e  $c'$  sono tagliate dalla generica generatrice di  $S$  e di  $S'$ , rispettivamente (da considerarsi perciò anche essi funzioni note dei punti di  $\sigma$  e di  $\sigma'$ ).

È noto infine che le due rigate  $S$  e  $S'$ , per il loro significato cinematico, godono delle seguenti reciproche proprietà: in ogni istante, nel moto da esse generato, hanno in comune una retta (asse istantaneo di rotazione); sono

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Meccanica dell'Università di Trieste.

(\*\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.

applicabili l'una all'altra, riguardando come corrispondenti quelle generatrici, sulla superficie  $S$  ed  $S'$  rispettivamente, che, nel moto in esame, vengono successivamente a sovrapporsi. Da quest'ultima proprietà si deduce quindi: che i piani tangenti alle due rigate, nei punti delle loro generatrici istantaneamente sovrapposte, coincidono; che i parametri di distribuzione  $k$  e  $k'$  dei piani tangenti lungo le generatrici corrispondenti si identificano; che i punti centrali su quelle fra queste coincidenti con l'asse istantaneo di rotazione sono pure sovrapposti; e che, infine, gli angoli  $V$  e  $V'$  sotto i quali le linee di stringimento tagliano detto asse sono eguali <sup>(1)</sup>.

Proponendoci di studiare alcune proprietà differenziali del moto rigido di rotolamento (di  $S$  su  $S'$ ) ed in particolare il modo di variare della distanza fra due punti, rispettivamente solidali alla rigata mobile  $S$  ed a quella fissa  $S'$ , è conveniente assumere un sistema di riferimento legato agli enti che tali rigate definiscono.

Nella configurazione della rigata mobile  $S$ , che riguarderemo come iniziale, il punto centrale  $I$  sull'asse istantaneo di rotazione occuperà certa posizione  $I_0$  (vedi fig. 2). Assumeremo tale punto come origine di un sistema di riferimento curvilineo su una, a piacere, delle due curve di stringimento  $c$  e  $c'$  <sup>(2)</sup>, e fissiamo su quella, fra esse, prescelta, un verso positivo di percorrenza. Orienteremo poi concordemente la corrispondente indicatrice sferica, assumendo come origine dell'analogo sistema di riferimento, su di essa, il punto  $J_0$ , corrispondente al punto centrale  $I_0$ , secondo la legge che tale curva definisce.

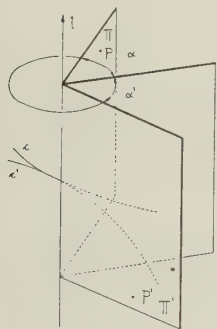


Fig. 3.

Si riterranno infine individuati due qualsiasi punti  $P$  e  $P'$  solidali rispettivamente con  $S$  ed  $S'$  dalle loro distanze  $r$  e  $r'$  dalla generatrice comune alle due rigate nella configurazione per esse considerata (tali distanze riguardandosi dotate di segno), dagli angoli  $\alpha$  e  $\alpha'$  compresi fra il piano ad esse tangente in  $I_0$  ed i piani  $\pi$  e  $\pi'$  per detti punti e l'asse istantaneo di rotazione. Infine dalle ascisse  $t$  e  $t'$  delle loro proiezioni su quest'ultimo, nel sistema di riferimento su di esso introdotto con origine in  $I_0$  (vedi fig. 3).

2. DEFINIZIONE DI CONIUGIO DI ORDINE  $m$  FRA DUE PUNTI  $P$  E  $P'$ . — Diremo che due punti  $P$  e  $P'$ , rispettivamente solidali colle rigate  $S$  e  $S'$ , presentano un *coniugio di ordine  $m$*  se la loro distanza, nel moto di rotolamento di  $S$  su  $S'$ , a partire dalla configurazione considerata come iniziale (ma del resto generica), è costante a meno di infinitesimi di ordine  $m$ , rispetto

(1) Cfr. L. BIANCHI, *Geometria Differenziale*, vol. I, parte I, cap. VIII, Zanichelli, Bologna 1927, §§ 142, 143, 144.

(2) Si ricordi che nel moto in esame tali curve rotolano senza strisciare l'una sull'altra.



Fig. 2.

all'intervallo di tempo intercorso  $\Delta t$ , ovvero, indifferentemente, stante l'ipotesi di regolarità del movimento in esame, rispetto all'arco di curva  $\Delta s$ , descritto nel medesimo intervallo di tempo dal punto centrale I sulla linea di stringimento della superficie S, od a quello  $\Delta \sigma$ , descritto dal punto J sulla corrispondente indicatrice sferica. Tale ultima grandezza sarà quella che noi, nel seguito, assumeremo come infinitesimo di riferimento.

È ovvio che la distanza fra due generici punti P e P', l'uno fisso e l'altro mobile con S, può sempre ritenersi costante a meno di infinitesimi del medesimo ordine di  $\Delta \sigma$ ; il coniugio del primo ordine non presenta quindi alcun interesse. È pure immediato (basta ricordare l'espressione della velocità di un generico punto P, in un moto rigido di rotolamento) che coppie di punti con coniugio del secondo ordine sono tutte le possibili coppie formate da punti di un medesimo piano per la generatrice comune alle rigate S e S' ( $\pi \equiv \pi'$ ). Non altrettanto ovvie e immediate sono le relazioni che traducono le condizioni di coniugio di ordine superiore al secondo e che formano l'oggetto di questa Nota. Per conseguirle nel modo algebricamente più rapido, occorre osservare che dalla data definizione di coniugio discende immediatamente: *Condizione necessaria e sufficiente perché due punti P e P' presentino un coniugio di ordine m è che la sfera di centro P' e raggio  $\overline{PP'}$  abbia un contatto m-punto in P con la traiettoria di quest'ultimo.* Con facili considerazioni infatti da quest'ultima condizione, equivalente a quella di coniugio di ordine m, si deduce, come sua traduzione analitica:  $\alpha - \alpha' = \pi$ , a meno di infinitesimi di ordine  $m - 1$  rispetto a  $\Delta \sigma$ , ovvero:

$$\alpha = \alpha' + \pi \quad \text{e} \quad \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{d\alpha'}{d\sigma}, \quad \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} = \frac{d^2\alpha'}{d\sigma^2}, \dots, \frac{d^{m-2}\alpha}{d\sigma^{m-2}} = \frac{d^{m-2}\alpha'}{d\sigma^{m-2}} \quad \text{per } \Delta\sigma = 0.$$

È appena necessario osservare che la definizione di coniugio fra due punti, testé data, di immediata interpretazione meccanica, è la diretta estensione ai moti rigidi nello spazio della analoga definizione introdotta nello studio dei moti piani <sup>(3)</sup> e del moto rigido di una sfera su se stessa <sup>(4)</sup>.

3. CARATTERIZZAZIONE DELLE COPPIE DI PUNTI CHE PRESENTANO UN CONIUGIO DEL TERZO, QUARTO ORDINE. - Per pervenire alla relazione che lega i paramenti  $r$  e  $r'$ ,  $\alpha$  e  $\alpha'$ , atti ad individuare una generica coppia di punti con coniugio del terzo ordine, occorre esplicitare la relazione differenziale  $d\alpha/d\sigma = d\alpha'/d\sigma$ , tenendo conto della condizione di coniugio del secondo ordine  $\alpha = \alpha' + \pi$ . Si ricordi, per tale ultimo scopo, la relazione vettoriale <sup>(5)</sup> che lega lo spostamento infinitesimo  $dI$  del punto centrale I, nel moto relativo alla rigata mobile S, al parametro di distribuzione  $k$  dei suoi piani

(3) Cfr. L. SOBRERO, *Di una elementare proprietà cinematica analoga al principio di Fermat*. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », ser. VIII, vol. VIII, fasc. 4 (1950).

(4) Cfr. B. FORTE, *Di alcune proprietà cinematiche riguardanti il moto rigido di una sfera su se stessa*. Ibidem, ser. VIII, vol. XIV, fasc. 6 (1953).

(5) Cfr. R. GARNIER, *Cours de Cinématique*, Paris, Gauthier-Villars, 1949, tome II, chap. VII, p. 122.

tangenti lungo l'asse istantaneo di rotazione, all'angolo  $V$  sotto il quale la linea di stringimento  $c$  taglia detta generatrice in  $I_0$  (posizione istantanea di  $I$ ), ai versori  $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{t}_3$ , rispettivamente all'asse istantaneo di rotazione, della normale in  $I_0$  alla rigata  $S$  e della tangente ad essa nel medesimo punto, quando si pensino tali rette opportunamente orientate <sup>(6)</sup>:

$$dI = (-k \cdot \underline{t}_3 + k \cdot \cotg V \cdot \underline{t}_1) d\sigma.$$

Si ricordino pure le relazioni differenziali che legano mutuamente i sopradetti versori  $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{t}_3$  <sup>(7)</sup>:

$$\frac{d}{d\sigma} \underline{t}_1 = \underline{t}_2$$

$$\frac{d}{d\sigma} \underline{t}_2 = \frac{1}{R_m} \underline{t}_3 - \underline{t}_1$$

$$\frac{d}{d\sigma} \underline{t}_3 = -\frac{1}{R_m} \underline{t}_2.$$

Da tali relazioni differenziali si deducono, assai facilmente, le seguenti espressioni per le derivate delle coordinate  $r, t, r', t'$ , di una generica coppia di punti  $P$  e  $P'$ , rispetto all'ascissa  $\sigma$  del punto  $J$ , corrispondente del punto centrale  $I$  sulla indicatrice sferica della rigata  $S$ :

$$\frac{dr}{d\sigma} = k \cos \alpha + t \sin \alpha, \quad \frac{dr'}{d\sigma} = k \cos \alpha' + t' \sin \alpha',$$

$$\frac{dt}{d\sigma} = -k \cotg V - r \sin \alpha, \quad \frac{dt'}{d\sigma} = -k \cotg V - r' \sin \alpha',$$

e, da queste, le seguenti espressioni per le derivate prime degli angoli  $\alpha$  e  $\alpha'$  rispetto al medesimo parametro  $\sigma$ :

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = -k \frac{\sin \alpha}{r} + \cos \alpha \frac{t}{r} - \frac{1}{R_m}, \quad \frac{d\alpha'}{d\sigma} = -k \frac{\sin \alpha'}{r'} + \cos \alpha' \frac{t'}{r'} - \frac{1}{R_f},$$

dalla cui eguaglianza, tenendo conto della condizione  $\alpha = \alpha' + \pi$ , si ricava la condizione di coniugio del terzo ordine in termini finiti:

$$-k \sin \alpha \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right\} + \cos \alpha \left\{ \frac{t}{r} + \frac{t'}{r'} \right\} = \frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_f}.$$

Questa relazione, già nota sotto altro punto di vista <sup>(8)</sup>, può ben riguardarsi, per il modo seguito nell'introdurla, come l'estensione al caso spaziale della nota formula di Savary, a suo tempo interpretata come condizione di coniugio

(6) Si orienti la citata retta tangente in modo da formare un angolo acuto con la direzione positiva della tangente orientata alla curva di stringimento  $c$  in  $I_0$ ; la normale alla rigata  $S$  in  $I_0$  risulterà poi orientata in modo tale da formare con le rimanenti rette, nell'ordine indicato, una terna trirettangola levogira.

(7) Cfr. R. GARNIER, loc. cit., tome II, chap. VII, pp. 116-118.

(8) Cfr. R. GARNIER, loc. cit., Chap. VIII, n. 209. p. 188.



del terzo ordine nei moti piani e sferici<sup>(9)</sup> (estensione, quest'ultima, del Garnier<sup>(10)</sup>).

Tenendo conto della condizione di coniugio del secondo ( $\alpha = \alpha' + \pi$ ) e terzo ordine (formula di Savary), si può passare alla traduzione, in termini finiti, della ulteriore condizione  $d^2\alpha/d\sigma^2 = d^2\alpha'/d\sigma^2$ , per il coniugio del quarto ordine.

Con calcoli concettualmente facili e non molto laboriosi, si perviene alle seguenti espressioni per le derivate seconde degli angoli  $\alpha$  e  $\alpha'$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} &= -\sin\alpha \cdot \frac{1}{r} \frac{dk}{d\sigma} - 2k \cos\alpha \frac{1}{r} \frac{d\alpha}{d\sigma} - 2\sin\alpha \frac{t}{r} \frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{k}{R_m} \cos\alpha \cdot \\ &\cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{R_m} \sin\alpha \frac{t}{r} - k \cotg V \cos\alpha \frac{1}{r} - \sin\alpha \cos\alpha - \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{R_m} \\ \frac{d^2\alpha'}{d\sigma^2} &= -\sin\alpha' \cdot \frac{1}{r'} \frac{dk}{d\sigma} - 2k \cos\alpha' \frac{1}{r'} \frac{d\alpha'}{d\sigma} - 2\sin\alpha' \frac{t'}{r'} \frac{d\alpha'}{d\sigma} - \frac{k}{R_f} \cos\alpha' \cdot \\ &\cdot \frac{1}{r'} - \frac{1}{R_f} \sin\alpha' \frac{t'}{r'} - k \cotg V \cos\alpha' \frac{1}{r'} - \sin\alpha' \cos\alpha' - \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{R_f} \end{aligned}$$

Dalla loro eguaglianza, tenendo conto anche delle espressioni delle derivate prime degli angoli  $\alpha$  e  $\alpha'$ , si perviene alla seguente relazione:

$$\begin{aligned} &2k \frac{t-t'}{r \cdot r'} + \left\{ \left( \frac{k}{R_m} - \frac{2k}{R_f} \right) \frac{1}{r} \cos\alpha + \left( \frac{1}{R_m} - \frac{2}{R_f} \right) \frac{t}{r} \sin\alpha \right\} + \\ &+ \left\{ \left( \frac{k}{R_f} - \frac{2k}{R_m} \right) \frac{1}{r'} \cos\alpha + \left( \frac{1}{R_f} - \frac{2}{R_m} \right) \frac{t'}{r'} \sin\alpha \right\} + \left\{ k \cotg V \cdot \right. \\ &\cdot \cos\alpha + \frac{dk}{d\sigma} \sin\alpha \left. \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right\} = \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{L} \end{aligned}$$

ove si è posto:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}$$

4. BREVE DISCUSSIONE DEI RISULTATI. - Considerazioni immediate permettono di riconoscere come coniugati, con coniugio del terzo ordine, di un generico punto P, solidale con la rigata mobile, i punti P' dell'asse di curvatura<sup>(11)</sup> della sua traiettoria, nella posizione istantanea da esso occupata. Considerazioni successive assicurano, ricordando la seconda definizione di coniugio da noi data, che il coniugato P', con coniugio del quarto ordine, di un generico punto P, è il centro della sfera osculatrice della traiettoria di quest'ultimo. A formare coppie di punti con coniugio del quarto ordine si troveranno quindi quei punti P la cui traiettoria, nella posizione da essi istantaneamente occupata, presenta stazionarietà di curvatura, per i quali cioè la considerata sfera osculatrice si riduce ad un piano.

(9) Cfr. B. FORTE, loc. cit., n. 3.

(10) Cfr. R. GARNIER, loc. cit., Chap. VI, n. 162, p. 103.

(11) Intendendosi, come noto, per tale retta, la normale, per il centro di curvatura, al piano osculatore della traiettoria considerata.

Osservando infine che le coppie di punti con coniugio del quarto ordine formano una totalità  $\infty^3$ , è prevedibile che vi siano, in un moto rigido di rotolamento, in corrispondenza ad una certa configurazione della rigata mobile  $S$ ,  $\infty^2$  coppie di punti con coniugio del quinto ordine,  $\infty^1$  con coniugio del sesto ed un numero finito di coppie di punti con coniugio del settimo ordine. Donde la possibilità, una volta caratterizzate tali ultime coppie di punti, di realizzare meccanismi calcolatori <sup>(12)</sup> e guide approssimate del moto rettilineo con particolari moti rigidi di rotolamento, ottenendo per essi una approssimazione più spinta di quella che comunemente si consegue col moto di una opportuna catena cinematica piana. È appena necessario poi notare che, potendo riguardare il generico moto rigido di una sfera su se stessa ed il generico moto piano, come moti generati dal rotolamento di una particolare rigata  $S$  su di un'altra  $S'$  (che si riducono infatti in tali casi, rispettivamente, a due coni ed a due cilindri) le condizioni di coniugio testé trovate contengono, come casi particolari, le analoghe condizioni per detti movimenti.

### Astronomia. — *Sul satellite oscuro del sistema $\zeta$ Aquari.*

Nota II di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata<sup>(\*)</sup> dal Socio G. ARMELLINI.

4. Nella Nota I, ho mostrato come nel sistema binario della  $\zeta$  Aquari, sia da ritenersi presente, anche dopo il miglioramento dell'orbita da me eseguito, un satellite oscuro. La presenza di questo terzo corpo è messa in evidenza dagli scarti sistematici che l'astro secondario ha dalla sua orbita intorno all'astro principale, e che permangono con la loro periodicità, anche quando gli elementi orbitali siano stati migliorati col metodo dei minimi quadrati.

Dal lato spettroscopico, ricordiamo che nel Catalogo delle Velocità Radiali del Campbell e Moore (1928) <sup>(5)</sup>, lo spettro dell'astro secondario è dato come probabilmente variabile, ma in quello più recente dell'Osservatorio di Mount Wilson (1953) <sup>(6)</sup>, *nessun accenno particolare è fatto allo spettro delle due componenti principali.*

Assumiamo che il corpo oscuro sia il satellite dell'astro secondario.

Come è noto dalla meccanica, quando due corpi B e C, sono attratti da uno A maggiore ed assai più lontano (come nel sistema della  $\zeta$  Aquari), essi ruotano intorno al comune baricentro G, descrivendo approssimativa-

(12) Cfr. L. SOBRERO, *Sui meccanismi calcolatori di Svoboda*. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », ser. VIII, vol. VIII, fasc. 5 (1950).

(\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(5) Cfr. W. CAMPBELL and J. H. MOORE, *Radial velocities of Stars*. (« Lick Obs. Publ. », vol. XVI).

(6) Cfr. R. E. WILSON, *General Catalogue of stellar radial velocities, prepared at the Mount Wilson Observatory*. (« Papers of M. Wilson Obs. », vol. VIII, 1953).

mente delle ellissi simili, mentre il baricentro stesso G descrive, intorno all'astro principale A, un'orbita assai prossima ad una ellisse. Quindi se C è oscuro, l'osservatore vedrà B descrivere una curva ondulata intorno ad A e determinerà delle coordinate  $\vartheta_{\text{oss}}$ ,  $\rho_{\text{oss}}$  che non apparterranno ad un'orbita ellittica. D'altra parte le posizioni calcolate  $\vartheta_{\text{calc}}$  e  $\rho_{\text{calc}}$  di B, partendo dai suoi elementi ellittici, saranno in prima approssimazione le posizioni del baricentro G, rispetto ad A.

Nel caso presente, le coordinate  $\vartheta_{\text{oss}}$ ,  $\rho_{\text{oss}}$  sono riportate nella Tabella I della Nota I e le coordinate  $\vartheta_{\text{calc}}$ ,  $\rho_{\text{calc}}$  sono state da me calcolate - per le stesse epoche - mediante le note formule della teoria delle orbite, partendo dai seguenti elementi, che ho dato nella Nota I:

$$(1) \quad \Omega = 120^{\circ},5 \quad i = \pm 133^{\circ},4 \quad \omega = 249^{\circ},5 \quad e = 0,493 \\ a = 4'',284 \quad P = 601,26 \quad \tau = 1966,98.$$

Passiamo ora dalle coordinate polari  $\vartheta$ ,  $\rho$  a quelle rettangolari  $x$  ed  $y$ . Per quanto si è detto, le differenze:

$$x = x_{\text{calc}} - x_{\text{oss}} \quad ; \quad y = y_{\text{calc}} - y_{\text{oss}}$$

saranno approssimativamente le coordinate di B nella sua orbita intorno a G e possiamo pertanto, servendoci di queste, cercare di determinare l'orbita di B, intorno al baricentro G del sistema BC. Tale lavoro non è privo di difficoltà, poiché gli  $x_{\text{oss}}$  ed  $y_{\text{oss}}$  sono affette da errori di osservazione, e di conseguenza rendono incerti i valori delle coordinate  $x$  ed  $y$ .

Dopo vari tentativi, servendomi del metodo di Glasenapp-Kowalsky, ho trovato che l'orbita descritta da G intorno ad A, che rende minima la somma dei quadrati degli scarti, è la seguente:

$$(2) \quad \Omega' = 121^{\circ},5 \quad i' = \pm 44^{\circ},2 \quad \omega' = 5^{\circ},5 \quad e' = 0,109 \\ a' = 0'',078 \quad P' = 25 \quad \tau' = 1920,7.$$

Come ricordai nella Nota I, anche K. A. Strand aveva supposto la presenza di un terzo corpo nel sistema della  $\zeta$  Aquarî e calcolato l'orbita dell'astro secondario B, intorno al baricentro G del sistema BC.

Confrontando ora gli elementi (2) da me trovati, con quelli calcolati dallo Strand, si può notare come le due orbite sono pressoché uguali, per forma e dimensioni, avendosi per lo Strand:

$$e' = 0,000 \quad a' = 0'',080 \quad P' = 25,0 \quad \tau' = 1922,0$$

mentre è diversa la loro posizione nello spazio, poiché si ha per lo stesso autore:

$$\Omega' = 32^{\circ},3 \quad i' = \pm 57^{\circ},1 \quad \omega' = 270^{\circ},8.$$

Tale diversità è dovuta certamente alla difficoltà, già accennata, di determinare l'orbita minore, come ammette lo stesso Strand.

5. Nelle Tabelle III e IV, sono riportati gli scarti fra le posizioni osservate e quelle calcolate, per le due orbite.

Nella seconda e quinta colonna sono dati, in gradi, gli scarti  $O - C$  per le anomalie  $\vartheta$ ; nella quarta e settima colonna gli scarti  $O - C$  per i raggi vettori  $\rho$  in secondi di arco; ed infine nella terza e sesta colonna gli scarti  $O - C$ , espressi pure in secondi di arco, per gli archi percorsi  $\rho \Delta \vartheta$  dove  $\rho$  è dato in secondi e  $\Delta \vartheta$  in radianti.

TABELLA III.

*Osservazioni anteriori al 1900.*

Orbita A — BC				Orbita A — B		
$t$	$(O - C)_{\vartheta}$	$(O - C)_{\rho \Delta \vartheta}$	$(O - C)_{\rho}$	$(O - C)_{\vartheta}$	$(O - C)_{\rho \Delta \vartheta}$	$(O - C)_{\rho}$
1781.28	— 0°.19	— 0''.019	+ 0''.60	— 1°.40	— ".139	+ 0''.60
1825.73	+ .98	+ .086	— .15	+ .53	+ .047	— .20
1832.81	— .18	— .015	— .26	— 1 .24	— .105	— .20
1839.77	— 2 .02	— .168	+ .04	— 1 .49	— .123	+ .08
1842.39	— .57	— .047	— .01	+ .38	+ .031	— .01
1846.95	— 1 .11	— .090	— .17	— .66	— .054	— .23
1853.94	+ .49	+ .038	— .01	— .64	— .050	.00
1858.15	— 1 .43	— .110	— .02	— 2 .28	— .173	+ .04
1863.14	— 1 .42	— .106	— .05	— 1 .11	— .082	+ .01
1865.00	— 1 .46	— .108	— .07	— .72	— .053	— .03
1867.53	— 1 .21	— .089	— .20	+ .26	+ .019	— .17
1872.15	— .35	— .025	— .10	— .15	— .011	— .16
1876.40	+ 1 .07	+ .075	— .17	+ .19	+ .013	— .18
1878.12	+ 1 .69	+ .117	+ .10	+ .52	+ .036	+ .11
1882.68	+ 1 .93	+ .083	— .09	+ .53	+ .035	— .02
1886.30	+ .14	+ .009	— .07	— .71	— .046	.00
1887.50	+ 1 .76	+ .115	+ .13	+ 2 .21	+ .142	+ .19
1888.34	— .84	— .054	— .08	— .22	— .014	— .03
1890.08	— 1 .00	— .064	— .20	— .11	— .009	— .18
1890.24	— .63	— .040	+ .01	+ .29	+ .018	+ .02
1893.78	— .20	— .012	— .17	+ .53	+ .033	— .21
1895.76	+ .22	+ .013	— .12	+ .55	+ .034	— .20
1897.72	+ .69	+ .042	+ .04	+ .44	+ .027	— .02



TABELLA IV.  
*Osservazioni posteriori al 1900.*

$t$	Orbita A — BC			Orbita A — B		
	(O — C) $\phi$	(O — C) $\phi\Delta\phi$	(O — C) $\phi$	(O — C) $\phi$	(O — C) $\phi\Delta\phi$	(O — C) $\phi$
1900.12	— 1°.39	— 0''.083	+ 0''.02	— 2°.21	— 0''.133	0''.00
1901.02	+ 1.37	+ .081	.00	+ .42	+ .025	— .01
1903.54	+ 2.35	+ .137	— .08	+ 1.30	+ .075	— .04
1905.54	+ 1.08	+ .062	— .21	+ .27	+ .016	— .15
1906.83	+ 1.37	+ .078	+ .07	+ .76	+ .042	+ .15
1909.71	— .82	— .046	— .05	— .67	— .036	+ .03
1909.73	+ 1.21	+ .067	+ .06	+ 1.36	+ .077	— .15
1912.95	— 1.33	— .072	— .06	— .47	— .025	— .02
1916.09	— 1.47	— .077	— .07	— .44	— .023	— .09
1920.06	+ .25	+ .013	— .01	+ .45	+ .023	— .08
1921.25	+ 2.87	+ .145	+ .10	+ 2.69	+ .138	+ .03
1922.30	— .16	— .008	+ .04	— .68	— .035	— .02
1922.96	— 1.29	— .064	+ .02	— 1.99	— .100	+ .03
1925.53	+ 1.33	+ .065	+ .06	+ .22	+ .011	+ .06
1925.58	+ 1.09	+ .053	+ .04	— .04	— .002	+ .04
1927.38	+ 1.77	+ .085	+ .04	+ .68	+ .032	+ .07
1929.97	+ 1.47	+ .068	+ .11	+ .87	+ .039	— .03
1930.00	+ .88	+ .041	— .03	+ .28	+ .013	+ .04
1932.32	+ 1.59	+ .073	+ .02	+ 1.69	+ .075	+ .10
1935.00	— .23	— .010	— .04	+ .68	+ .030	+ .03
1935.39	+ .31	+ .014	+ .04	+ 1.32	+ .057	+ .11
1937.40	+ .42	+ .018	+ .03	+ 1.79	+ .078	+ .06
1939.21	— .47	— .020	— .08	+ .90	+ .039	— .08
1940.00	— .92	— .040	+ .01	+ .37	+ .016	— .01
1941.27	— .17	— .007	+ .04	+ .83	+ .036	.00
1942.73	+ .52	+ .021	+ .09	+ 1.02	+ .044	+ .03
1945.00	+ .63	+ .026	+ .11	+ .17	+ .007	+ .04
1945.60	+ .96	+ .040	+ .17	+ .26	+ .011	+ .11
1947.02	+ 3.99	+ .163	+ .40	+ 2.77	+ .115	+ .35

Come si vede nelle prime quattro colonne, dove gli scarti sono stati calcolati con l'orbita (1) senza tener conto del corpo oscuro, essi hanno carattere periodico; tale periodicità è invece scomparsa nelle ultime tre colonne dove ho calcolato gli scarti tenendo conto dell'orbita minore (2) di B intorno al baricentro G. Anche l'errore quadratico medio in  $\vartheta$  risulta diminuito da  $1^{\circ},4$  ad  $1^{\circ},1$ , come ho trovato col calcolo; mentre l'errore quadratico medio in  $\varphi$  rimane costante. Come, al solito, le osservazioni in corsivo si riferiscono a luoghi normali.

6. Riassumendo, possiamo dire che il miglioramento dell'orbita del satellite luminoso B intorno all'astro principale A, *conferma* l'ipotesi di Strand; e cioè *l'esistenza di un satellite oscuro C*, che ruoterebbe intorno a B in venticinque anni. Però l'orbita descritta da C intorno a B, anziché circolare come suppone Strand, sarebbe notevolmente ellittica ed inoltre giacerebbe in un piano ben diverso da quello trovato da Strand.

7. Cerchiamo ora di determinare la massa di ciascuna delle componenti il sistema.

Chiamiamo ora con  $\mu_A, \mu_B, \mu_C$  le masse di A, B, C rispettivamente, misurate prendendo per unità la massa del sole e con  $\pi$  la parallasse, per la quale nei calcoli seguenti sarà usato il valore spettroscopico  $\pi = 0''.042$  <sup>(7)</sup>, che dimostrammo in altra Nota <sup>(8)</sup> essere il più esatto.

Poiché l'astro principale A, è molto lontano sia da B che da C, supponiamo che B e C siano riuniti in una sola stella di massa  $\mu_B + \mu_C$ ; allora la terza legge di Keplero, applicata all'orbita maggiore dà:

$$(3) \quad \mu_A + (\mu_B + \mu_C) = \frac{a^3}{\pi^3 P^2}$$

essendo  $a = 4'',284$ ;  $\pi = 0'',042$  e  $P = 601,26$ .

Ricordando poi che il baricentro G, divide la distanza di C da B, in parti inversamente proporzionali alle masse, e che  $a'$  è il semiasse della orbita descritta da B proprio intorno a G, vediamo subito che la distanza di C da B è data dalla formula:

$$(4) \quad d = a' \frac{\mu_B + \mu_C}{\mu_C}$$

e quindi la legge di Keplero, applicata questa volta all'orbita descritta da C intorno a B, dà:

$$(5) \quad \mu_B + \mu_C = \frac{a'^3}{\pi^3 P'^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\mu_C}{\mu_B + \mu_C}\right)^3}$$

essendo  $a' = 0'',078$ ;  $\pi = 0'',042$  e  $P' = 25$ .

(7) SCHLESINGER, *General Catalogue of Stellar Parallaxes*. 1935.

(8) GIANNUZZI, *Orbita preliminare e parallasse di  $\zeta$  Aquari*. « Rend. Lincei », 1948sem. I.

La (3) e la (5), forniscono due relazioni tra le masse del sistema; una terza - sufficientemente approssimata per i nostri scopi - possiamo ricavarla dalla relazione tra la massa e la luminosità, dovuta a Russell <sup>(9)</sup>.

Poiché la grandezza di A è 4,42 e quella di B è uguale a 4,59, possiamo assumere:

$$\mu_B = 0,94 \mu_A.$$

La risoluzione delle equazioni, fornisce allora i seguenti valori:

$$\mu_A = 1,46 \quad \mu_B = 1,37 \quad \mu_C = 0,29.$$

Infine la distanza di C da B, calcolata mediante la (4), è:  $d = 0''.45$ .

Anche questi ultimi valori della massa e della distanza, risultano pressoché uguali a quelli dello Strand, che eseguendo i calcoli con la parallasse di  $0''.040$ , trova:  $\mu_C = 0,35$ ,  $d = 0''.44$ .

**Geodesia.** — *Sulla curvatura tangenziale delle trasformate di curve nelle rappresentazioni affini fra superficie.* Nota di ANTONIO MARUSSI, presentata (\*) dal Socio G. CASSINIS.

1. Nelle applicazioni alla Geodesia delle rappresentazioni fra superficie, o rappresentazioni cartografiche, ha notevole interesse lo studio delle trasformate di linee assegnate su una delle superficie; in particolare lo studio delle trasformate delle linee geodetiche. Fra tutti i tipi di rappresentazioni cartografiche, quelle conformi hanno trovato in tempi recenti il più largo impiego anche nella risoluzione dei problemi pratici della Geodesia, e per queste il problema accennato è pienamente risolto dal teorema di Schols; questo fornisce con un'enunciazione semplicissima, che richiameremo in seguito come caso particolare di relazioni più generali, l'alterazione della curvatura geodetica indotta dalla rappresentazione stessa.

Non mi risulta invece che sia stata data un'espressione per la curvatura delle trasformate nel caso delle rappresentazioni affini più generali; ed è la ricerca di questa espressione che forma l'oggetto della presente Nota.

Negli sviluppi analitici occorrenti si è fatto uso del calcolo tensoriale, che conferisce particolare semplicità alle formule, ne mette in evidenza le proprietà che non dipendono dalle particolari coordinate prescelte, e consente facili generalizzazioni negli spazi a più dimensioni. Si sottintendono nel seguito tutte le convenzioni usuali di questo calcolo, avvertendo che la variabilità degli indici è limitata ai valori 1 e 2.

2. Sia  $\Sigma$  una superficie arbitraria, regolare, che diremo obbiettiva, ed  $y^i$  un sistema di coordinate parametriche su di essa, definite in modo tale

(9) H. N. RUSSELL and C. E. MOORE, *The Masses of the Stars*, 1940.

(\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.

da stabilire, entro una regione opportunamente limitata di  $\Sigma$ , una corrispondenza biunivoca e continua fra le coppie di parametri  $(y^1, y^2)$  ed i punti di essa. Sia inoltre  $g_{ij}$  il tensore metrico fondamentale di  $\Sigma$ , di guisa che

$$(1) \quad ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j$$

rappresenti il quadrato dello spostamento elementare superficiale. Con  $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ rs \end{smallmatrix} \right\}$  indichiamo i simboli di Christoffel di seconda specie di  $\Sigma$  rispetto alle coordinate sopra considerate; e ricordiamo che

$$(2) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ rh \end{smallmatrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial y^r} \lg \sqrt{G} \quad ; \quad G = |g_{rs}| = g_{11} g_{22} - g_{12}^2.$$

Considerando poi uno spostamento di componenti  $dy^i$

$$dP = t ds$$

di versore  $t$  e di modulo  $ds$ , le componenti controvarianti di  $t$  saranno indicate con  $\lambda^i = \frac{dy^i}{ds}$ .

3. Supponiamo che la  $\Sigma$  venga rappresentata nel modo più generale su di un'altra superficie  $\bar{\Sigma}$  (superficie immagine), che per ora non precisiamo, stabilendo soltanto che sia assegnato in ogni punto il modulo di deformazione lineare  $m_i$  per ogni direzione caratterizzata dal versore  $t$  sopra considerato; e sia precisamente

$$(3) \quad m_i^2 = a_{ij} \lambda^i \lambda^j.$$

In questa formula  $a_{ij}$  rappresenta necessariamente un tensore doppio covariante, in quanto la rappresentazione è definita a prescindere dalle coordinate usate; noi supporremo che le sue componenti siano univocamente definite e derivabili fino all'ordine che occorre in ogni punto della regione considerata di  $\Sigma$ .

Dalla (3) segue che il tensore  $a_{ij}$  deve essere simmetrico, in quanto una eventuale parte emisimmetrica sarebbe senza effetto; di più, esso deve riguardarsi come il tensore metrico fondamentale di  $\bar{\Sigma}$ , quando questa superficie sia riferita alle stesse coordinate  $y^i$  già usate per  $\Sigma$ , nel senso che a punti delle due superficie che si corrispondono, sia da attribuire la medesima coppia di coordinate. Ed infatti, indicando con  $d\bar{s}$  l'elemento lineare di  $\bar{\Sigma}$  che corrisponde a  $ds$  su  $\Sigma$ , si ha

$$m_i^2 = \frac{d\bar{s}^2}{ds^2} = a_{ij} \lambda^i \lambda^j = \frac{a_{ij} dy^i dy^j}{ds^2}$$

onde

$$d\bar{s}^2 = a_{ij} dy^i dy^j.$$

Attraverso il tensore fondamentale  $a_{ij}$ , rimane così anche pienamente determinata la curvatura totale di  $\Sigma$ .



4. Determiniamo ora i simboli di Christoffel di prima specie  $(\overline{rs}, i)$  di  $\bar{\Sigma}$  riferita alle coordinate  $y^i$ ; si ha

$$(\overline{rs}, i) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{ir}}{\partial y^s} + \frac{\partial a_{si}}{\partial y^r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial y^i} \right)$$

onde anche, osservando che

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial y^i} = a_{rs|i} + a_{rh} \left\{ \begin{matrix} h \\ is \end{matrix} \right\} + a_{hs} \left\{ \begin{matrix} h \\ ir \end{matrix} \right\}$$

segue

$$(4) \quad (\overline{rs}, i) = \frac{1}{2} (a_{ir|s} + a_{si|r} - a_{rs|i}) + a_{ih} \left\{ \begin{matrix} h \\ rs \end{matrix} \right\}.$$

Qui e nel seguito tutte le operazioni di derivazione covariante si intendono effettuate rispetto alla metrica  $g_{ij}$  di  $\Sigma$ ; ed altrettanto dicasi per la operazione di innalzamento e di abbassamento degli indici.

Indichiamo ora con  $A^{ij}$  il tensore reciproco di  $a_{ij}$ ;

$$a_{ih} A^{hj} = \delta_i^j \quad (\text{simbolo Kronecker});$$

moltiplicando la (4) per tale tensore e contraendo una volta, si ottiene per i simboli di Christoffel di seconda specie  $\left\{ \begin{matrix} i \\ rs \end{matrix} \right\}$  di  $\Sigma$  l'espressione

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ rs \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i \\ rs \end{matrix} \right\} + T_{rs}{}^i.$$

con

$$(5) \quad T_{rs}{}^i = \frac{1}{2} A^{ih} (a_{hr|s} + a_{sh|r} - a_{rs|h}).$$

Quest'ultima formula assicura il carattere tensoriale del sistema  $T_{rs}{}^i$ , e mostra l'analogia strettissima che intercorre fra lo studio delle più generali rappresentazioni cartografiche, e quello degli spazi a connessione affine <sup>(1)</sup>. Appare anche subito evidente come il tensore  $T_{rs}{}^i$  sia simmetrico negli indici  $r$  ed  $s$ .

5. Contraendo il tensore  $T_{rs}{}^i$  rispetto agli indici  $i$  ed  $s$ , e ricordando la (2) e l'analogia che può scriversi per la metrica  $a_{ij}$ , si ha

$$(6) \quad T_{ri}{}^i = \sigma_{/r} \quad ; \quad \sigma = \lg \sqrt{\frac{A}{G}} \quad ; \quad A = |a_{ij}|.$$

Il rapporto  $\sqrt{A} : \sqrt{G}$  uguaglia ovviamente il modulo di deformazione areale  $S = e^\sigma$  della rappresentazione, onde il tensore contratto  $T_{ri}{}^i$  fornisce le componenti covarianti del gradiente del suo logaritmo. Ad esso può darsi, contraendo la (5), l'altra espressione

$$\sigma_{/r} = \frac{1}{2} A^{ih} a_{ih|r}.$$

(1) Vedi ad esempio, A. S. EDDINGTON, *The Mathematical Theory of Relativity*. Cap. VII, Cambridge 1952; J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Cap. IV, Berlino 1924.

Mediante il tensore  $T_{rs}^i$  si può costruire un altro vettore, pur di contrarlo rispetto agli indici simmetrici; indicando questo vettore con  $\tau^i$  si ha, tenuto sempre conto della (5),

$$\tau^i = g^{rs} T_{rs}^i = A^{ih} \left( a_{hr}|^r - \frac{1}{2} a_r{}^r|_h \right).$$

In questa,  $a_{hr}|^r$  rappresenta la divergenza del tensore  $a_{ij}$  ed  $a_r{}^r|_h$  il gradiente del suo invariante primo.

6. Sia ora ( $c$ ) una curva su  $\Sigma$  di equazione differenziale

$$\frac{d^2 y^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ rs \end{matrix} \right\} \lambda^r \lambda^s = \gamma v^i$$

che scriveremo anche

$$(7) \quad d^2 y^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ rs \end{matrix} \right\} dy^r dy^s = \gamma v^i g_{rs} dy^r dy^s;$$

$\gamma$  ne è la curvatura geodetica, e  $v^i$  sono le componenti controvarianti della sua normale superficiale  $\mathbf{n}$ , diretta in modo che la rotazione che porta  $\mathbf{t}$  su  $\mathbf{n}$  sia positiva.

Analogamente, nella corrispondenza considerata, l'equazione differenziale della trasformata ( $\bar{c}$ ) su  $\bar{\Sigma}$  sarà

$$(8) \quad d^2 y^i + \left( \left\{ \begin{matrix} i \\ rs \end{matrix} \right\} + T_{rs}^i \right) dy^r dy^s = \bar{\gamma} \bar{v}^i a_{rs} dy^r dy^s$$

in cui  $\bar{\gamma}$  è la curvatura tangenziale della trasformata, e  $\bar{v}^i$  sono le componenti controvarianti della sua normale superficiale, orientata come sopra:

$$a_{rs} \bar{v}^r \bar{v}^s = 1 \quad ; \quad a_{rs} \bar{v}^r dy^s = 0.$$

Confrontando le (7) ed (8) si ha

$$(T_{rs}^i - \bar{\gamma} \bar{v}^i a_{rs} + \gamma v^i g_{rs}) dy^r dy^s = 0$$

che può anche scriversi, dividendo per  $ds^2$ , e ricordando la (1) e la (3)

$$(9) \quad \bar{\gamma} \bar{v}^i = \frac{1}{m_t^2} (\gamma v^i + T_{rs}^i \lambda^r \lambda^s)$$

ove  $m_t$  è il modulo di deformazione nella direzione della tangente alla curva.

Indicando con  $\varepsilon_{ij} = \sqrt{G} e_{ij}$  ( $e_{11} = e_{22} = 0$ ;  $e_{12} = -e_{21} = 1$ ) il tensore di Ricci per la  $\Sigma$ , con  $\bar{\varepsilon}_{ij} = \sqrt{\bar{A}} e_{ij}$  l'analogo per  $\bar{\Sigma}$ , segue

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \sqrt{\frac{\bar{A}}{G}} \varepsilon_{ij} = S \varepsilon_{ij};$$

le componenti covarianti  $\bar{v}_i$  della normale superficiale a ( $\bar{c}$ ) risultano allora date da

$$\bar{v}_i = \varepsilon_{ji} \frac{dy^j}{ds} = \frac{S}{m_t} \varepsilon_{ji} \lambda^j = \frac{S}{m_t} v_i.$$

Moltiplicando la (9) per  $\bar{v}^i$  e contraendo risulta

$$(10) \quad \bar{\gamma} = \frac{S}{m_i^3} (\gamma + \varepsilon_{ji} T_{rs}^i \lambda^r \lambda^s \lambda^j) = \frac{S}{m_i^3} \gamma + \bar{\varepsilon}_{ji} T_{rs}^i \bar{\lambda}^r \bar{\lambda}^s \bar{\lambda}^j,$$

espressione questa che fornisce la curvatura tangenziale della trasformata, e risolve la questione posta in principio.

7. Chiameremo ancora *alterazione della curvatura tangenziale* il secondo termine della (10); questo rappresenta anche ovviamente la curvatura tangenziale della trasformata della geodetica tangente a (c); ad esso può darsi una delle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} & \frac{S}{m_i^3} \varepsilon_{ji} T_{rs}^i \lambda^r \lambda^s \lambda^j = \bar{\varepsilon}_{ji} T_{rs}^i \bar{\lambda}^r \bar{\lambda}^s \bar{\lambda}^j = \\ & = \frac{\sqrt{A}}{m_i^3} (T_{rs}^2 \lambda^r - T_{rs}^1 \lambda^s) \lambda^r \lambda^s = \sqrt{A} (T_{rs}^2 \bar{\lambda}^r - T_{rs}^1 \bar{\lambda}^s) \bar{\lambda}^r \bar{\lambda}^s. \end{aligned}$$

Indichiamo con  $\gamma_{rsj}$  la parte simmetrica del tensore  $T_{rs}^i \varepsilon_{ji}$ :

$$\gamma_{rsj} = T_{(rs}^i \varepsilon_{ji)};$$

l'alterazione della curvatura tangenziale dipende soltanto da questo tensore, che potrà dirsi pertanto tensore di curvatura relativo alla rappresentazione considerata. Le sue componenti sono date, come subito si verifica, da

$$\begin{aligned} \gamma_{111} &= \sqrt{G} T_{11}^2, & \gamma_{112} &= \gamma_{121} = \gamma_{211} = -\frac{1}{3} \sqrt{G} (T_{11}^1 - 2 T_{11}^2) \\ \gamma_{222} &= -\sqrt{G} T_{22}^1, & \gamma_{122} &= \gamma_{212} = \gamma_{221} = \frac{1}{3} \sqrt{G} (T_{22}^2 - 2 T_{12}^1). \end{aligned}$$

8. Come casi particolari, consideriamo separatamente quelli delle rappresentazioni geodetiche, equivalenti e conformi.

Le *rappresentazioni geodetiche* sono caratterizzate dall'annullarsi identico del tensore di curvatura tangenziale; ed è ben noto che in tal caso il tensore  $T_{rs}^i$  può esprimersi mediante un solo vettore  $p_r$ :

$$(11) \quad T_{rs}^i = p_r \delta_s^i + p_s \delta_r^i.$$

Contraendo rispetto ad  $i$  ed  $s$  si ha

$$T_{ri}^i = 3 p_r$$

e per il vettore  $\tau^i$  si ottiene poi

$$\tau^i = 2 p^i.$$

Ricordando la (6) si ha

$$p_r = \frac{1}{3} \sigma_{|r} \quad ; \quad \tau^i = 2 \sigma^{i|};$$

onde la (11) si scriverà

$$T_{rs}^i = \frac{1}{3} (\delta_s^i \sigma_{|r} + \delta_r^i \sigma_{|s}).$$

Si osservi ancora che nelle rappresentazioni geodetiche, la curvatura tangenziale  $\bar{\gamma}$  della trasformata di una curva di curvatura  $\gamma$  è fornita dall'espressione

$$\bar{\gamma} = \frac{S}{m_i^3} \gamma.$$

Le *rappresentazioni equivalenti* sono caratterizzate da  $\sigma = \text{cost.}$ ,  $\sigma_{/r} = 0$ , e dunque

$$T_{ri}^i = 0;$$

per esse il tensore  $\gamma_{rsf}$  acquista la forma particolarmente semplice

$$\begin{aligned} \gamma_{111} &= \sqrt{G} T_{11}^2, & \gamma_{112} &= \gamma_{121} = \gamma_{211} = -\sqrt{G} T_{11}^1, \\ \gamma_{222} &= -\sqrt{G} T_{22}^1, & \gamma_{122} &= \gamma_{212} = \gamma_{221} = \sqrt{G} T_{22}^2. \end{aligned}$$

Le *rappresentazioni conformi* sono caratterizzate dalla relazione

$$a_{rs} = e^{2\mu} g_{rs}$$

fra i due tensori metrici fondamentali;  $\mu$  rappresenta ovviamente il logaritmo del modulo di deformazione lineare.

Com'è ben noto il tensore  $T_{rs}^i$  si scrive in tal caso

$$T_{rs}^i = \delta_r^i \mu_{/s} + \delta_s^i \mu_{/r} - g_{rs} \mu^{/i}$$

da cui subito

$$T_{ri}^i = \sigma_{/r} = 2 \mu_{/r} \quad ; \quad \tau^i = 0.$$

Per le rappresentazioni conformi, la (10) si scrive

$$\bar{\gamma} = e^{-\mu} (\gamma - \mu^{/i} v_i)$$

che esprime il ben noto teorema di Schols.

**Chimica.** — *Spettro ultrarosso dell'aldeide furilica* (\*). Nota di PAOLO MIRONE, presentata (\*\*) dal Socio G. B. BONINO.

Mentre lo spettro Raman dell'aldeide furilica è stato ripetutamente studiato da numerosi autori (<sup>1</sup>), la conoscenza dello spettro d'assorbimento ultrarosso della stessa sostanza è stata, almeno fino al 1952 meno approfondita. Solo la porzione di spettro tra 1800 e 1000  $\text{cm}^{-1}$  è stata riportata nella collezione di spettri di Barnes e coll. (<sup>2</sup>). Il presente lavoro è stato eseguito allo scopo di colmare, almeno nella zona fino a 15  $\mu$ , questa lacuna, e soprattutto di confrontare le manifestazioni spettroscopiche ultrarosse del

(\*) Lavoro eseguito presso il Centro studi di Chimica fisica del C.N.R. nell'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) Per i riferimenti bibliografici vedi il lavoro citato in (2).

(2) R. B. BARNES, R. C. GORE, U. LIDDEL e V. Z. WILLIAMS, *Infrared Spectroscopy*. Reinhold, New York, 1944, p. 79.



gruppo  $C=O$  nell'aldeide furilica con il singolare comportamento, messo in evidenza da Rolla e Chiorboli <sup>(3)</sup>, del doppietto Raman a  $1690-1670\text{ cm}^{-1}$  attribuito per l'appunto al gruppo carbonilico. Ho perciò esaminato lo spettro ultrarosso dell'aldeide furilica pura in tutta la zona tra  $2,8$  e  $15\text{ }\mu$ ,

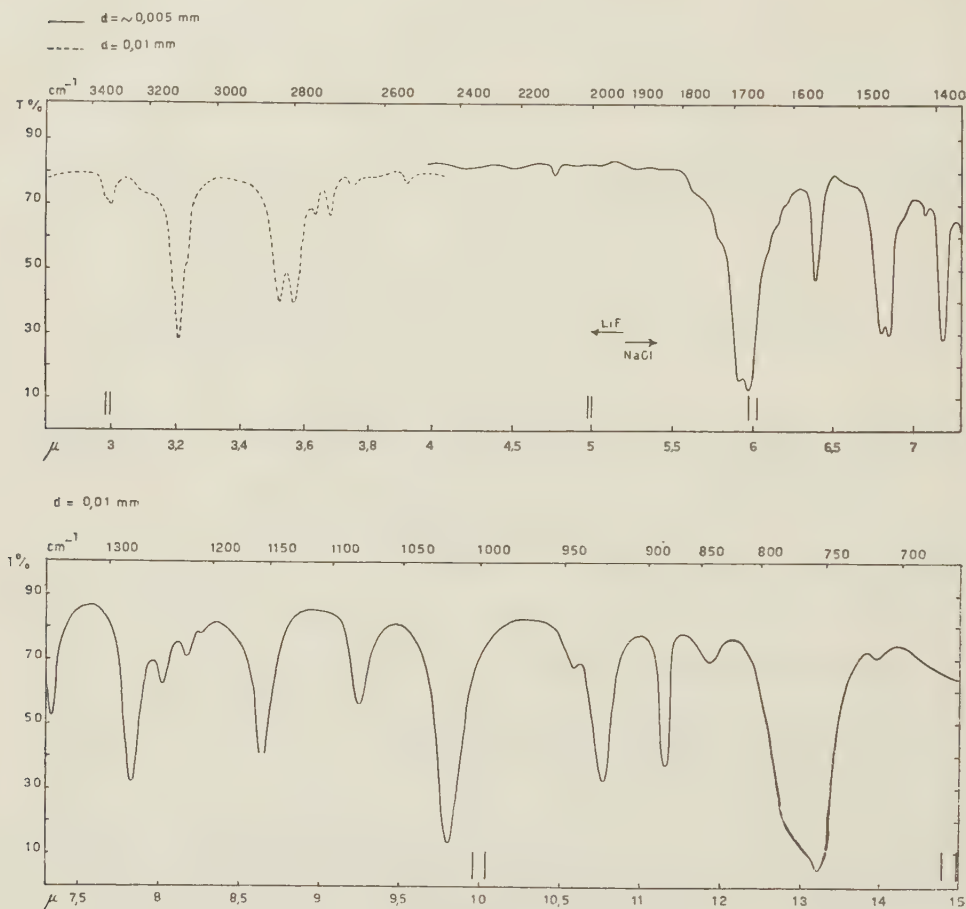


Fig. 1.

di soluzioni in tetracloruro di carbonio a due diverse concentrazioni nelle zone  $2,9-3,7$  e  $5,7-6,1\text{ }\mu$ , e infine di una soluzione in fenolo nella zona  $5,7-6,2\text{ }\mu$ . Le figg. 1, 2, 3, 4 danno le curve di trasmissione ottenute; in esse sono pure indicate l'ottica e la larghezza spettrale di fenditura usate nelle varie zone. La Tabella I riporta lunghezze d'onda e frequenze dei massimi d'assorbimento osservati nel furfurolo puro, insieme alle frequenze Raman osservate recentemente da Rolla e Chiorboli <sup>(4)</sup>, e alle frequenze u.r. ricavate approssimativamente dallo spettro pubblicato da Barnes e collaboratori.

La Tabella II presenta invece i dati relativi ai massimi di assorbimento del  $C=O$  nelle varie soluzioni.

(3) M. ROLLA e P. CHIORBOLI, « Gazz. Chim. It. », 79, 513 (1949).

(4) M. ROLLA e P. CHIORBOLI, « Boll. Sci. Fac. Chim. Ind. Bologna », 1949.

L'apparecchio impiegato per l'esperimento è uno spettrofotometro Beckman IR2 a registrazione diretta. Il furfurolo adoperato proveniva dalla collezione dell'Istituto ed era chimicamente puro. Immediatamente prima di ogni esperienza esso veniva distillato ripetutamente a pressione ridotta fino a che non si otteneva un prodotto perfettamente incolore.

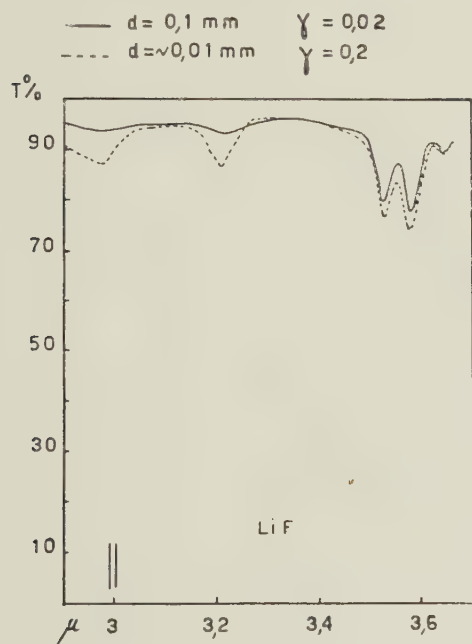


Fig. 2.

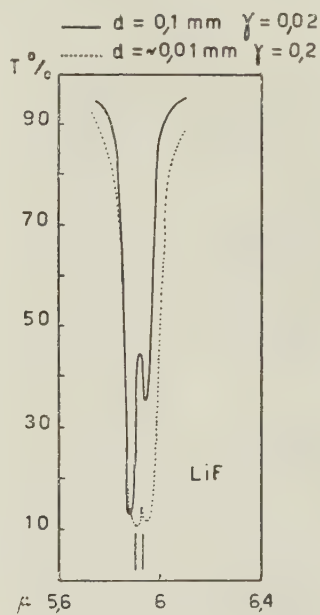


Fig. 3.

DISCUSSIONE. — Dall'esame della Tabella I risulta una concordanza veramente eccellente tra spettro ultrarosso e spettro Raman dell'aldeide furilica pura, specialmente nella zona tra 5 e 15  $\mu$ . Nell'insieme, solo alcune deboli frequenze ultrarosse non si ritrovano in Raman. In particolare si ritrovano nello spettro ultrarosso i due doppietti Raman a 1690–1669 e a 1476–1466  $\text{cm}^{-1}$ , il cui comportamento in soluzione è stato ampiamente studiato da Rolla e Chiorboli nei due lavori citati.

Il primo doppietto, riferito al gruppo  $\text{C}=\text{O}$ , si trova in ultrarosso a 1689–1674  $\text{cm}^{-1}$ ; l'intervallo tra le due componenti è quindi un po' minore che in Raman, ma tale differenza è dovuta probabilmente alla diversa risoluzione del doppietto da parte dei due metodi spettroscopici. Ciò si può rilevare dal confronto delle microfotometrie pubblicate da Rolla e Chiorboli con le mie curve di trasmissione: in queste ultime le componenti sono separate assai meglio. Anche in ultrarosso la componente a frequenza più bassa è più intensa dell'altra, però il rapporto delle intensità è minore che in Raman<sup>(5)</sup>.

(5) In ultrarosso si osserva anche, a 3339  $\text{cm}^{-1}$ , una debole banda, che, considerandone la frequenza e la forma si può quasi certamente assegnare alla 1<sup>a</sup> armonica della vibrazione  $\text{C}=\text{O}$ .

TABELLA I.  
*Furfurolo puro.*

Spettro ultrarosso			Spettro u.r. (2)	Spettro Raman (4)
$\lambda(\mu)$	$\nu$ (cm <sup>-1</sup> )	I	$\bar{\nu}$ (cm <sup>-1</sup> )	$\bar{\nu}$ (cm <sup>-1</sup> )
2,995	3339	1		—
—	—			3148 (4)
3,193	3132	5		3124 (2)
3,511	2848	3		2860 (1)
3,556	2812	3		2815 (1)
3,627	2757	1/2		—
3,679	2718	1		—
3,744	2671	0		—
3,926	2547	0		—
4,77	2096	1/2		—
5,92	1689	7	1687 (10)	1690 (7)
5,97	1674	8		1669 (10)
6,38	1567	4	1565 (8)	1565 (3)
6,80	1471	6	1472 (10)	1476 (10)
6,84	1462	6		1466 (10)
7,07	1414	1/2		1438 (2)
7,18	1393	6	1398 (9)	1392 (8)
7,32	1366	4	1372 (7)	1367 (9)
7,82	1279	6	1280 (8)	1273 (2)
8,03	1245	2 1/2	1247 (6)	—
8,17	1224	1 1/2	1220 (4)	1220 (1)
8,27	1209	1		1204 (2)
8,63	1159	5	1155 (8)	1157 (3)
9,24	1082	3	1073 (6)	1078 (3)
9,79	1021	8		1019 (4)
10,57	946	1		949 (3)
10,75	930	6		929 (2)
11,32	883	5		886 (1)
11,86	843	1		—
13,01	769	8		773 (2)
13,24	755	9		753 (1)
13,95	717	1/2		—
				630 (1)
				595 (1)
				502 (3)
				296 (1)
				219 (1)
				162 (4)

Per controllare se le analogie tra spettro Raman e spettro ultrarosso si conservano anche in soluzione, ho studiato l'assorbimento del gruppo  $C=O$  dell'aldeide furilica in tetracloruro di carbonio e in fenolo. Dall'esame della Tabella II risulta ancora una piena concordanza tra i risultati dei due metodi spettroscopici. In particolare, si osserva anche in ultrarosso che, aumentando la diluizione del furfurolo in tetracloruro di carbonio, aumenta l'intensità della componente a più alta frequenza e diminuisce quella della componente a più bassa frequenza.

Il baricentro del secondo doppietto  $1476-1466\text{ cm}^{-1}$  si trova spostato in ultrarosso di circa  $5\text{ cm}^{-1}$  rispetto alla frequenza Raman; del resto, intervallo fra le componenti e rapporto delle intensità sono identici in ultrarosso e in Raman. Questo doppietto è dovuto quasi sicuramente a una oscillazione di valenza del nucleo furanico; infatti esso corrisponde a un massimo a  $1490\text{ cm}^{-1}$  nello spettro ultrarosso del furano vapore, massimo che è stato assegnato da Pickett appunto a una oscillazione simmetrica di valenza del nucleo <sup>(6)</sup>.

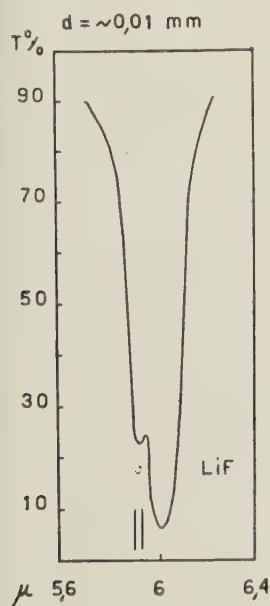


Fig. 4.

Rolla e Chiorboli <sup>(4)</sup> hanno trovato che in soluzione il doppietto a  $1476-1466\text{ cm}^{-1}$  si comporta in maniera opposta a quello a  $1690-1669\text{ cm}^{-1}$ ; così, per esempio, in tetracloruro di carbonio la componente a più alta frequenza diventa più debole al crescere della diluizione, e quella a più bassa frequenza diventa più intensa. L'ottica in fluoruro di litio non essendo utilizzabile in questa zona spettrale, non ho osservato quale sia il comportamento spettroscopico u.r. di questo doppietto in soluzione.

Nella zona intorno a  $3\text{ μ}$  lo spettro ultrarosso presenta una interessante caratteristica, che, per quanto sembra, non è stata notata in Raman. Il massimo a  $3132\text{ cm}^{-1}$ , piuttosto intenso nel composto puro, diminuisce assai di intensità in soluzione, e al crescere della diluizione tende a scomparire del tutto (fig. 2). Sembrerebbe quasi che esso sia dovuto a qualche sorta di legame a idrogeno, ma tale ipotesi non regge per due ragioni. In primo luogo, le bande dovute a legami a idrogeno hanno sempre una forma piuttosto larga mentre il massimo in questione è estremamente netto, e presenta inoltre sui suoi fianchi due piccoli flessi, indicanti quasi sicuramente una struttura complessa. In secondo luogo quando, al crescere della diluizione, scompare una banda dovuta a un legame a idrogeno, si osserva sempre la comparsa di un netto massimo a frequenza più alta. Ciò non si verifica nel nostro caso. Il massimo in questione sembra riferibile, per la sua frequenza e la sua forma, alle oscillazioni di valenza dei tre gruppi CH del nucleo furanico, ma in tale ipotesi il suo comportamento in soluzione appare del tutto inspiegabile.

(6) L. W. PICKETT, «J. Chem. Phys.», 10, 660 (1942).



TABELLA II.

*Furfurolo in soluzione.*

Solvente	Spettro ultrarosso			Spettro Raman (3)	
	$\lambda(\mu)$	$\nu$ (cm <sup>-1</sup> )	I	$\bar{\nu}$ (cm <sup>-1</sup> )	I
CCl <sub>4</sub> $\gamma = 0,2$ . . . .	5,89	1698	9	1691	6
	5,94	1683	9	1670	6
CCl <sub>4</sub> $\gamma = 0,02$ . . . .	5,88	1701	9	—	—
	5,94	1683	6	—	—
Fenolo $\gamma = 0,2$ . . . .	5,91	1692	5	1690	2
	6,01	1664	9	1666	8

( $\gamma$  = frazione molecolare)

TABELLA III.

<i>Furfurolo</i> $\bar{\nu}$ (cm <sup>-1</sup> )	<i>Furano</i> $\bar{\nu}$ (cm <sup>-1</sup> )
1567	1580 <i>b</i>
1471-1462	1490 <i>b</i>
1391	1387 <i>b</i>
[1367] <i>a</i>	[1357] <i>c</i>
[1273] <i>a</i>	[1279] <i>c</i>
1245	1264 <i>b</i>
1159	1189 <i>b</i>
1082	1073 <i>b</i>
1021	999 <i>b</i>
883	872 <i>b</i>
843	[844] <i>c</i>
769	763 <i>b</i>
755	725 <i>b</i>
[630] <i>a</i>	624 <i>b</i>
[595] <i>a</i>	584 <i>b</i>

[ ] = frequenza Raman.

*a* Nota (4).*b* Nota (5).*c* G. B. BONINO e R. MANZONI ANSIDEI, « R. Acc. Lincei », 24, 207 (1936).

Nella zona al di là di  $6\ \mu$  si nota che un considerevole numero di frequenze del furfurolo coincide con frequenze del furano; anzi si può dire che tutte le frequenze del furano si ritrovano, più o meno spostate, negli spettri Raman e u.r. del furfurolo. Raccolgo tali frequenze coincidenti nella precedente Tabella III.

Ho intenzione di estendere queste misure a soluzioni di furfurolo in solventi diversi, allo scopo soprattutto di studiare il comportamento del doppietto del  $C=O$  e della banda a  $3132\text{ cm}^{-1}$ .

Desidero ringraziare vivamente il prof. G. B. Bonino per i consigli e per le utili discussioni avute sull'argomento di questo lavoro.

**Chimica.** — *Contributo alla conoscenza dei complessi dell'argento mono e bivalente con la fenantrolina*<sup>(\*)</sup>. Nota di EOLO SCROCCO e MARIO RAGAZZINI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. B. BONINO.

In alcune Note precedenti<sup>(1)</sup> avevamo riferito sui risultati che si ottengono dalle misure del potenziale di ossido riduzione del sistema  $Ag^{++} - Ag^+$  in complesso con il dipiridile.

Si era notato come la differenza di energia libera, tra la forma bivalente e monovalente dell'argento, diminuisca di 0,546 v. e. quando questo, invece di trovarsi in soluzione allo stato ionico, si trovi sotto forma di complesso.

La maggior parte di questa diminuzione è presumibilmente da imputarsi ad una minore instabilità termodinamica dello stato bivalente nella forma di complesso rispetto alla forma ionica.

Con la presente Nota è nostro desiderio portare un nuovo contributo sperimentale al problema, e pertanto riferiamo il risultato di alcune misure del potenziale di ossido riduzione del sistema  $Ag^{++} - Ag^+$  in complesso con la fenantrolina.

Come è ben noto i due ioni  $Ag^+$  e  $Ag^{++}$  possiedono la struttura elettronica:



e pertanto, delle due forme, quella bivalente possiede un numero dispari di elettroni ed è paramagnetica. Inoltre, per quanto riguarda la possibilità di formazione di legami covalenti in complessi con molecole aventi gruppi « donatori », per l'argento monovalente, essendo occupati tutti i livelli  $4d$ , sono

(\*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi di Chimica fisica del C.N.R. presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

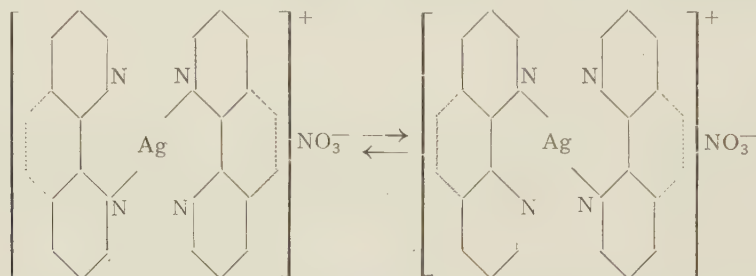
(\*\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.

(1) E. SCROCCO, G. MARMANI, P. MIRONE, « Boll. Scient. Fac. Chim. Ind. », Bologna (1950); E. SCROCCO, G. MARMANI, in corso di stampa (1954).

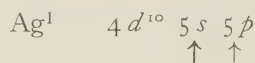
sfruttabili solo le autofunzioni dei livelli  $5s$  e  $5p$ ; mentre per l'argento bivalente, oltre alle autofunzioni  $5s$  e  $5p$ , è adoperabile una delle autofunzioni  $4d$ .

Per i due complessi la situazione è del tutto simile a quella che si verifica per il rame, che, nella forma  $\text{Cu}^+$ , può formare due legami covalenti con ibridizzazione  $sp$  (lineare) e, nella forma bivalente  $\text{Cu}^{++}$ , può formare quattro legami covalenti con ibridizzazione tetragonale piana  $dsp^2$  (Pauling, Chemical Bond, pp. 104, 105, 106).

Nel nostro caso, dunque, si ha la seguente situazione per l' $\text{Ag}^+$  in complesso con il dipiridile (o rispettivamente con la fenentrolina):

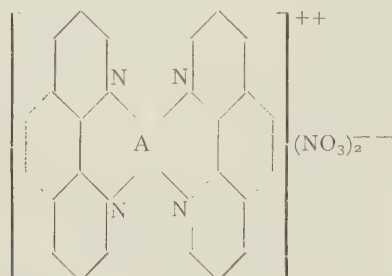


in cui l' $\text{Ag}^+$   $4d^{10}$ , durante la formazione del complesso, acquista la configurazione bivalente:

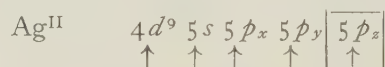


scambiando quattro elettroni con due dei gruppi «donatori» delle due molecole che lo circondano.

Per l' $\text{Ag}^{++}$  si ha invece la situazione seguente:



in cui l' $\text{Ag}^{++}$   $4d^9$  durante la formazione del complesso acquista la configurazione  $dsp^2$  (tetravalente) con in più un elettrone  $p_z$  spaiato:



In tale configurazione scambia elettroni con tutti e quattro i gruppi «donatori» e forma quattro legami covalenti piani; inoltre l'elettrone spaiato  $p_z$  dell' $\text{Ag}^{II}$  conferisce al complesso carattere paramagnetico e contribuisce a stabilizzare ulteriormente la struttura della forma bivalente per mezzo della sua interazione con gli altri elettroni  $p_z$  dei nuclei aromatici del complesso.

Per controllare se realmente sia valida l'ipotesi di un effetto stabilizzante dovuto all'interazione dell'elettrone  $p_z$  dell' $\text{Ag}^{\text{II}}$  con gli altri dello stesso tipo degli anelli aromatici, abbiamo pensato di studiare il potenziale di ossido riduzione dei complessi con la fenantrolina. In questo caso, infatti, il numero di elettroni con cui quello dell' $\text{Ag}^{\text{II}}$  ha la possibilità di interagire è aumentato di quattro rispetto al dipiridile. Pertanto ci si aspetterebbe una ulteriore diminuzione del potenziale di ossido riduzione.

Dalle misure da noi fatte si trova effettivamente una diminuzione del potenziale di circa 65 millivolt rispetto ai complessi del dipiridile, a conferma dell'ipotesi predetta.

Il risultato sperimentale ora ricordato è in accordo anche con le seguenti considerazioni.

Se ci riferiamo agli schemi (I) e (II), relativi rispettivamente allo stato monovalente del complesso e a quello bivalente, possiamo notare che la variazione di energia libera, nel passaggio da una forma all'altra, è decomponibile in due termini nettamente separabili. Il primo, che chiameremo  $\Delta F_\sigma$ , rappresenta la variazione di energia libera corrispondente al sistema di elettroni che concorrono alla formazione dei legami  $\sigma$ .

Questo termine è da considerarsi in buona approssimazione identico sia nella ossido riduzione del complesso con il dipiridile che con la fenantrolina.

Il secondo termine, che indicheremo con  $\Delta F_\pi$ , rappresenta il contributo degli elettroni  $\pi$  alla variazione di energia libera; questo termine è certamente da considerare diverso nei due complessi con il dipiridile o con la fenantrolina.

Possiamo dunque scrivere:

per il complesso con il dipiridile  $\Delta F_1 = \Delta F_\sigma + \Delta F'_\pi$ ;

per il complesso con la fenantrolina  $\Delta F_2 = \Delta F_\sigma + \Delta F''_\pi$  e pertanto la differenza dei due potenziali di ossido riduzione per i due complessi si ridurrà a:

$$\Delta (\Delta F_1 - \Delta F_2) = \Delta (\Delta F'_\pi - \Delta F''_\pi) = -ZF(E_1^\circ - E_2^\circ)$$

cioè

$$E_2^\circ - E_1^\circ = \Delta (\Delta F'_\pi - \Delta F''_\pi) / ZF$$

e quindi il calcolo della differenza dei potenziali di ossido riduzione dei due complessi è esclusivamente legato al computo (sia nell'argentifenantrolina, che nell'argentidipiridile) dell'energia di risonanza tra elettroni  $\pi$  degli anelli aromatici ed elettrone  $p_z$  dell' $\text{Ag}^{\text{II}}$  (2).

Con un calcolo di prima approssimazione relativo all'entità dell'energia di risonanza degli elettroni  $\pi$  nei due complessi, abbiamo trovato che la variazione  $E_1^\circ - E_2^\circ$  è dell'ordine di 35 millivolt, valore che, date le drastiche semplificazioni fatte, si presenta in discreto accordo, come ordine di grandezza, con quello trovato sperimentalmente e ci incoraggia a intraprendere un calcolo più preciso.

(2) Il termine entropico può essere considerato identico per i due complessi con il dipiridile e con la fenantrolina.



Ci proponiamo di poter fornire tra breve i risultati di questo computo dopo aver ultimata una discussione più particolareggiata delle strutture elettroniche  $\pi$  dei due complessi.

I complessi dell'argento bivalente da noi adoperati ci sono stati forniti gentilmente dal prof. G. A. Barbieri, che vivamente ringraziamo: quello con il dipiridile sotto forma di nitrato e quello con la fenantrolina sotto forma di persolfato. Quest'ultimo è stato da noi trasformato in nitrato con il metodo descritto da W. Hieber e F. Mühlbauer <sup>(3)</sup>.

Sarebbe stato nostro desiderio determinare il potenziale di ossido riduzione del complesso con la fenantrolina in modo analogo a quello usato per il complesso con il dipiridile, cioè facendo l'estrapolazione dei potenziali a forza ionica nulla.

Disgraziatamente il complesso con la fenantrolina è estremamente poco solubile ed instabile in soluzione acida molto diluita.

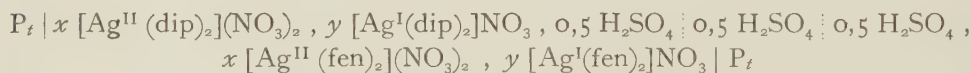
Poiché, però, a noi interessava un confronto con il corrispondente potenziale di ossido riduzione del complesso con il dipiridile, abbiamo eliminato questa difficoltà facendo le curve di titolazione con  $H_2O_2$  dei due complessi (in concentrazione 0,002 M.) sciolti in soluzione di  $H_2SO_4$  (0,5 M.) e alla temperatura di 25° C.

Abbiamo adoperato l' $H_2SO_4$  al posto dell'acido nitrico data la maggiore solubilità del complesso con la fenantrolina in questo acido.

Nei due casi l'elettrodo di riferimento era quello a calomelano.

La differenza tra i due potenziali così ottenuta è di 65 millivolt.

Abbiamo poi confermato per altra via questo risultato misurando direttamente la differenza dei potenziali di ossido riduzione nella seguente doppia cella:



nella quale per aggiunte successive di  $H_2O_2$  (della stessa acidità della soluzione da titolare) rendevamo uguali i rapporti  $x/y$  nelle due semicelle.

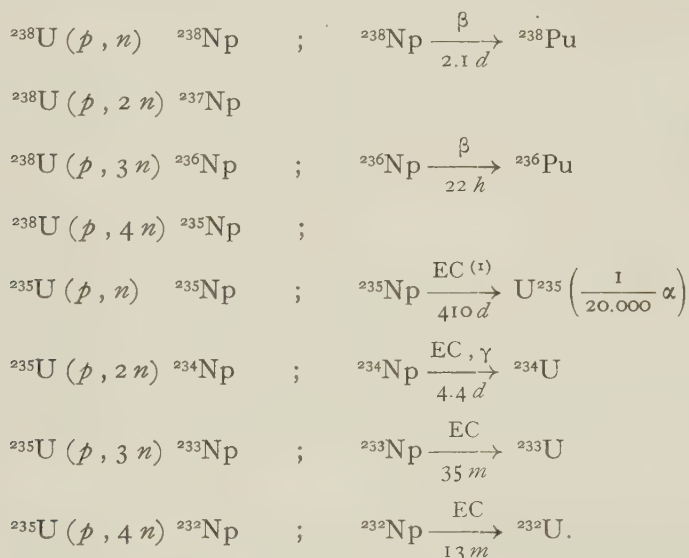
Con questo sistema abbiamo trovato fra i due complessi una differenza di potenziale di ossido riduzione di 65 millivolt, uguale cioè a quella che avevamo misurato con il sistema precedentemente descritto.

Desideriamo ringraziare vivamente il prof. G. B. Bonino, Direttore di questo Istituto, per l'ospitalità concessaci, per i consigli e l'incoraggiamento che ci ha dato nel corso della presente ricerca.

(3) « Bericte d. Ch. Gesell. », 1928, II, p. 2149.

**Chimica nucleare.** — *Separazione di isotopi di plutonio da uranio naturale bombardato con protoni*<sup>(\*)</sup>. Nota di MARIO ALBERTO ROLLIER, HELGE TYRÉN, ALESSANDRO MALVICINI e RENATO REPOSSI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. A. QUILICO.

1. INTRODUZIONE. — Per azione dei protoni, convenientemente accelerati, sulla miscela isotopica che costituisce l'uranio naturale, si possono ottenere (trascurando l'effetto sull' $^{234}\text{U}$ , presente solo nella percentuale del 0.0058 %) le seguenti reazioni nucleari:



I nuclidi finali indicati hanno le caratteristiche radioattive indicate nella tabella I.

Col sincro-ciclotrone di Uppsala, nel novembre 1952 <sup>(2)</sup>, si è bombardata una lamina di uranio metallico puro, del peso di g. 1.244 e di spessore 0.4 mm., con protoni da 40 MeV, per due ore consecutive. La lamina estratta dal ciclotrone si è rivelata all'inizio fortemente radioattiva tanto che, 24 ore

(\*) Lavoro eseguito, con la sovvenzione del Consiglio Nazionale delle Ricerche, parte (il bombardamento con protoni) da due degli Autori (M. A. Rollier e H. Tyrén) nel Gustaf Werner Institute for Nuclear Chemistry in Uppsala (Svezia) e per il resto, dai tre autori italiani a Milano, nei laboratori C.I.S.E. e presso l'Istituto di Chimica Generale del Politecnico.

(\*\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.

(1) Uso la notazione EC (elettrone orbitale di cattura) anziché la K per cattura K) perché il suo uso si è generalizzato nelle più recenti tavole degli isotopi.

(2) Si desidera qui porgere al dott. Helge Tyrén del Gustaf Werner Institute for Nuclear Chemistry il più vivo ringraziamento per l'aiuto e la collaborazione nell'effettuare il bombardamento nel sincro-ciclotrone.

dopo la fine del bombardamento, dava una radiazione dell'intensità di 10 MR/H a 40 cm. di distanza, misurata con un rivelatore portatile con tubo di Geiger in sonda. Portata in Italia la lamina in schermatura di piombo, a 54 giorni dalla fine del bombardamento la radioattività era scesa a 1 MR/H misurato sempre con un rivelatore portatile a 25 cm. di distanza e a 88 giorni la radioattività era ridotta a 0.6 MR/H nelle stesse condizioni.

TABELLA I.

Nuclide	Tipo di decadimento	Energia delle radiazioni in MeV	Semiperiodo
$^{232}\text{U}$	$\alpha$	5.31	70 a
$^{233}\text{U}$	$\alpha$	4.82	$1.62 \cdot 10^5$ a
$^{234}\text{U}$	$\alpha$	4.76	$2.5 \cdot 10^5$ a
$^{235}\text{Np}$	EC, $\alpha$ <sup>(1)</sup>	(5.06 $\alpha$ )	410 d
$^{237}\text{Np}$	$\alpha$	4.77	$2.2 \cdot 10^6$ a
$^{236}\text{Pu}$	$\alpha$	5.75	2.7 a
$^{238}\text{Pu}$	$\alpha$	5.49 (76 %) 5.45 (24 %)	90 a

Il rapporto L/K dei raggi X emessi è  $> 9$ . (JAMES, GHIORSO, ORTH, « Phys. Rev. », 85, 369 (1952).

La lamina bombardata venne lasciata in riposo 320 giorni. In tale intervallo di tempo si sono ridotte a valori praticamente trascurabili tutte le radiazioni a vita breve. Data l'energia dei protoni incidenti non si è ritenuto, seguendo le considerazioni svolte da altri autori <sup>(3)</sup>, di prendere in esame reazioni nucleari non comprese fra i tipi da  $(p, n)$  a  $(p, 4n)$ . Uno sguardo ai semiperiodi dei possibili nuclidi prodotti permette subito di escludere, tenendo presente la durata del bombardamento, la possibilità di rivelare, nell'uranio bombardato con protoni, quelli a vita più lunga e cioè  $^{233}\text{U}$ ,  $^{234}\text{U}$ ,  $^{237}\text{Np}$ , perché la frazione di microcurie prodotta risulta inferiore ai limiti di sensibilità degli apparecchi di misura. Sottoponendo a trattamenti chimici adeguati la lamina di uranio bombardato con protoni da 40 MeV, a circa 320 giorni dal bombardamento, si può quindi da essa separare, in quanto se ne siano formati, i nuclidi di plutonio 238, plutonio 236 e, in minor misura, perché proveniente da  $^{235}\text{U}$  (e, forse, dalla reazione  $^{238}\text{U} (p, 4n) ^{235}\text{Np}$  con resa ancora ragionevole) anche il nettunio 235. La separazione dei primi due nuclidi è l'oggetto della presente ricerca. Viene descritto anche il metodo di separazione del nettunio.

(3) STOVER, « Phys. Rev. », 80, 99 (1950).

2. SEPARAZIONE DI NETTUNIO E PLUTONIO DALL'URANIO BOMBARDATO CON PROTONI DA 40 MeV. — I nuclidi  $^{235}\text{Np}$ ,  $^{236}\text{Pu}$  e  $^{238}\text{Pu}$  sono ben noti <sup>(4)</sup> ma poco si può dire dei rendimenti relativi della loro produzione da uranio mediante reazioni nucleari ( $p, xn$ ) perché sono stati generalmente ottenuti da reazioni ( $d, xn$ ) o ( $\alpha, xn$ ). La separazione è quindi avvenuta senza sapere neppure approssimativamente quanto dell'uno o dell'altro poteva essere contenuto nella lamina di uranio bombardato con protoni.

Per dare un'idea delle attività che sono in gioco possiamo riportare i seguenti dati. La superficie della lamina che ha ricevuto il bombardamento ha una attività beta-gamma molto superiore alla superficie opposta: misurate in un montaggio standard per misure di attività beta-gamma con tubo di Geiger ad una distanza campione-finestra di 55 mm., l'attività della superficie bombardata è di circa 37.000 c/m (colpi o impulsi al minuto), quella della superficie opposta circa 5.000–6.000 c/m. Si è divisa la lamina in tre e si è scelta, per la prima separazione del plutonio, una porzione del peso di 334 mg. L'attività alfa di questa porzione di lamina, misurata con un rivelatore a scintillazione e tubo fotomoltiplicatore e una geometria di rendimento di ca. 10 %, dava 400 c/m dalla superficie bombardata e circa 190 c/m dalla superficie opposta.

L'attività beta-gamma di questo campione era di circa 19.000 c/m dalla superficie bombardata e ca. 3.000 da quella opposta, nelle condizioni descritte.

Il procedimento chimico prescelto per la separazione del Pu è quello classico di Cunningham della precipitazione con lantanio come *carrier* <sup>(5)</sup> e le operazioni eseguite sul campione di 334 mg. di U naturale bombardato con protoni, si sono succedute nell'ordine che si riporta.

MATERIALE DI PARTENZA. — Il campione viene disciolto in 4 cc. HCl conc. e ripreso, portando due volte a secco, con  $\text{HNO}_3$  conc. Il nitrato di uranile secco così ottenuto si scioglie in 10 cc. di una soluzione contenente 700 g/l  $\text{NH}_4\text{NO}_3 + 10\%$   $\text{HNO}_3$ . La soluzione viene introdotta in un piccolo estrattore da 40 cc. Si estrae per 4 ore con 50 cc. di etere etilico e nel pallone da cui distilla l'etere si immettono 25 cc. d'acqua. Alla fine dell'estrazione si hanno:

#### *Frazione 1.*

La soluzione acquosa residua di nitrato ammonico e acido nitrico contenente anche Np, Pu e prodotti di fissione. A questa si aggiungono 2 cc. di soluzione acquosa di  $\text{La}(\text{NO}_3)_3$  contenenti 20 mg. di lantanio, si porta a 10 cc. e si rende 2 M in  $\text{HNO}_3$ , si trasferisce in un cono da centrifuga in celluloidi

(4) HOLLANDER, PERLMAN, SEABORG, *Table of Isotopes*. « Rev.s Modern Physics », 25, 469, aprile 1953.

(5) B. B. CUNNINGHAM and L. B. WERNER, *The first isolation of a synthetic element*  $^{239}\text{Pu}$  in: SEABORG, *The Transuranium Elements*, vol. I NNES IV, p. 51. Mc Graw Hill 1949.



(lusteroid) e si rende 4M in HF: precipitano i fluoruri di lantanio, nettunio, plutonio ed eventuali prodotti di fissione, si centrifuga.

#### *Frazione 2.*

L'acqua che, in contatto con l'etere dell'estrattore, ha ripreso in soluzione il nitrato d'uranile. Si separa la fase acquosa, si allontana l'etere ancora disciolto e, portato a volume in matraccio tarato da 25 cc., si preleva un volume noto, si svapora l'acqua e si calcina su disco di Pt il nitrato per determinare l'uranio come  $U_3O_8$  e se ne preleva un campione per misurarne l'attività.

#### *Frazione 3.*

I fluoruri lavati con acqua ed essiccati sotto lampada a raggi infrarossi si sciolgono con  $HNO_3$  e si trasformano con  $H_2SO_4$  conc. nei rispettivi solfati. Questi si sciolgono in  $HNO_3$  2M e alla soluzione si aggiunge g. 0.1 di persolfato  $K_2S_2O_8$  e cc. 0.1 di  $AgNO_3$  0,5 M. Colorazione bruno scura dell'Ag bivalente. Si lascia in riposo 10 minuti per ossidare il Pu allo stato solubile nei fluoruri ( $Pu^{+6}$ ). Si rende poi la soluzione 4M in HF portandola a 5.8 cc. si centrifuga.

#### *Frazione 4.*

La soluzione acquosa sovrastante i fluori si scarta, essa contiene eventuali prodotti di fissione.

#### *Frazione 5.*

La soluzione bruna contenente eccesso di  $K_2S_2O_8 + 4M \cdot HF + 2M \cdot HNO_3 + Ag^{++} + Pu + Np$  allo stato fluoro-solubile si trasporta in provetta di materia plastica e si tratta con due gocce di soluzione al 6% di  $SO_2$  con che si scolora, vi si aggiunge 1/2 cc. di soluzione in  $HNO_3$  dil. di 2.4 mg  $La_2O_3$ , si agita, si lascia 1/2 ora in riposo, si centrifuga.

#### *Frazione 6.*

Precipitato di  $LaF_3$  si porta a secco, se ne misura l'attività beta-gamma e si scarta. L'attività di questa frazione rappresenta quella dei prodotti di fissione capaci di essere trascinati dal fluoruro di lantanio. Essa, misurata nelle stesse condizioni del campione originale, era di circa 4.500 c/m.

#### *Frazione 7.*

1 mg. di La elemento precipitato come  $LaF_3 + Pu$  e  $Np$  fluoruri si lava, si essicca e si misura per l'attività alfa e beta-gamma. Si trasforma in solfato portando a secco con  $H_2SO_4$  18M, si scioglie in cc. 1.5 di  $H_2SO_4$  1.5M. Si

aggiunge 25 mg. di  $\text{KBrO}_3$ , si lascia in riposo mezz'ora poi si rende la soluzione 4 M in HF e si lascia riposare 10 minuti. La soluzione contiene ora l'eventuale nettunio presente allo stato fluorosolubile. Si centrifuga.

#### Frazione 8.

La soluzione sovrastante i fluoruri si scarta.

#### Frazione 9.

Il precipitato di fluoruri di lantanio e plutonio si lava con acqua e si monta su dischi di Pt per misurare l'attività alfa degli isotopi di plutonio in esso contenuti. L'attività totale di questo preparato, misurata al dosimetro

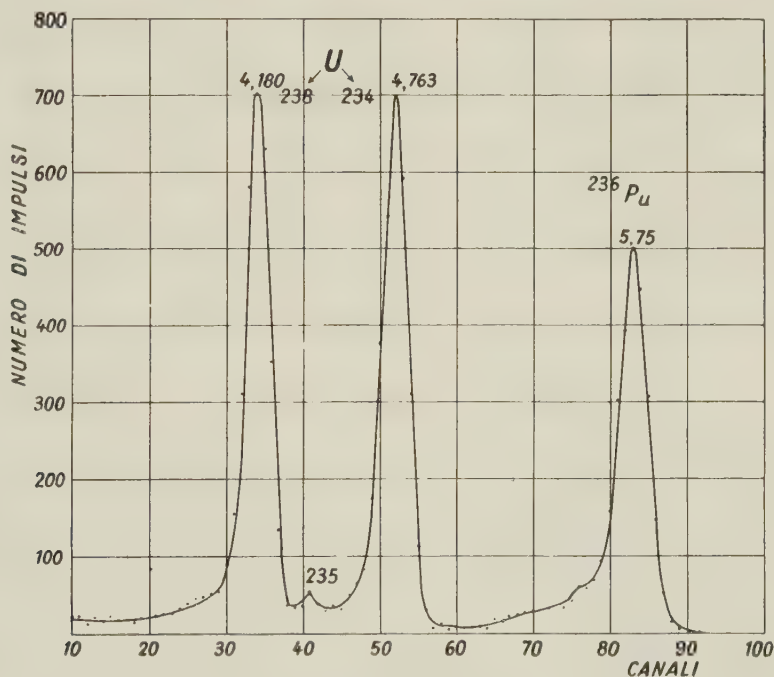


Fig. 1. - Spettro di energia delle particelle  $\alpha$  dell'Uranio e del preparato contenente Plutonio 236.

alfa a scintillazione munito di tubo fotomoltiplicatore, è di circa 6.500 c/m con geometria del 35 % circa. Da questo preparato si sono prelevati i campioni, assai più deboli, per la misura dell'energia delle particelle alfa emesse.

#### Frazione 10.

La soluzione contenente il nettunio si riduce con 1 cc. di soluzione al 6 % di  $\text{SO}_2$  — vi si aggiunge 1 mg. di La elemento sotto forma di nitrato. Precipita fluoruro di La e Np. Si centrifuga, si lava e si misura l'attività eventuale del nettunio. L'attività beta-gamma di questa frazione, pre-

sumibilmente dovuta a Np 235, è di circa 45 c/m con una geometria del montaggio di circa 24 %.

3. MISURA DEGLI SPETTRI DI ENERGIA DELLE PARTICELLE ALFA EMESSE DAI FLUORURI DI LANTANIO PORTATORI DI PLUTONIO. - Gli spettri di energia delle particelle alfa emesse dai preparati contenenti Pu sono stati fatti con

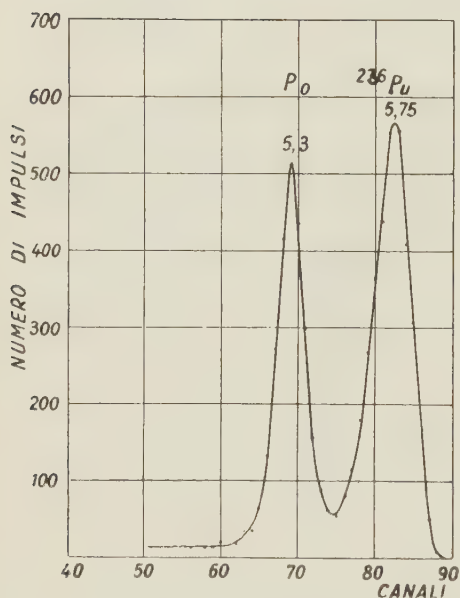


Fig. 2. - Spettro di energia delle particelle  $\alpha$  del Polonio e del preparato contenente Plutonio 236.

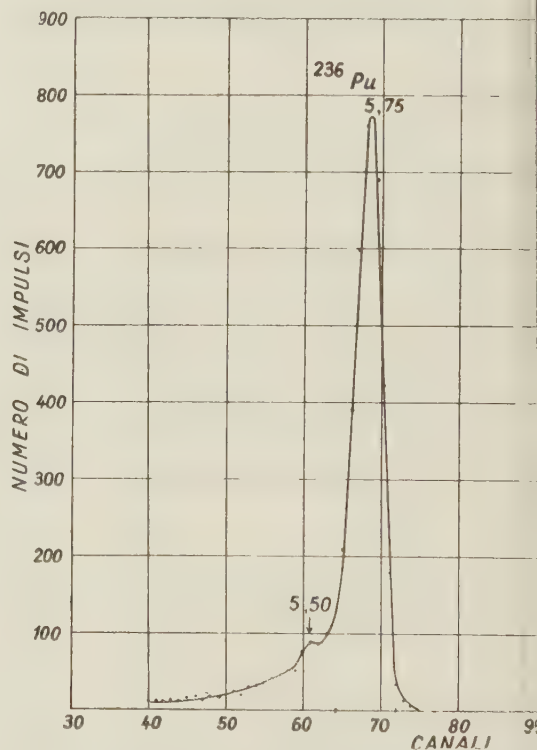


Fig. 3. - Spettro di energia delle particelle  $\alpha$  emesse dal preparato contenente Plutonio: evidente la presenza dell'isotopo 238 oltreché del 236.

una camera di ionizzazione a collezione di elettroni, munita di griglia <sup>(6)</sup>. Il riempimento è stato effettuato con una miscela di argo (98 %) e azoto (2 %) molto puri, alla pressione di 4 atmosfere. Le tensioni applicate al piatto porta-sorgente e alla griglia erano rispettivamente — 1200 V e — 800 V. Il sistema di amplificazione era costituito da un preamplificatore e un amplificatore mod. 100 collegati mediante una linea di riflessione per la formazione degli impulsi. Le ampiezze degli impulsi sono state analizzate con un analizzatore di impulsi a 99 canali <sup>(7)</sup>.

L'energia delle particelle alfa emesse dal preparato da analizzare è stata misurata servendoci come taratura di due campioni sottili di uranio e di polonio 210. Nelle figure 1 e 2 sono riportati gli spettri.

(6) U. FACCHINI e E. GATTI, «Nuovo Cimento», 7, 589 (1950).

(7) E. GATTI, «Nuovo Cimento», 7, 655 (1950).

Confrontando le energie corrispondenti ai massimi delle curve spettrali e assumendo i valori 4,18 MeV, 4,76 MeV per le energie delle particelle alfa dell'uranio e 5,3 per quelle del polonio si ricava in entrambi i casi il valore di 5,75 MeV per l'energia delle particelle alfa emesse dal preparato in esame. L'attività alfa è dunque da attribuirsi quasi totalmente al  $^{236}\text{Pu}$ .

Per accertarsi di eventuali altre deboli componenti radioattive alfa abbiamo rifatto molte volte lo spettro del Pu che riportiamo in figura 3 nella sua forma più accurata.

In tutti questi spettri si nota in corrispondenza di 5,5 MeV una piccola gobba che denota la presenza di  $^{238}\text{Pu}$ .

Il rapporto dell'intensità delle due radiazioni calcolato facendo il rapporto delle due aree dei picchi è inferiore a 0.025.

Tenendo conto dei semiperiodi del  $^{238}\text{Pu}$  e  $^{236}\text{Pu}$ , e del tempo trascorso (1,35 anni) dal bombardamento della lamina di uranio all'esame degli spettri alfa, si deduce che il numero dei nuclidi  $^{238}\text{Pu}$  formatosi nel bombardamento della lamina e provenienti dalla reazione  $^{238}\text{U} (p, n)$  è inferiore al 55 % circa di quelli di  $^{236}\text{Pu}$  provenienti dalla reazione  $^{238}\text{U} (p, 3n)$ .

L'evidenza di questo risultato con protoni di 40 MeV manifesta chiaramente la presenza della reazione  $(p, 3n)$  sul  $^{238}\text{U}$  mentre nel caso della reazione  $(p, n)$  non si può dare una valutazione precisa; si può solo dire che c'è una indicazione per la sua presenza.

La ricerca e l'eventuale misura dell'attività del  $^{235}\text{Np}$  sarà oggetto di un prossimo lavoro.

**Fisiologia.** — *Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili.* — III. *Azione della stricnina e della simpamina iniettate contemporaneamente, ma in sede diversa* (\*). Nota di AMALIA AMICI, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. AMANTEA.

Ricerche sperimentali precedenti<sup>(1)</sup> avevano messo in evidenza che alcune sostanze adrenalinosimili singolarmente associate a dosi letali di stricnina, ed iniettate contemporaneamente nella stessa sede a « *Mus musculus*, » non solo evitavano la morte degli animali così trattati, ma si rivelavano capaci di impedire anche la comparsa del tetano stricnico, o di ritardarla molto nei rari casi in cui essa si manifestava.

Altre sostanze, invece, alle prime vicinissime per struttura ed azione, si comportavano in maniera assolutamente opposta o quasi.

Essendosi dovuta scartare, in base all'insieme dei risultati ottenuti, la ipotesi che essi fossero dovuti al fattore vascolare, fu prospettata, tra

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Perugia.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) A. AMICI, *Sul comportamento di « Mus musculus » trattati con iniezione contemporanea di dosi letali di stricnina e varie sostanze adrenalinosimili.* In corso di stampa in « Rivista di Biologia ».



l'altro <sup>(2)</sup>, anche la possibilità che la spiegazione potesse essere trovata nello intervento di meccanismi nervosi aventi origine in sede più alta che non il midollo spinale.

Istituite ricerche in proposito <sup>(3)</sup>, anche la suaccennata possibilità fu dovuta escludere. Le rane spinali, infatti, di fronte alla iniezione associata e contemporanea di simpamina e dosi letali di stricnina, si comportarono esattamente come si erano comportati in precedenza i *Mus musculus* normali: non presentarono comparsa di manifestazioni stricniche, se non ne 10% dei casi e tutte sopravvissero all'esperimento.

Escluso dunque, pur con tutte le riserve accennate nella Nota precedente <sup>(3)</sup>, anche l'intervento di meccanismi nervosi di origine encefalica nell'impedire la comparsa delle manifestazioni stricniche per associazione dell'alcaloide con la simpamina, non restava - al fine di chiarire la questione e per mantenersi nell'ambito delle ipotesi di lavoro prospettate <sup>(2)</sup> - che orientarsi verso la terza possibilità: formazione, cioè, di prodotti di addizione tra la stricnina e la simpamina, *quando iniettate nelle condizioni sperimentali di cui sopra si è detto*.

È questo, relativo alle condizioni in cui l'iniezione è fatta, un punto, a nostro parere, assai importante. E diciamo francamente che proprio su di esso poggia la nostra ipotesi di lavoro.

Allo scopo di cominciare a dare ad essa l'eventuale conforto di una base sperimentale, anche se in via indiretta, si è voluto vedere, se, modificando le condizioni di introduzione della stricnina e della simpamina, si modificassero o meno i risultati.

E pertanto si è ritornati a preferire, quale animale da esperimento, il *Mus musculus*, come nelle prime ricerche.

Venticinque *Mus musculus*, tutti maschi giovani provenienti dallo stesso allevamento e in ottime condizioni generali, sono stati divisi in 5 gruppi, e così trattati:

Gruppo I: nitrato di stricnina;

Gruppo II: iniezione contemporanea della stricnina da un lato e della simpamina dall'altro;

Gruppo III: iniezione di stricnina 5' dopo quella di simpamina, e dal lato opposto;

Gruppo IV: iniezione di simpamina 5' dopo quella di stricnina, e dal lato opposto;

Gruppo V: aspirazione nella stessa siringa delle quantità necessarie di stricnina e di simpamina, ed iniezione immediata del tutto.

(2) A. AMICI, *Sugli effetti dell'iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinomimetiche*. - I. *Qualche rilievo a giustificazione di una ipotesi di lavoro*. « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XVI, fasc. 2, pp. 257-263 (1954).

(3) A. AMICI, *Ancora sugli effetti dell'iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinomimetiche*. - II. *Azione dell'associazione stricnina-simpamina sulla rana spinale*. « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XVI, fasc. 3, pp. 379-384 (1954).

TABELLA.

Gruppo	N. progr. animali	peso gr	Sostanze iniettate mg	Inizio tachipnea dopo minuti	Netta iperreflessività dopo minuti	Inizio fase convulsiva dopo minuti	Morte dopo minuti	Modalità del trattamento
I	1	20	Stricnina 0,04 . . . . .	2'	6'	8'30"	9'	Iniezione sottocutanea
	2	20	» 0,04 . . . . .	1'45"	5'30"	8'	8'30"	
	3	18	» 0,036 . . . . .	2'15"	5'30"	8'	8'20"	
	4	14	» 0,028 . . . . .	1'57"	6'	8'5"	8'42"	
	5	15	» 0,030 . . . . .	2'9"	5'40"	8'15"	8'32"	
MEDIE	—	—	—	2'	5'50"	8'10"	8'37"	
II	6	21	» 0,042 Simpamina 2,1 . . .	2'	4'10"	8'35"	12'45"	Iniezione sottocutanea contemporanea, della stricnina da un lato e della simpamina dall'altro.
	7	21	» 0,042 » 2,1 . . .	1'30"	3'40"	8'40"	12'50"	
	8	21	» 0,042 » 2,1 . . .	2'10"	4'10"	13'30"	19'30"	
	9	20	» 0,040 » 2 . . .	1'50"	3'50"	9'50"	14'4"	
	10	21	» 0,042 » 2,1 . . .	2'4"	4'10"	10'25"	16'	
MEDIE	—	—	—	1'57"	4'	10'15"	15'2"	
III	11	18	» 0,036 » 1,8 . . .	2'	4'	8'30"	15'	Iniezione sottocutanea di stricnina 5' dopo quella di simpamina, e dal lato opposto.
	12	14	» 0,028 » 1,4 . . .	2'10"	5'	7'20"	8'30"	
	13	14	» 0,028 » 1,4 . . .	1'45"	5'10"	9'	11'45"	
	14	21	» 0,042 » 2,1 . . .	1'54"	4'30"	8'13"	11'5"	
	15	19	» 0,038 » 1,9 . . .	1'58"	4'36"	8'21"	12'35"	
MEDIE	—	—	—	1'56"	4'33"	8'17"	11'45"	
IV	16	15	» 0,030 » 1,5 . . .	1'40"	6'	7'10"	8'	Iniezione sottocutanea di simpamina 5' dopo quella di stricnina, e dal lato opposto.
	17	15	» 0,030 » 1,5 . . .	1'50"	6'30"	8'10"	10'10"	
	18	20	» 0,040 » 2 . . .	2'	7'	9'	15'	
	19	14	» 0,028 » 1,4 . . .	1'48"	6'15"	8'2"	10'20"	
	20	21	» 0,042 » 2,1 . . .	1'52"	6'45"	8'12"	11'48"	
MEDIE	—	—	—	1'50"	6'30"	8'7"	11'4"	
V	21	14	» 0,028 » 1,4 . . .	2'10"	7'	12'10"	13'	Aspirazione nella stessa siringa delle quantità necessarie di stricnina e di simpamina, ed iniezione immediata del tutto, sempre nel sottocutaneo.
	22	14	» 0,028 » 1,4 . . .	2'30"	13'	13'30"	vive	
	23	20	» 0,040 » 2 . . .	2'50"	9'40"	12'	vive	
	24	16	» 0,032 » 1,6 . . .	2'20"	9'33"	—	vive	
	25	21	» 0,042 » 2,1 . . .	2'40"	9'10"	—	vive	
MEDIE	—	—	—	2'30"	9'53"	12'33"	—	

N. B. - In ogni caso i valori in minuti sono calcolati dal momento di iniezione della stricnina.

Le dosi adoperate sono state le stesse che nelle precedenti osservazioni sui *Mus*: mg 2 di nitrato di stricnina e mg 100 di simpamina per Kg di animale.

L'iniezione fu sempre praticata sotto la cute del dorso, in una sola volta, in uno spazio di tempo oscillante intorno ai 10", e senza successivo massaggio. I topolini restavano a digiuno da 12 ore prima dell'esperimento, con sola acqua a disposizione. Dal momento dell'iniezione furono tenuti sotto costante osservazione; si tenne nota del momento d'insorgenza della tachipnea, della iperreflessività, della fase convulsiva e di quello della morte. Si tenne conto, altresì, di tutto quanto fosse necessario, relativamente al comportamento generale degli animali.

I risultati ottenuti figurano, in forma chiaramente sintetica, nella unita tabella. Ad essa rimandiamo, onde non fare un inutile doppione, per i dettagli numerici.

Qui basta aggiungere, che gli animali dei gruppi II e III che ricevettero o stricnina e simpamina insieme, ma in sede diversa, o simpamina prima della stricnina, si mostrarono particolarmente ricettivi a stimoli uditivi; che in essi predominavano atteggiamenti spastici, e che la durata della fase convulsiva (di 20"-30" per quelli a sola stricnina) è apparsa, per essi, notevolmente prolungata, come del resto pure per quelli che la simpamina ricevettero dopo la stricnina (vedi tabella).

Per gli animali del gruppo V, ad iniezione contemporanea di simpamina e stricnina in unica sede, nei casi in cui la fase convulsiva si manifestò, essa fu di breve durata, e la seguirono contrazioni muscolari isolate di tipo spastico, intermittenti, e sempre più distanziate fra loro. Gli animali sopravvissero ad eccezione di uno.

Dall'insieme dei risultati ottenuti appaiono i seguenti fatti principali:

1° la comparsa della tachipnea è stata sempre lievemente anticipata dall'aggiunta di simpamina alla stricnina, quando le due sostanze non sono state iniettate contemporaneamente nella stessa sede. Quando iniettate nella stessa sede è apparsa, invece, sensibilmente ritardata;

2° l'aumento della eccitabilità riflessa si è manifestato molto più precocemente che non quello da sola stricnina, quando le due sostanze sono state iniettate contemporaneamente, ma in sede diversa; o quando la iniezione di simpamina ha preceduto quella di stricnina. Ritardata sensibilmente, invece, è apparsa quando la simpamina è stata introdotta dopo la stricnina; addirittura tardiva, per iniezione contemporanea delle due nella medesima sede;

3° non vi è stata alcuna differenza, circa il momento di comparsa della fase convulsiva, nel caso della iniezione di sola stricnina ed in quelli in cui la iniezione di simpamina precedette o seguì quella della stricnina. Lo stesso momento è stato, invece, ritardato notevolmente dalla iniezione contemporanea delle due sostanze in sede diversa, e ancora più quando nella stessa sede;

4° anche il momento della morte degli animali fu sempre ritardato dall'associazione della simpamina alla stricnina, massimamente nel caso

della somministrazione contemporanea in sede diversa. Negli animali ad iniezione contemporanea in sede unica si ebbe l'80 % di sopravvivenza.

\* \* \*

Questi i fatti, che ci limitiamo qui semplicemente ad esporre, senza volere, per il momento, trarre da essi le conclusioni, che pure invoglierebbero a trarre.

Prima di farlo, contiamo di ripetere le presenti esperienze alla luce di qualche indicazione da esse fornitaci. E quando saremo in possesso dei nuovi dati, li discuteremo insieme con gli attuali e concluderemo, se sarà del caso.

Però fin da ora non sembra azzardato rilevare che le presenti ricerche pare diano un sensibile, anche se indiretto, appoggio alla ipotesi di lavoro cui è stato in precedenza accennato.

**Fisiologia.** — *Alcuni problemi riguardanti l'assorbimento intestinale della B<sub>12</sub>.* Nota di VITTORIO CAPRARO e ANGELO CRESSERI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio R. MARGARIA.

Con l'intento di chiarire il fenomeno dell'assorbimento della B<sub>12</sub> abbiamo intrapreso alcune ricerche per stabilire se la B<sub>12</sub> venga assorbita come tale dall'intestino e per controllare quale influenza eserciti su tale assorbimento un fattore mucoproteico isolato dalla mucosa gastrica di maiale e dotato di proprietà di legame sulla B<sub>12</sub>.

L'animale di scelta è stato il ratto albino maschio del peso di 150–200 g.

Per gli esperimenti di assorbimento e di eliminazione della B<sub>12</sub> i ratti sono stati sottoposti a un periodo di preparazione: tenuti a digiuno per 12 ore e poi per 3 giorni ad una dieta priva di B<sub>12</sub>. Durante l'esperimento i ratti, per lo più in gruppi di 2 in gabbie da metabolismo, hanno ricevuto come unico alimento soluzione di glucosio al 40 % *ad libitum*.

Il dosaggio della B<sub>12</sub> nelle urine è stato eseguito con il metodo su piaatta con *E. coli* 113/3 <sup>(1)</sup>.

Il fattore legante la B<sub>12</sub> è stato estratto dalla mucosa gastrica di maiale con il metodo di Glass e collaboratori <sup>(2)</sup> opportunamente modificato.

Il potere legante della sostanza così preparata è stato valutato determinando con il metodo di dosaggio su piaatta con *E. coli* 113/3 le concentrazioni di B<sub>12</sub> libera in miscele a concentrazioni diverse di B<sub>12</sub> e di fattore legante e calcolando la dose di inibizione semimassima, cioè quella quantità di sostanza che aggiunta ad una quantità fissa di B<sub>12</sub> (0,05 µg/ml) riduce al 50 % la B<sub>12</sub> libera <sup>(3)</sup>.

(\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) SALVINI, C. BOLZONI, « Boll. Ist. Sierot. Mil. », 31, 97 (1952).

(2) G. B. J. GLASS, L. J. BOYD, M. A. RUBINSTEIN, C. S. SVIGALS, « Science », 115, 101 (1952).

(3) A. CRESSERI, « Atti XI Congr. Soc. It. Ematol. », Roma 1953, p. 300.



Esperimenti condotti con cobalamina marcata nei ratti di 250-300 g dimostrano che la maggior parte della  $B_{12}$  introdotta per os viene eliminata con le feci e che quindi solo una piccola parte viene assorbita, e precisamente 310  $\mu\text{g}$  dopo introduzione di 890  $\mu\text{g}$  <sup>(4)</sup>, 1,60  $\mu\text{g}$  dopo introduzione di 20  $\mu\text{g}$  <sup>(5)</sup> e 0,76  $\mu\text{g}$  dopo introduzione di 4  $\mu\text{g}$  <sup>(6)</sup>.

Esclusa quindi la possibilità di un assorbimento totale della  $B_{12}$  introdotta per bocca, si può porre il quesito se la  $B_{12}$  assorbita lo sia come tale oppure abbia bisogno di essere agganciata in un complesso dopo aver reagito con una sostanza presente nel succo gastrico.

Che almeno una parte della  $B_{12}$  per essere assorbita presupponga la presenza di un fattore di origine gastroenterica è dimostrato dagli esperimenti condotti con cianocobalamina marcata; in anemici perniciosi dopo somministrazioni di pochi  $\mu\text{g}$  di  $B_{12}$  l'assorbimento di essa aumenta più o meno notevolmente se si somministra insieme del succo gastrico normale o concentrati di mucosa di stomaco di maiale <sup>(7, 8, 9, 10, 11)</sup>.

Ciò non esclude che una parte della  $B_{12}$  assorbita venga assorbita come tale specialmente se si somministra in forti dosi <sup>(4)</sup>. È lecito, però, supporre che se la  $B_{12}$  viene assorbita come tale occorra un forte gradiente di concentrazione perché tale fenomeno possa avvenire.

Difatti dai dati da noi raccolti appare che dopo somministrazione di 150  $\mu\text{g}$  di  $B_{12}$  in ratti di 150-200 g l'extraeliminazione urinaria dopo 96 ore è appena di 2,12  $\mu\text{g}$  (tabella I, controlli, e fig. 3), nonostante che la concentrazione di  $B_{12}$  libera sul luogo dell'assorbimento permanga molto elevata; in 4 ratti dopo 2 ore dalla somministrazione di 150  $\mu\text{g}$  di  $B_{12}$  si sono ritrovati in media 37,6  $\mu\text{g}$  di  $B_{12}$  libera.

La presenza nel succo gastrico dell'uomo sano e nella mucosa gastrica di animali (maiale) di una sostanza mucoproteica specificamente atta a legare la  $B_{12}$  e a renderla inutilizzabile da parte dei batteri della flora intestinale, ha fatto sorgere l'ipotesi che il fattore intrinseco di Castle sia da identificare con questo fattore capace di unirsi con la  $B_{12}$ .

Data l'avidità di alcune specie batteriche della flora intestinale per la vitamina  $B_{12}$ , il significato di questo fattore potrebbe essere quello di sottrarre chimicamente una quota della  $B_{12}$  alla utilizzazione da parte dei germi intestinali e di renderla così utilizzabile da parte dell'organismo. Ma l'assor-

(4) B. F. CHOW, C. ROSENBLUM, R. H. SILBER, D. T. WOODBURY, R. YAMAMOTO, C. A. LANG, « Proc. Soc. exp. Biol. Med. », 76, 393 (1951).

(5) K. W. BARBEE, B. C. JOHNSON, « Proc. Soc. exp. Biol. Med. », 76, 720 (1951).

(6) C. ROSENBLUM, B. F. CHOW, G. P. CONDON, R. S. YAMAMOTO, « J. Biol. Chem. », 198, 915 (1952).

(7) A. D. WELCH, V. SCHARF, R. W. HEINLE, G. C. MEACHAM, « Fed. Proc. », 11, 308 (1952).

(8) R. W. HEINLE, A. D. WELCH, V. SCHARF, G. C. MEACHAM, W. H. PRUSOFF, « Trans. Ass. Am. Physiol. », 65, 214 (1952).

(9) L. M. MEYER, « Proc. Soc. exp. Biol. Med. », 82, 490 (1953).

(10) R. F. SCHILLING, « J. Lab. Clin. Med. », 42, 860 (1953).

(11) R. F. SCHILLING, « J. Lab. Clin. Med. », 42, 947 (1953).

bimento della  $B_{12}$  non può essere spiegato solo da questa funzione del complesso mucoproteina- $B_{12}$  perché la concentrazione di  $B_{12}$  in equilibrio con il prodotto di combinazione con il fattore di legame è estremamente bassa e tale da non permettere presumibilmente un gradiente sufficiente per l'assorbimento.

Come sarà riferito da uno di noi <sup>(12)</sup>, il fattore legante nell'estratto grezzo adoperato è presumibilmente uno solo (fig. 1) essendo il rimanente materiale inerte a tale riguardo.

In via di ipotesi si può supporre che il principio legante reagisca con la  $B_{12}$  attraverso una reazione monomolecolare.

Se indichiamo con  $z$  la concentrazione del fattore grezzo estratto dalla mucosa gastrica di maiale ( $\mu\text{g/ml}$ ), con  $y$  la concentrazione di  $B_{12}$  legata ( $m\mu\text{g/ml}$ ), e con  $x$  la concentrazione di  $B_{12}$  libera ( $m\mu\text{g/ml}$ ), essendo  $k_1$  il valore del rapporto tra fattore combinato ( $\mu\text{g}$ ) e  $B_{12}$  legata ( $m\mu\text{g}$ ) nel complesso, si avrà la seguente equazione di equilibrio della reazione:

$$\frac{z}{y} = \frac{\alpha}{x} + k_1$$

dove  $\alpha = k k_1$ .

Sperimentalmente si trova un andamento della funzione che collega  $z/y$  ed  $x$  che si adatta all'equazione suddetta (fig. 2).

Dalle curve sperimentali ottenute si può anche approssimativamente calcolare la costante di equilibrio  $k$ ; essa risulta uguale a 0,5. Ciò significa che il 50% della mucoproteina è ancora legata quando c'è una concentrazione di 0,005  $\mu\text{g/ml}$  di  $B_{12}$  libera nell'ambiente; oppure che un estratto mucoproteico che legni 1  $\mu\text{g}$  di  $B_{12}$  per mg e sia presente in forma combinata in un ambiente alla concentrazione di 1 mg/ml, si disintegra fino a che la concentrazione di  $B_{12}$  raggiunge la concentrazione di 0,022  $\mu\text{g/ml}$ .

Risulta quindi chiaro che la concentrazione della  $B_{12}$  che si può liberare dal fattore legante a contatto con la mucosa intestinale è molto più piccola di quella presente nei nostri esperimenti di somministrazione di  $B_{12}$  libera.

Ciò nonostante in seguito a somministrazione orale del complesso  $B_{12}$  + mucoproteina non diminuisce l'extraeliminazione urinaria di  $B_{12}$  (tabella I) rispetto all'extraeliminazione che si ha dopo somministrazione delle medesime quantità di  $B_{12}$  libera.

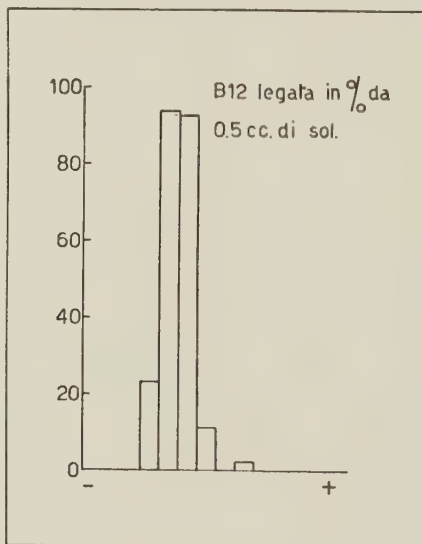


Fig. 1. — Percentuale di  $B_{12}$  legata (su di un totale di 50  $m\mu\text{g}$ ) da 0,5 ml delle frazioni ottenute per separazione con elettroforesi continua (metodo di Durrum) dell'estratto di mucosa gastrica di maiale usato nelle presenti prove.

Esclusa l'ipotesi di un assorbimento di  $B_{12}$  come tale rimane la possibilità che la  $B_{12}$  penetri nell'organismo in forma combinata, e a questo

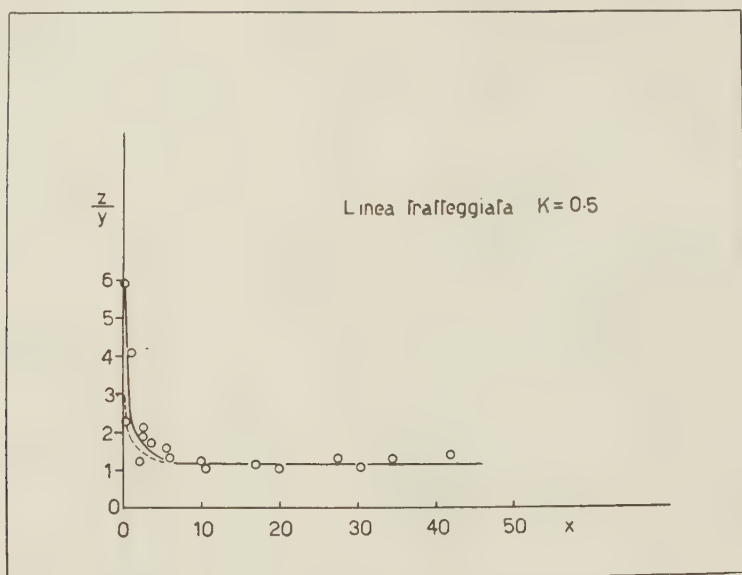


Fig. 2. - Valori del rapporto  $z/y$  in funzione di diversi valori di  $x$ . La linea tratteggiata indica l'andamento della funzione posto  $k = 0,5$ .

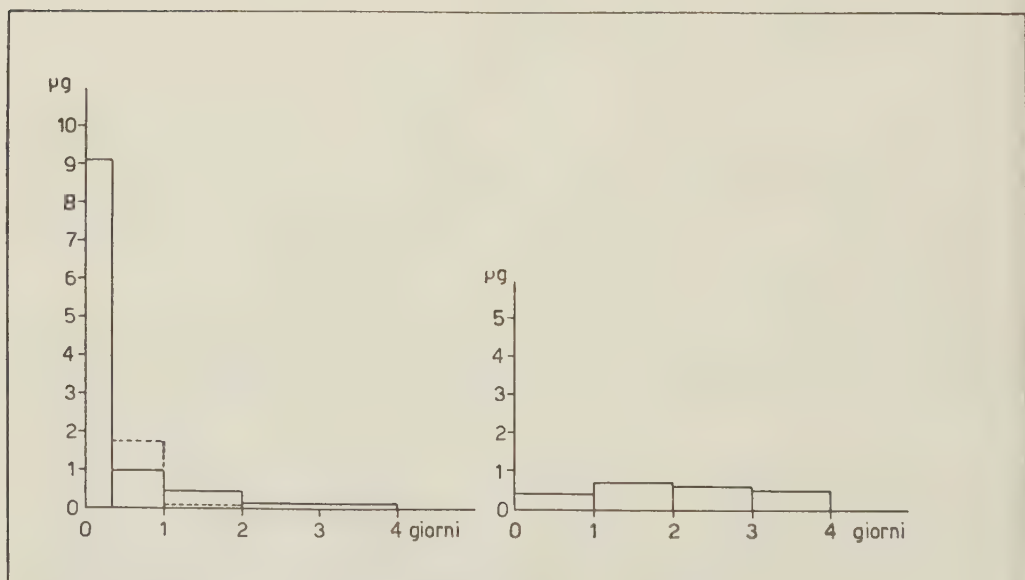


Fig. 3. - A sinistra: eliminazione della  $B_{12}$  iniettata per via parenterale (10  $\mu g$ ) (tratteggiata in valori teorici di eliminazione calcolati in base al valore delle prime 8 ore). A destra: eliminazione della  $B_{12}$  somministrata per via orale (150  $\mu g$ ).

punto si pone il quesito se essa penetri in forma combinata con il fattore legante da noi isolato o con qualche altra sostanza.

È presumibile anzitutto che gran parte della  $B_{12}$  assorbita non si trovi allo stato libero, ma sotto forma combinata.

Ciò risulta in modo evidente dalle curve di eliminazione urinaria della  $B_{12}$  iniettata parenteralmente e somministrata per os.

TABELLA I.

N. animali	Trattamento	Eliminazione media per animale in $\mu\text{g}$ per 24 ore				
		-48-0	0-24	24-48	48-72	72-96
Controlli 4	25 $\mu\text{g}$ per os in 6 ml	0,010	0,290	0,390	0,120	0,113
4	25 $\mu\text{g}$ per os in 6 ml + 400 mg MP(*)	0,080	0,480	0,675	0,815	0,370
Controlli 62	150 $\mu\text{g}$ per os in 0,5-5 ml	0,031	0,422	0,690	0,623	0,523
3	150 $\mu\text{g}$ per os in 2 ml + 200 mg MP	0,207	0,510	0,790	1,400	0,580
8	150 $\mu\text{g}$ per os in 5 ml + 300 mg MP	0,009	0,172	0,322	0,865	0,665
5	gastrectomia 150 $\mu\text{g}$ per os in 2 ml	0,053	0,736	0,506	0,345	0,368

(\*) Frazione mucoproteica con potere legante di 902  $\text{m}\mu\text{g}$  di  $B_{12}$  per mg.

Nell'esperimento illustrato nella fig. 3 (sinistra) appare l'eliminazione urinaria seguita fino a 96 ore dalla introduzione parenterale di 10  $\mu\text{g}$  di  $B_{12}$ ; sono riportati pure i valori teorici, immaginando l'organismo come un ambiente omogeneo e supponendo che la  $B_{12}$  si distribuisca allo stato libero e venga eliminata con una velocità istantanea proporzionale alla quantità presente nell'organismo.

Nell'esperimento invece, illustrato nella fig. 3 (destra) si osserva l'eliminazione urinaria seguita fino a 96 ore dopo introduzione orale di 150  $\mu\text{g}$  di  $B_{12}$ .

Abbiamo già visto che la quantità assorbita è sempre una infima percentuale di quella somministrata, valutabile a pochi  $\mu\text{g}$ ; se la  $B_{12}$  penetrata in circolo attraverso la parete intestinale si trovasse allo stato libero e quindi venisse eliminata con la stessa velocità di quella introdotta per iniezione, tale eliminazione dovrebbe scomparire in poche ore mentre invece prosegue in maniera continua per diversi giorni ad un livello più elevato che dopo somministrazione parenterale.



Questa differenza può essere interpretata verosimilmente solo ammettendo che la  $B_{12}$  assorbita per via intestinale si trovi nell'organismo in una forma più difficilmente eliminabile di quella introdotta come tale, scavalcando la barriera intestinale.

Stabilito che la  $B_{12}$  penetrata per via intestinale è sotto forma combinata, resta da vedere se tale combinazione sia la stessa di quella messa in evidenza con il fattore da noi isolato o sia di altro tipo.

Se si trattasse di penetrazione del complesso da noi messo in evidenza, la gastrectomia, rispettivamente la somministrazione di fattore legante nell'intento di ridurre, rispettivamente di aumentarne la disponibilità nel ratto, dovrebbe modificare sensibilmente l'eliminazione di  $B_{12}$  assorbita per via intestinale; invece tale eliminazione non varia notevolmente in queste diverse condizioni sperimentali come se anche l'assorbimento si fosse mantenuto costante (tabella I).

Ciò sembra suggerire l'ipotesi che per l'assorbimento della  $B_{12}$  ci sia un fattore limitante insito nella parete intestinale assorbente, che potrebbe essere individuato nella necessità della formazione di un altro complesso con la  $B_{12}$  diverso da quello che si forma nello stomaco.

In conclusione dalle presenti ricerche risulta che:

1° è confermata l'esistenza nella mucosa gastrica del maiale una sostanza di tipo mucoproteico estraibile con tecnica appropriata, che possiede uno specifico ed elevato potere di legame sulla  $B_{12}$ ; la concentrazione di  $B_{12}$  libera in equilibrio con questo complesso è molto piccola;

2° la  $B_{12}$  nel ratto non viene assorbita allo stato libero e d'altra parte può essere assorbita se è preventivamente legata alla sostanza mucoproteica dianzi nominata;

3° la  $B_{12}$  presumibilmente penetra nell'organismo non legata a tale sostanza, ma forse combinandosi in altra forma nella parete intestinale.

**Fisiologia.** — *Sui rapporti tra disordine della nutrizione, istopatologia, istochimica ed attività del miocardio* (\*). Nota di GAETANO LIVREA e PAOLO CRAXI, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. AMANTEA.

In una precedente Nota di uno di noi (Livrea)<sup>(1)</sup> è stato delineato il problema dei rapporti tra nutrizione ed attività cardiaca ed è stata sostenuta la possibilità di analizzare tale problema mediante lo studio del comportamento funzionale del cuore durante l'inanizione e le varie forme di denutrizione sperimentale.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana e nell'Istituto di Anatomia Patologica dell'Università di Messina.

(\*\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.

(1) G. LIVREA, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. 15, 453 (1953).

Sia il problema che la possibilità di indagarlo per l'anzidetta via si sono imposti alla nostra attenzione in seguito alle seguenti principali constatazioni sperimentali: *a*) la sola tiaminizzazione, tanto *per os* che per via parenterale, non è capace di far regredire la bradicardia con o senza aritmia dei colombi tiaminodeficienti per dieta orizanica; *b*) tali segni scompaiono invece con la somministrazione di un'adeguata quantità di grano; *c*) non compaiono se e sino a quando nel corso dell'alimentazione orizanica, con la somministrazione di adeguate quantità di tiamina o di cocarbossilasi si riesce ad evitare l'inanizione, conseguente soprattutto al vomito, il quale sottrae alla digestione e all'assorbimento quantità sempre più notevoli di alimento; *d*) la generosa addizione di tiamina o di cocarbossilasi alla dieta orizanica non riesce a conferirle la dignità di dieta completa, per cui insistendo in tale dieta si perviene ad un'alterazione generale regressiva della nutrizione, della quale fa parte la bradicardia ma non la polinevrite; *e*) nell'inanizione assoluta compare un disordine cardiaco, il medesimo affatto della dieta orizanica, con una rapidità in genere nettamente proporzionale alle condizioni generali di partenza dell'animale, nel senso che tanto più sono depauperate le condizioni all'inizio del digiuno tanto più rapida è l'insorgenza e l'accentuarsi del disturbo; *f*) nell'ipoalimentazione cronica con grano, cioè con un alimento atto in opportuna quantità ad assicurare al Colombo un equilibrio apparentemente indefinito, si ha l'insorgenza di una bradicardia con o senza aritmia, anche allorquando non v'è una significativa perdita di peso e quindi una palese rottura a favore dei processi di usura dell'equilibrio tra i meccanismi di sintesi e di disassimilazione.

Le anzidette constatazioni hanno permesso di trarre le seguenti conclusioni:

1° il disordine della nutrizione che sta a base del disturbo cardiaco dei colombi tiaminodeficienti è diverso dal disordine nutritivo che sta a base della polinevrite;

2° in altri termini, nel mentre la condizione determinante della polinevrite è la tiaminodeficienza, la condizione determinante del cuore cosiddetto beriberico dei colombi appare essere quella stessa del cuore da inanizione;

3° ma, poiché l'insorgenza della bradicardia con o senza aritmia è determinata, almeno nel Colombo, anche da una denutrizione così parziale, quale è quella da ipoalimentazione cronica con grano, da non accompagnarsi ad un notevole squilibrio tra i processi di sintesi e disassimilazione, si deve ritenere che per il normale metabolismo e quindi la normale funzione del cuore sono indispensabili determinati principi nutritivi esogeni, alla cui carenza non si può ovviare o forse solo per poco tempo con la nutrizione endogena, cioè attraverso la distruzione nelle sostanze proprie dell'organismo.

Nel mentre andavamo conducendo nei colombi l'analisi fisiologica dei probabili fattori causali e concomitanti dell'alterazione funzionale cardiaca da inanizione, abbiamo voluto condurre nel contempo, con la collaborazione anatomopatologica del prof. P. Craxi, una preliminare indagine, allo scopo: *a*) di accertare se un identico substrato istopatologico ed istochimico

accompagna le analoghe alterazioni funzionali presentate dal cuore da inanizione assoluta e dal cosiddetto cuore beriberico; *b*) di orientarci circa il determinismo neurogeno o miogeno o interstiziale dell'alterazione di funzione riscontrata nelle due anzidette condizioni; *c*) di stabilire se e quali lesioni anatomopatologiche sono responsabili della cronicizzazione del disordine cardiaco, allorquando si sottopone ripetutamente lo stesso animale a ravvicinati periodi di alimentazione orizantica o di prolungata inanizione assoluta.

Nella presente Nota riferiamo soprattutto circa i primi due punti, in quanto abbiamo per ora limitato le nostre indagini istologiche ed istochimiche ai colombi normali di controllo e ai colombi che per la prima volta presentavano l'abituale quadro di alterazione funzionale cardiaca, alcuni per effetto dell'alimentazione orizantica ed altri dell'inanizione assoluta. Vedremo però che i risultati ottenuti sono tali da permettere un anticipato giudizio circa il perché e circa il fondamento anatomopatologico della cronicizzazione del disordine cardiaco.

L'esame macroscopico non ha permesso di rilevare modificazioni orientative.

L'esame microscopico, condotto sia con i comuni metodi, sia con le metodiche argentiche che con il metodo di Hotchkiss e Mc Manus (PAS = Periodic Acid Schiff), quest'ultimo applicato tanto a pezzi fissati in mezzo anidro (fissativo di Rossmann) che in mezzo acquoso (soluzione di formolo), ha permesso di accertare che al cuore da inanizione assoluta e al cuore cosiddetto beriberico per alimentazione orizantica corrisponde un quadro istopatologico ed istochimico stupefacentemente identico, caratterizzabile in sintesi come segue:

1° *A carico delle fibre muscolari*: semplici note di rigonfiamento edematoso in singoli elementi, che pertanto appaiono tozzi, con nucleo meno colorabile e striatura scarsamente evidente; assenza di degenerazione grassa e vacuolare e tanto più di sarcolisi;

2° *A carico del sistema specifico*: in zona sottoendocardica, specie ventricolare, e in zona perivasale, specie atriale, voluminosi elementi cellulari del Purkinje ad ampio protoplasma, alcuni PAS negativi, altri PAS positivi, sebbene con diverso grado di positività, per cui da un sottile alone periferico si passa ad una positività estesa a tutto il protoplasma cellulare. In genere gli elementi più voluminosi sono i più intensamente PAS positivi, hanno forma irregolare, contorni poco netti, nucleo piccolo, picnotico o, all'apposto, scarsamente colorabile. In talune zone, specialmente ventricolari sottoendocardiche, i caratteri involutivi sono più marcati: il nucleo scompare, i contorni cellulari si perdono, talvolta a tal punto che al di sotto della membrana propria dell'endocardio, sempre bene individuabile, non è più possibile scorgere la normale fila di cellule del Purkinje e ad essa vi si sostituisce uno strato lamellare di aspetto omogeneo ed intensamente PAS positivo. È notevole il fatto che, rispetto alle condizioni normali, le cellule del Purkinje, a parte i caratteri involutivi, appaiono molto più facilmente dimo-



strabili, quasi che la condizione di inanizione evidenziasse queste strutture<sup>(2)</sup>.

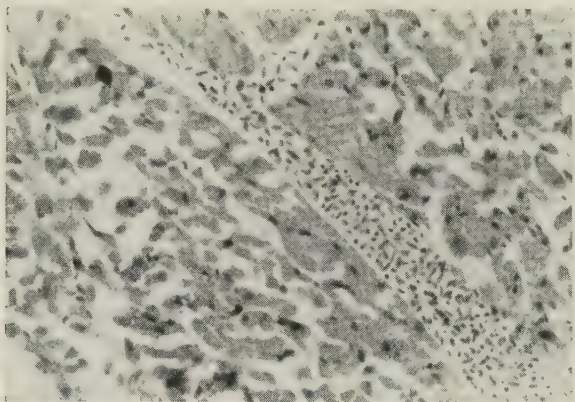


Fig. 1. — *Cuore cosiddetto beriberico*. — Intenso edema dissociante le fibre muscolari in rapporto ad un capillare dilatato e pieno di sangue. Si rilevi l'assenza di modificazioni infiammatorie della parete vasale e la completa assenza di elementi infiammatori nel liquido di edema.

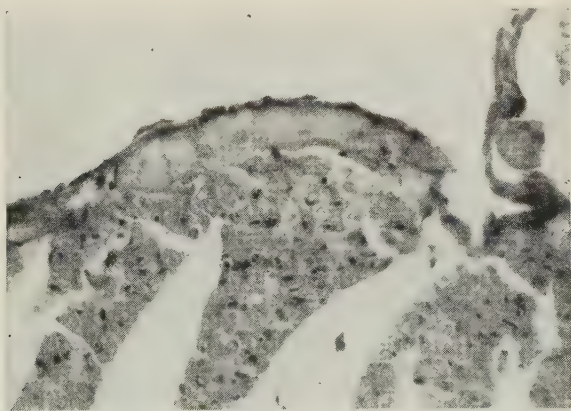


Fig. 2. — *Cuore cosiddetto beriberico*. — Lo strato sottoendocardico delle grosse cellule di Purkinje PAS positive appare molto evidente: i contorni di taluni elementi sono ben delimitati, in altri invece sono indistinti; in questi ultimi il nucleo o manca o si presenta come un'ombra. Si tratta di un'immagine di transizione verso la completa scomparsa degli elementi cellulari e la formazione di strie ialine sottoendocardiche descritte nel testo e di cui si dà un esempio nella fig. 4.

3° *A carico dell'interstizio strutturato e non strutturato*: assenza di una componente infiammatoria cellulare, edema dissociante singoli fasci

(2) Circa la rarità delle cellule del Purkinje nel Colombo normale, il prof. V. Chiodi, noto studioso del sistema specifico del cuore degli Uccelli, essendo stato pregato di osservare un nostro preparato, ha così cortesemente scritto ad uno di noi (Livrea): «Molto interessante trovo il preparato che Lei m'invia, perché, mentre il mio allievo Castigli non riscontrava cellule decisamente di Purkinje nel Colombo, io ho trovato invece rari elementi in esemplari osservati successivamente ed ora il suo preparato mi conferma nelle mie osservazioni».



e singole fibre e, fatto molto importante, nel mentre nell'animale normale la PAS positività si osserva soltanto a livello della membrana basale del-

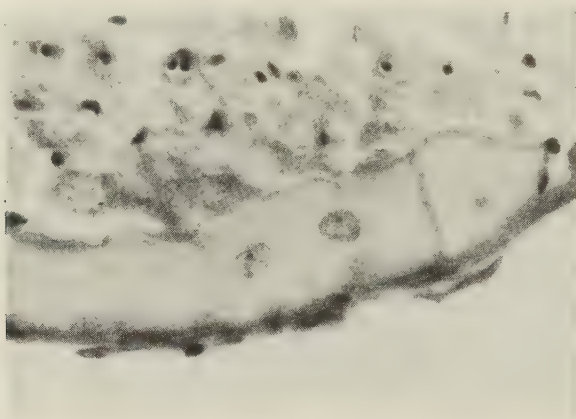


Fig. 3. - *Cuore cosiddetto beriberico*. — Dettaglio della precedente a più forte ingrandimento.

l'endocardio, della tunica media delle arterie a tipo muscolare ed all'esterno dell'endotelio dei capillari e delle arteriole precapillari, negli animali in esperimento, sia in alimentazione orizantica che in inanizione assoluta, si osserva

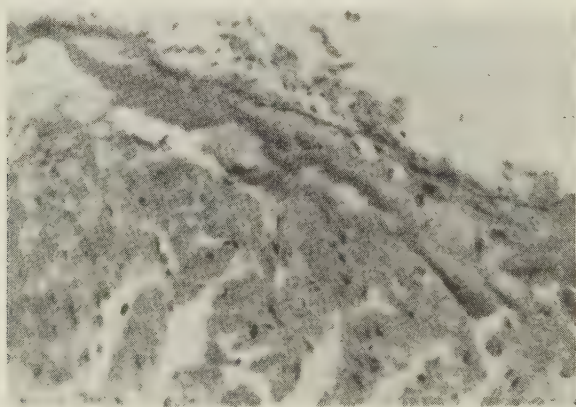


Fig. 4. - *Cuore da inanizione assoluta*. — Al di sotto della lamina propria dell'endocardio si rileva uno strato omogeneo intensamente PAS positivo specie nella parte che guarda la muscolatura. In esso è tuttora individuabile qualche grossa formazione cellulare del Purkinje a protoplasma non ben delimitato. Edema dell'interstizio e fatti di patosi muscolare.

in più una PAS positività, a guisa di orletto, tutt'attorno alle fibre muscolari, sia nelle zone dissociate da edema, sia nelle zone in cui l'edema è scarso o addirittura assente. Inoltre: PAS negatività del liquido interstiziale, assenza di significative differenze, rispetto alla norma, nelle quote reticolari e, per

quanto riguarda i vasi, edema periavvventiziale, modica dilatazione vasale, assenza di segni di capillarite, di vascularite e di emorragie.

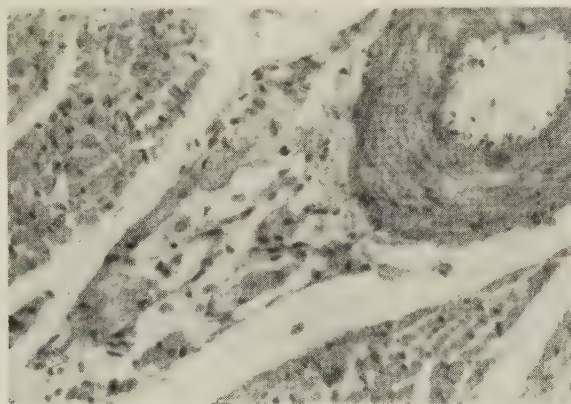


Fig. 5. — Cuore da inanizione assoluta. — Nel tessuto periavvventiziale di un'arteria a tipo muscolare si notano numerose grosse cellule di Purkinje a vario comportamento PAS; in genere però i fenomeni regressivi sono meno gravi di quelli rilevati in sede sottoendocardica.

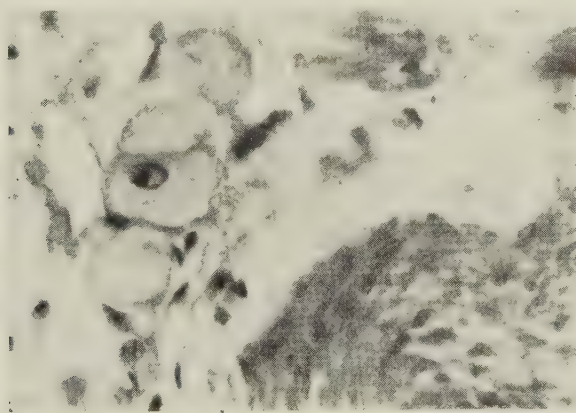


Fig. 6. — Cuore da inanizione assoluta. — Dettaglio della precedente a più forte ingrandimento.

Dopo quanto precede possiamo permetterci una breve discussione conclusiva, nella quale è implicita la risposta ai quesiti postici.

All'identico disordine cardiaco presentato dal cuore da inanizione assoluta e da alimentazione orizantica corrisponde un substrato istopatologico ed istochimico così sorprendentemente identico da troncane, secondo noi almeno per il Colombo, l'annosa discussione (che rimandiamo al lavoro in esteso) circa l'esistenza o meno di alterazioni muscolari cardiache specifiche del beriberi.

Pertanto il cosiddetto cuore beriberico, almeno nel Colombo, è funzionalmente ed istopatologicamente un cuore da inanizione.

In questo cuore il problema della primitività della lesione, che tanto fervore di polemiche ha suscitato nel caso del cuore beriberico, va spostato dalle componenti tissulari sin'ora esclusivamente considerate, cioè le fibre muscolari da un lato e l'interstizio strutturato dall'altro, alla sostanza fondamentale e alle cellule di Purkinje.

Il comportamento della PAS dimostra con evidenza che nel cuore da inanizione e da alimentazione orizantica vi è un'identica alterazione del trofismo della sostanza fondamentale e delle cellule di Purkinje.

Allo stato attuale non possiamo dire se precede l'alterazione della sostanza fondamentale o quella delle cellule del Purkinje. Sacrificando gli animali in periodi progressivamente più precoci di alimentazione orizantica o di inanizione, ci proponiamo di precisare questo punto e di chiarire possibilmente il rapporto di causa tra alterazione trofica ed alterazione funzionale.

Comunque sia, primitiva o secondaria o contemporanea all'alterazione trofica della sostanza fondamentale, la lesione della cellula del Purkinje è indubbiamente precoce, progressiva e continua, come è dimostrato dalla gamma evolutiva della lesione fino alla necrosi dell'elemento cellulare.

Visto che la PAS positività della sostanza fondamentale presenta gli stessi caratteri, sia nelle zone dissociate che non dissociate dall'edema e là dove l'edema è modestissimo, è molto probabile che la condizione di edema sussegue al mutato stato della sostanza fondamentale.

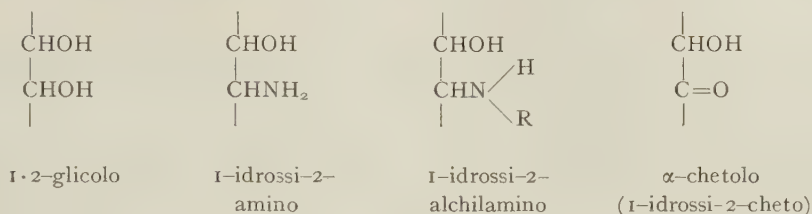
Poiché manca la documentazione istologica di una lesione della barriera endoteliale, l'edema non può essere interpretato come l'espressione di un'alterazione di funzione della barriera e per ora deve essere inteso come un vero e proprio richiamo di liquido operato dal mutato stato della sostanza fondamentale.

Poiché con i metodi argentiici non abbiamo riscontrato significative differenze rispetto alla norma dell'interstizio fibrillare, dobbiamo dedurre che solo tardivamente si hanno modificazioni dell'interstizio strutturato.

Tale deduzione va d'accordo con le odierne vedute sull'evoluzione degli edemi e sulla fibrillogenesi acellulare e permette di spiegare la completa reversibilità anatomica e funzionale del quadro del cuore da inanizione, allorché il disordine della nutrizione è passeggero, e l'irreversibilità funzionale ed anatomica, tanto nell'interstizio (sclerosi) quanto nella muscolatura (gravi lesioni degenerative sino alla sarcolisi di Wenckebach), allorché il disordine della nutrizione è duraturo, come nei casi della patologia umana (beriberi, alcoolismo, disordini cronici della nutrizione) o di prolungata sperimentazione con diete carenzate.

Ci rimane, infine, da vedere se i rilievi istochimici consentiti dal metodo di Hotchkiss-Mc Manus permettono di precisare la natura dell'alterazione trofica della sostanza fondamentale e delle cellule del Purkinje e quindi di approfondire in qualche modo il nostro problema dei rapporti tra nutrizione, istopatologia e attività cardiaca.

Dopo Malaprade e Nicolet e Shinn, noi sappiamo che l'acido periodico reagisce con i seguenti gruppi:



Secondo Lison <sup>(3)</sup>, pertanto, la reazione PAS non è data soltanto dai polisaccaridi non azotati ed azotati, cioè dai mucopolisaccaridi, dai mucoproteidi e dai glicoproteidi, ma anche da determinate proteine contenenti gruppi idrossiamino attivi ed, infine, da determinati derivati lipidici contenenti il gruppo 1-idrossi-chetonico.

La condizione sperimentale da noi creata, cioè l'inanizione, ed il fatto che la positività PAS è presente anche in sezioni provenienti da pezzi fissati in mezzo acquoso consente di escludere che essa possa riferirsi ad accumulo di glicogeno.

Poiché l'indagine istologica più accurata ci ha anche consentito di escludere deviazioni locali delle quote lipidiche, la positività PAS non dovrebbe dipendere da derivati lipidici contenenti il gruppo idrossichetonico.

Rimane la dipendenza della positività dai mucopolisaccaridi, dai mucoproteidi, dai glicoproteidi e dalle proteine contenenti gruppi idrossiamino attivi. È noto che tali gruppi esistono nella serina, nella treonina, nell'acido ossiglutamico, nella idrossilisina e nella idrossiprolina.

Per queste considerazioni la nostra attenzione è costretta a soffermarsi soprattutto sulle sostanze azotate della sostanza fondamentale e delle cellule del Purkinje. Secondo noi la PAS positività di queste e di quella sarebbe l'espressione istochimica del disordine nutritivo protidico del cuore da inanizione.

A giustificazione di questo nostro modo di vedere starebbero anche i risultati dell'analisi fisiologica che uno di noi (Livrea) va da tempo conducendo circa il ruolo svolto nel determinismo del cuore da inanizione dalle sostanze plastiche e dalle sostanze che regolano le trasformazioni di materia e di energia.

Da tali risultati, che qui occorre anticipare per una migliore comprensione della PAS positività delle cellule del Purkinje e della sostanza fondamentale, appare con chiarezza che i soli sali minerali, le sole vitamine chimicamente note o entrambi questi gruppi di sostanze regolatrici dei processi nutritivi non hanno la capacità né di prevenire né di curare il disordine cardiaco del colombo in inanizione assoluta o in inanizione per dieta

(3) L. LISON, *Histochimie et cytochimie animales*, 2<sup>me</sup> édition, Gauthier-Villars, Paris, 1953.



orizanica; mentre, invece, entro certi limiti, l'azione curativa e preventiva può essere svolta da determinate miscele di aminoacidi o dagli idrolisati di determinate proteine, somministrati *per os*.

Sulla scorta di tali reperti sembra giustificato ammettere che nel catabolismo protidico connesso con l'inanizione assoluta o con l'inanizione da dieta orizanica sono coinvolte anche le proteine tissulari cardiache; che la distruzione delle proteine tissulari a livello degli altri organi o tessuti non è o solo per poco tempo è capace di fornire al cuore i protidi necessari a compensare le perdite corrispondenti al dispendio azotato endogeno specifico dell'organo e che, quindi, l'apporto esogeno di un minimo di determinati aminoacidi è indispensabile per assicurare la riparazione *in situ* delle proteine tissulari, sia che la loro sintesi si faccia partendo dagli aminoacidi, sia da grossi aggregati di questi.

Dopo di ciò la nostra convinzione che la PAS positività dell'interstizio non strutturato e delle cellule del Purkinje sia l'espressione istochimica di un disordine nutritivo protidico risulterebbe giustificata non solo dalle considerazioni che prima facevamo, ma anche dagli anzidetti risultati e dalle deduzioni che essi autorizzano.

**Fisiologia.** — *Effetti dello stiramento su alcune proprietà funzionali del nervo* (\*). Nota di FRANCESCO INFANTELLINA, presentata (\*\*) dal Socio G. C. PUPILLI.

Il nervo è una struttura deformabile che consente notevoli allungamenti in alcune specie animali, prive di scheletro esterno e interno e capaci di modificare la lunghezza del loro corpo.

Le indagini intorno alle modificazioni delle caratteristiche funzionali del nervo dovute all'allungamento passivo, sono scarse: sono state eseguite su nervi di animali, in cui le variazioni di lunghezza dei nervi stessi si verificano in condizioni fisiologiche. Secondo Jenkins e Carlson<sup>(1)</sup>, Carlson<sup>(2,3)</sup>, von Holst<sup>(4)</sup> e Bullock, Cohen e Faulstick<sup>(5)</sup>, che hanno sperimentato su Molluschi e Annulosi, la velocità di conduzione dell'impulso nervoso resterebbe invariata con lo stiramento. Secondo Bethe<sup>(6)</sup>, invece, lo stiramento del cordone midollare ventrale di *Hirudo medicinalis*, determina aumento della velocità di conduzione.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.

(1) O. P. JENKINS a. A. J. CARLSON, « J. comp. Neurol. Psychol. », XIV, 85 (1904).

(2) A. J. CARLSON, « Amer. J. Physiol. », XIII, 351 (1905).

(3) A. J. CARLSON, « Amer. J. Physiol. », XXVII, 323 (1910-11).

(4) E. von HOLST, « Zool. Jb. », LI, 547 (1932); LII, 67 (1932).

(5) T. H. BULLOCK, M. J. COHEN a. D. FAULSTICK, « Biol. Bull. », XCIX, 320 (1950).

(6) A. BETHE, « Pflüger's Arch. », CXXII, 1 (1908).

Con le indagini qui esposte, ho preso in esame l'eccitabilità in funzione del tempo e la polarizzazione del N. pedale di un *Limacide* sottoposto ad allungamento passivo. Le ricerche sono state eseguite su oltre 100 esemplari di *Arion empiricorum*.

All'inizio di ogni esperimento, si misurava la lunghezza minima e massima che l'animale in esame poteva assumere di per sé: la lunghezza massima veniva misurata durante la locomozione, essendo la Limaccia posta su un piano millimetrato; la lunghezza minima era quella raggiunta dall'animale durante la sua retrazione provocata dalle manipolazioni dello sperimentatore. Nella condizione di massimo accorciamento della Limaccia, il N. pedale si presenta sinuoso: per mezzo di misurazioni che venivano eseguite su numerosi esemplari fissati con formalina durante gradi diversi di stiramento o di retrazione, si è calcolato che imponendo all'animale una lunghezza del 12 % ca. superiore a quella misurata durante la massima retrazione, si ottiene un completo raddrizzamento del nervo. Tale calcolo era necessario per poter fissare l'animale sul tavolo di contenzione, entro i limiti di quella lunghezza che consente di avere i NN. pedali raddrizzati e tuttavia non stirati.

La Limaccia era fissata con spilloni su uno speciale tavolo di contenzione: come spiegherò appresso, lo stiramento del nervo era effettuato mediante lo spostamento delle due piattaforme costituenti il piano del tavolo stesso. Nell'animale così fissato, tagliando longitudinalmente la cute del dorso, veniva aperta la cavità del corpo: si spostavano i visceri e si mettevano allo scoperto i due NN. pedali e i rispettivi gangli. Si procedeva quindi all'isolamento di uno dei due nervi di cui si recidevano tutti i rami collaterali, mentre si lasciavano intatte le connessioni col ganglio e con gli sfioccamenti terminali. Con un taglio trasversale completo, il corpo dell'animale veniva diviso in due monconi; il nervo restava connesso con uno dei due monconi mediante il ganglio e con l'altro per mezzo delle proprie espansioni.

Il tavolo di contenzione è costituito da una piattaforma mobile, su cui viene fissato il moncone del corpo della Limaccia connesso con gli sfioccamenti terminali del nervo, e da una piattaforma fissa, su cui è fissato l'altro moncone del corpo. Una vite, allontanando la parte mobile del tavolo da quella fissa, permette di imporre al nervo isolato gli allungamenti voluti. Il minimo allungamento del nervo effettuabile mediante la manovra della vite e valutabile con un nonio, è di mm. 0,05.

Venivano misurate le capacità cronassiche minime efficaci per l'eccitamento del nervo, mediante una cassetta di condensatori con variazioni di capacità di 0,0005  $\mu$ F. La stimolazione del N. pedale era iterativa ed effettuata per mezzo di un iteratore costruito essenzialmente sul modello Lapicque-Trevet<sup>(7)</sup>. Il nervo era posto su due coppie di elettrodi, costituiti da fili di Ag-AgCl: la coppia posta prossimalmente al ganglio serviva per la stimolazione; con la coppia posta distalmente al ganglio veniva derivata l'attività elettrica del nervo mediante un oscillografo elettromagnetico a scrittura diretta.

(7) L. LAPICQUE, *L'excitabilité itérative*. Paris, Hermann, 1936.

Per misurare il potenziale di lesione mi sono servito della disposizione sperimentale proposta da Dubuissou e Debot <sup>(8)</sup>, la quale permette la misura di potenziali debolissimi all'estremità di un circuito la cui resistenza può raggiungere parecchie migliaia di MΩ. Gli elettrodi erano costituiti da fili di Ag-AgCl: un elettrodo era messo a contatto con la superficie integra del nervo in una zona sprovvista di collaterali, l'altro era posto a contatto col nervo omonimo reciso e schiacciato per pinzettamento.

Nelle manovre di disseccamento, il nervo era mantenuto nel liquido fuoruscito dalle lacune e dai vasi dello stesso animale, il quale liquido coagula molto lentamente [cfr. Jenkins e Carlson <sup>(9)</sup>]. Il preparato era tenuto costantemente in camera umida e a temperatura di 18°-20° C. Ogni preparato veniva sottoposto a 3-4 stiramenti progressivi e poi era riportato alla lunghezza iniziale: la misura della eccitabilità e quella del potenziale di lesione venivano effettuate per le diverse lunghezze fatte assumere al nervo.

Le curve riportate sono state costruite sui valori medi. Lo stiramento del nervo provoca accorciamento della cronassia e diminuzione del potenziale di

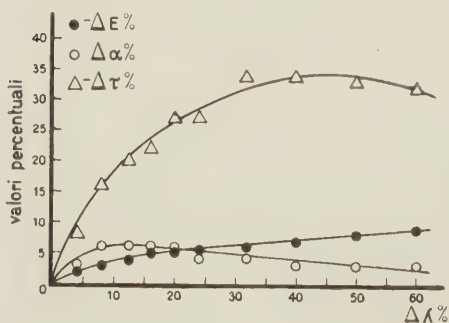


Fig. 1. - Da esperimenti eseguiti sul N. pedale isolato di *Arion empiricorum*. Curva della variazione percentuale della reobase ( $\Delta\alpha\%$ ), della cronassia ( $\Delta\tau\%$ ) e del potenziale di lesione del nervo ( $\Delta E\%$ ) in funzione di  $\Delta\lambda\%$ , essendo  $\Delta\lambda\%$  l'aumento percentuale della lunghezza imposta al nervo.

lesione. Per allungamenti inferiori al 60 % della lunghezza iniziale, le modificazioni della eccitabilità e della polarizzazione sono reversibili; per stiramenti maggiori si ha reversibilità parziale, in concomitanza ai segni di una evidente isteresi meccanica. Infine, le determinazioni eseguite durante i forti stiramenti (superiori al 60 %) hanno dato valori di eccitabilità e di polarizzazione incostanti. Riferirò i dati sperimentali che riguardano gli effetti reversibili dello stiramento.

I risultati ottenuti sono riportati nel diagramma della fig. 1. Vi sono riportate le curve delle variazioni percentuali della reobase ( $\Delta\alpha\%$ ), della cronassia ( $\Delta\tau\%$ ) e del potenziale di lesione ( $\Delta E\%$ ) del nervo in funzione dell'aumento percentuale della lunghezza ( $\Delta\lambda\%$ ) imposta al nervo.

Gli effetti dell'allungamento passivo del N. pedale sono i seguenti. 1° La reobase del nervo si presenta modicamente aumentata; l'aumento percentuale massimo (del 6 %) si ha per allungamenti compresi nella zona da 8 a 16 %. 2° La cronassia del nervo si accorcia; tale variazione si fa maggiore col

(8) M. DUBUISSON et A. DEBOT, « Arch. int. Physiol. », L, 54 (1940).

(9) O. P. JENKINS a. J. CARLSON, « Amer. J. Physiol. », VIII, 251 (1903).

crescere della lunghezza del nervo fino al 40 % della sua lunghezza iniziale; per maggiori stiramenti del nervo, fino al 60 %, l'accorciamento cronassico è minore di quello riscontrato per stiramenti del 40 %. 3° Il potenziale di lesione del N. pedale si abbassa col crescere della lunghezza del nervo, dapprima più rapidamente e poi lentamente.

L'interpretazione dei risultati esposti non si presenta agevole, date le scarse conoscenze che si hanno circa agli effetti che lo stiramento provoca nelle fibre nervee. È tuttavia evidente che due effetti dello stiramento vanno considerati: la variazione del diametro delle fibre e l'alterazione del loro stato strutturale.

È noto che la cronassia delle fibre nervee aventi diametro maggiore è più breve di quella che si determina nelle fibre più sottili [Lapicque e Legendre <sup>(10)</sup>, Lapicque, Gasser e Desoille <sup>(11)</sup>, Lapicque, H. e A. Desoille <sup>(12)</sup>, Kreindler <sup>(13)</sup>, Moore e Brücke <sup>(14)</sup>, Blair e Erlanger <sup>(15)</sup>, Prosser e Chambers <sup>(16)</sup>]. Per altro, quando si misura la cronassia di una stessa fibra in tratti di diverso diametro, si ritrovano i medesimi valori cronassici: la cronassia sarebbe un parametro protoplasmico costante in tutti i punti della stessa cellula e una riduzione del diametro della fibra nervea non dovrebbe modificare la cronassia [Lapicque e Pézard <sup>(17)</sup>, Lapicque <sup>(18)</sup>, cfr. Barron <sup>(19)</sup>]. In ogni caso, l'accorciamento della cronassia che si riscontra nel nervo a causa dell'allungamento passivo, non è in accordo con le relazioni note fra diametro delle fibre e cronassia.

D'altra parte le correlazioni che i vari AA. hanno osservato fra diametro delle fibre nervee e cronassia sono state dedotte dai risultati d'indagini eseguite su fibre che in condizioni naturali hanno un diametro diverso, mentre le presenti ricerche concernono gli effetti delle variazioni di diametro prodotte artificialmente nelle fibre stesse. L'accorciamento cronassico riscontrato nel nervo sottoposto a stiramento, va quindi esaminato in rapporto non tanto con la variazione del diametro delle fibre, considerata in se stessa, quanto con le modificazioni dello stato strutturale delle fibre che la diminuzione del diametro comporta.

La diminuzione del diametro di una fibra nervea provocata dall'allungamento passivo, significa ravvicinamento delle membrane polarizzate della fibra medesima. I rapporti che esistono tra distanza delle membrane polarizzate ed eccitabilità, sono deducibili dalla formula completa stabilita da Hill <sup>(20)</sup>

(10) L. LAPICQUE et R. LEGENDRE, «C. r. Acad. Sci.», CXCVII, 1163 (1913).

(11) L. LAPICQUE, H. S. GASSER et A. DESOILLE, «C. r. Soc. Biol.», XCII, 9 (1925).

(12) L. LAPICQUE, H. DESOILLE et A. DESOILLE «C. r. Soc. Biol.», XCVII, 123 (1927).

(13) A. KREINDLER, «C. r. Soc. Biol.», XCVII, 125 (1927).

(14) A. R. MOORE u. E. T. BRÜCKE, «Pflüger's Arch.», CCXXVIII, 619 (1931).

(15) E. A. BLAIR a. J. ERLANGER, «Amer. J. Physiol.», CVI, 524 (1933).

(16) C. L. PROSSER a. A. H. CHAMBERS, «J. gen. Physiol.», XXI, 781 (1938).

(17) L. LAPICQUE et A. PÉZARD, «C. r. Soc. Biol.», CXXV, 808 (1937).

(18) L. LAPICQUE, «C. r. Soc. Biol.», CXXX, 945 (1939).

(19) D. H. BARRON, «Amer. J. Physiol.», CIII, 651 (1933).

(20) A. V. HILL, «J. Physiol.», XL, 190 (1910).



per l'intensità liminale della corrente costante [cfr. Bouckaert <sup>(21)</sup>]. In questa formula, la distanza tra le due pareti polarizzate interviene al denominatore, nel fattore del tempo che è in esponente, e nel parametro che rappresenta l'altezza della soglia [Lapicque <sup>(22)</sup>]. Le sue variazioni importano pertanto variazioni della eccitabilità in funzione del tempo, nel senso che col diminuire del valore della distanza tra le due pareti polarizzate, il valore della soglia cresce e quello del tempo diminuisce.

Un altro fattore che può intervenire a causare l'accorciamento cronassico del nervo stirato, può essere l'assottigliamento del tessuto inerte del nervo stesso. Secondo Grundfest <sup>(23)</sup>, la cronassia è largamente influenzata dalla quantità del tessuto connettivo esistente intorno al nervo: così, le misure di cronassia eseguite su una branca nervea del preparato di membrana retrolinguale di *R. pipiens*, hanno mostrato che nei tratti del nervo in cui lo strato connettivo è più spesso, la cronassia è più lunga che nei tratti meno ricchi in connettivo. In modo analogo, Bishop <sup>(24)</sup> e Tasaki <sup>(25)</sup> hanno visto come la cronassia delle fibre nervee di Rospo si accorcia notevolmente quando si proceda alla rimozione del tessuto connettivo che circonda le fibre.

Credo infine opportuno rammentare le considerazioni che Tobias <sup>(26)</sup> ha svolte a fine d'interpretare le variazioni della dispersione della luce che è data dal nervo stirato del pereopode di *Carcinus maenas*. Tale nervo, per effetto dello stiramento presenta un comportamento ottico [Bryant e Tobias <sup>(27)</sup>] del tutto analogo a quello riscontrato da Hill <sup>(28, 29)</sup> nel nervo del pereopode di *Maia squinado*, tenuto immerso in liquido ipotonico. Nell'una e nell'altra condizione sperimentale, le variazioni della dispersione della luce per parte del nervo dipenderebbero dall'aumento della pressione idrostatica interna del nervo stesso: questo, sottoposto ad allungamento passivo, si comporta <sup>(26)</sup> come se avesse guadagnato acqua. Ora, è possibile che gli effetti dell'aumento della pressione idrostatica influenzino la eccitabilità: si consideri l'accorciamento della cronassia che si osserva per un aumento della imbibizione del tessuto eccitabile [Lapicque e Legendre <sup>(30)</sup>, Lapicque <sup>(31)</sup>, Pupilli <sup>(32)</sup>].

L'abbassamento del livello di polarizzazione del nervo sottoposto a stiramento passivo, può in modo soddisfacente interpretarsi sul fondamento di quegli stessi fattori che valgono a spiegare la variazione cronassica del nervo

(21) L. P. BOUCKAERT, «C. r. Soc. Biol.», CXI, 1063 (1932).

(22) L. LAPICQUE, *L'excitabilité en fonction du temps*. Paris, Presses universitaires de France, 1926.

(23) H. GRUNDFEST, «J. Physiol.», LXXVI, 95 (1932).

(24) G. H. BISHOP, «Amer. J. Physiol.», LXXXV, 417 (1928).

(25) I. TASAKI, «Amer. J. Physiol.», CXXV, 367 (1939).

(26) J. M. TOBIAS, «Cold Spring Harbor Symp. quant. Biol.», XVII, 15 (1952).

(27) S. H. BRYANT e J. M. TOBIAS, «J. cell. comp. Physiol.», XL, 199 (1952).

(28) D. K. HILL, «J. Physiol.», CXI, 283 (1950).

(29) D. K. HILL, «J. Physiol.», CXI, 304 (1950).

(30) L. LAPICQUE et R. LEGENDRE, «C. r. Acad. Sci.», CLVIII, 803 (1914).

(31) L. LAPICQUE et M. LAPICQUE, «C. r. Soc. Biol.», LXXVII, 288 (1914).

(32) G. C. PUPILLI, «Arch. Farmacol. sper. Sci. aff.», LV, 35 (1933).

stesso. La polarizzazione del N. ischiatico di Rana, infatti, diminuisce, quando il nervo medesimo è privato del suo epineurio [Rössel<sup>(33)</sup>]. E Rashbass e Rushton<sup>(34)</sup>, i quali hanno misurato in una fibra nervea il potenziale esterno, quello del fluido interstiziale e quello proprio del nucleo della fibra, hanno mostrato l'importanza dell'epineurio nel determinare i valori di tali potenziali. D'altra parte, il comportamento ottico del nervo del pereopode di *Carcinus maenas* sottoposto a stiramento, secondo le osservazioni di Bryant e Tobias<sup>(27)</sup>, corrisponderebbe a quello che si ritrova in un tratto di nervo sottoposto alla polarizzazione catodica [Tobias<sup>(35)</sup> p. 291].

Il che avvalora indirettamente le ipotesi prospettate, circa alla influenza che l'allungamento passivo del nervo esercita sulla sua eccitabilità.

**Fisiologia vegetale.** — *Ricerche sulla fisionomia respiratoria caratteristica di tessuti in fase di attiva crescita protoplasmatica. Deidrogenasi a TPN e deidrogenasi a DPN* (\*). Nota di ERASMO MARRÈ e ORIETTA SERVETTAZ, presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

Dai recenti progressi della biochimica della respirazione due aspetti di particolare interesse emergono con sempre maggiore evidenza: primo, la complessità e la molteplicità delle vie degradative simultaneamente presenti nello stesso tessuto e l'ampia possibilità di connessione e di scambio tra le medesime; secondo, la difficoltà di tracciare una netta linea di demarcazione tra catabolismo energetico e anabolismo plastico in quanto continuamente, nell'organismo, cataboliti parzialmente demoliti e ossidati vengono ripresi, convogliati nella corrente anabolica e utilizzati per la sintesi di composti della più varia importanza strutturale.

È chiaro come questi due aspetti della respirazione, molteplicità di vie degradative da un lato, interesse anabolico dei vari metaboliti intermedi respiratori dall'altro, siano tra loro connessi e interdipendenti; infatti, come dalla natura dei sistemi degradativi dominanti in un dato tessuto dipende la comparsa o meno di composti capaci di influire sulle caratteristiche strutturali della cellula, così queste a loro volta condizionano, nella medesima cellula, tutte le attività metaboliche, e quindi anche quelle enzimatiche, implicate nei processi respiratori.

Nasce così un problema di fondamentale interesse fisiologico: e cioè se sia possibile individuare una corrispondenza tra tipo di sistemi respiratori dominanti in un tessuto e attività biologiche caratteristiche di quel

(33) W. RÖSSEL, « Pflüger's Arch. », CCXLVI, 543 (1943).

(34) C. RASHBASS e W. A. H. RUSHTON, « J. Physiol. », CX, 110 (1949).

(35) J. M. TOBIAS, *Modern trends in physiology and biochemistry*. New York, Academic Press, 1952.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.

tessuto stesso; in altri termini, il problema del rapporto tra fisionomia respiratoria e fisionomia funzionale.

La presente ricerca rappresenta un tentativo verso l'individuazione dei sistemi respiratori dominanti in tessuti caratterizzati da una particolare attività funzionale, e cioè quella di attiva sintesi di protoplasma. Poiché un precedente lavoro <sup>(1)</sup> ci aveva dimostrato per questi tessuti un altissimo tenore in glucosio-6-fosfato deidrogenasi, enzima che condiziona la sequenza di reazioni che porta all'ossidazione diretta dell'esosiomonofosfato, abbiamo voluto, in un primo tempo, determinare come variasse, in tessuti a diversa attività di crescita, il rapporto tra l'attività di questo enzima e quella di uno degli enzimi caratteristici della via glicolitica ossidativa classica, e cioè la piruvico deidrogenasi. Avendo queste esperienze messo in rilievo una netta corrispondenza tra attività di crescita protoplasmatica e dominanza relativa dell'attività della glucosio-6-fosfato deidrogenasi (che ha per coenzima il trifosfo-piridin nucleotide, TPN, Anderson et al. <sup>(2)</sup> rispetto quella della piruvico deidrogenasi (a difosfo-piridin nucleotide, DPN, Laties <sup>(3)</sup>), abbiamo affiancato alla determinazione di questi enzimi quella di un'altra coppia di deidrogenasi, la isocitrico (a TPN, Berger e Avery <sup>(4)</sup>) e la malico deidrogenasi (a DPN, Berger e Avery <sup>(5)</sup>). Anche in questo caso il rapporto tra l'attività dell'enzima a TPN e quella dell'enzima a DPN è risultato di molto più elevato nei territori in fase di intensa sintesi protoplasmatica che in quelli a fisionomia più statica.

**MATERIALE E METODI.** - L'attività delle diverse deidrogenasi è stata determinata in estratti ottenuti dai diversi territori di piantine eziolate di *Pisum sativum* var. Alaska coltivate per 8-10 giorni all'oscurità e a temperatura di 25 gradi C., su vermiculite. Gli estratti venivano preparati tritando il tessuto in mortaio in tampone ai fosfati a pH 7,3, filtrando su garza e centrifugando per 10 minuti primi a circa 800 g., allo scopo di eliminare il residuo insolubile, comprendente gruppi di cellule integre. Sull'estratto così ottenuto l'attività deidrogenasica veniva determinata, dopo aggiunta dei diversi cofattori e substrati, sia mediante la tecnica al bleu di metilene, di Thunberg (Umbreit et al. <sup>(6)</sup>), sia mediante una nostra modifica di quella colorimetrica al cloruro di trifetil tetrazolio <sup>(7)</sup>. Come reagenti abbiamo usato acido citrico e acido piruvico della « Bios » di New York, acido malico della

(1) E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Rendiconti Istituto Lombardo Sc. e Lett. » (1954) (in corso di stampa).

(2) D. G. ANDERSON, H. A. STAFFORD, E. E. CONN e B. VENNESLAND, « Plant Phys. », 27, 675-684 (1952).

(3) G. G. LATIES, « Physiologia Plantarum », 6, 199-214 (1953).

(4) J. BERGER e G. G. AVERY, « Am. Journ. Bot. », 31, 11-19 (1944).

(5) J. BERGER e G. G. AVERY, « Am. Journ. Bot. », 30, 290-297 (1943).

(6) W. W. UMBREIT, R. H. BURRIS e J. F. STAUFFER, *Manometric Techniques and Tissue Metabolism*. Burgess-Minneapolis (1949).

(7) E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Giornale di Biochimica » (1954) (in corso di stampa).



«Ciba», glucosio-6-fosfato, DPN e TPN della «Sigma» di St. Louis e cloruro di trifenil tetrazolio della «Merck». Le soluzioni dei diversi substrati venivano preparate al momento dell'uso; gli acidi portati a pH 7,3 con NaOH, e il glucosio-6-fosfato, fornito come sale di bario, trasformato in sale sodico per aggiunta di solfato di sodio in lieve eccesso, seguita da centrifugazione.

Un grave inconveniente della procedura adottata consiste negli alti valori dell'attività endogena, che per certi tessuti compaiono in estratti grezzi. Ma a tale inconveniente avremmo potuto ovviare soltanto mediante purificazione degli estratti, per precipitazione degli enzimi o per dialisi; procedimento ovviamente suscettibile di determinare perdite di attività non controllabili e variabili per i diversi enzimi considerati; mentre negli estratti grezzi da noi usati l'attività delle quattro deidrogenasi studiate è apparsa soddisfacentemente costante per tutta la durata dell'esperienza.

ESPERIENZE E RISULTATI. — Nelle piantine di pisello, prelevate quando avevano raggiunto una lunghezza di circa 8 cm., l'attività delle diverse deidrogenasi è stata determinata su estratti ottenuti dai seguenti territori:

a) zona apicale, comprendente piumetta, gemma apicale e un mm. circa della parte sottostante. Tutti i tessuti di questo territorio sono, allo stadio considerato, in fase di attiva crescita protoplasmatica;

b) parte distale del terzo internodio. Caratterizzato da crescita per distensione e da una certa attività di sintesi proteica;

c) parte distale del primo internodio. Crescita pressoché nulla.

d) cotiledoni. Nello stadio considerato questi organi sono in fase di avanzata demolizione e smobilitazione delle riserve;

e) tratto prossimale della radice. Crescita praticamente trascurabile;

f) apice radicale, per una lunghezza di circa due mm. Intensa attività cariocinetica e di sintesi protoplasmatica.

Le attività delle diverse deidrogenasi negli estratti di questi territori risultano dai dati delle Tabelle I e II, tratte da due serie di esperienze scelte come rappresentative dell'andamento medio del fenomeno. Da esse si rileva come, mentre per tutte le deidrogenasi l'attività è massima in corrispondenza degli apici caulinare e radicale, pure il rapporto tra i diversi enzimi varia notevolmente per i diversi territori, l'attività delle deidrogenasi del glucosio-6-fosfato e del citrico prevalendo di gran lunga su quelle del malico e del piruvico nei territori ad alta attività di crescita, mentre i quattro enzimi tendono a raggiungere livelli sensibilmente vicini nei tessuti a fisionomia praticamente statica. Questo comportamento risulta chiaro dall'esame del rapporto tra attività degli enzimi a TPN e quella degli enzimi a DPN nei diversi territori considerati: rapporto da noi calcolato in base all'attività globale, senza sottrazione di quelle endogene, ma che comunque verrebbe a dare una versione anche più esaltata del fenomeno, qualora anche di queste ultime si tenesse conto nel calcolo.



TABELLA I.

*Attività glucosio-6-fosfato, isocitrico, malico e piruvico deidrogenasica nelle diverse parti di piantine eziolate di pisello. Composizione degli incubati: tessuto, 10 %; tampone ai fosfati 0,05 M; pH 7,3; substrati 0,04 M; DPN 250 gamma/cc.; TPN 30 gamma/cc.; TTC 0,2 %. Incubazione sotto vuoto. Temperatura 18° C. I dati rappresentano la media di due determinazioni.*

Substrato Coenzima				Attività in TTC ridotto in 1 ora	Rapporto tra attività enzimi a TPN attività enzimi aDPN.
Apice caulinare	—	—		41	3,4/1
»	»	—	TPN	39	
»	»	—	DPN	68	
»	»	glucosio-6-P	TPN	330	
»	»	citrato	TPN	303	
»	»	malato	DPN	98	
»	»	piruvato	DPN	89	
Terzo internodio	—	—		5	1,6/1
»	»	—	TPN	5	
»	»	—	DPN	8,5	
»	»	gl-6-P	TPN	35	
»	»	citrato	TPN	36	
»	»	malato	DPN	20	
»	»	piruvato	DPN	24	
Primo internodio	—	—		2	1,2/1
»	»	—	TPN	2	
»	»	—	DPN	4	
»	»	gl-6-P	TPN	15	
»	»	citrato	TPN	13	
»	»	malato	DPN	11	
»	»	piruvato	DPN	12	
Cotiledoni	—	—		9,5	1,2/1
»	»	—	TPN	39	
»	»	—	DPN	26	
»	»	gl-6-P	TPN	39	
»	»	citrato	TPN	44	
»	»	malato	DPN	39	
»	»	piruvato	DPN	30	
Apice radicale	—	—		22	3,6/1
»	»	—	TPN	19	
»	»	—	DPN	50	
»	»	gl-6-P	TPN	200	
»	»	citrato	TPN	205	
»	»	malato	DPN	62	
»	»	piruvato	DPN	51	

TABELLA II.

*Attività glucosio-6-fosfato, isocitrico, malico e piruvico deidrogenasica, in vari territori di piantine di pisello. Tecnica al bleu di metilene. Condizioni di incubazione come alla tabella I, ma bleu di metilene  $5 \cdot 10^{-5}$  anziché TTC.*

Substrato			Attività espressa dal tempo di decolorazione in minuti primi
Apice caulinare	—	(TPN)	oltre 150' m. p.
» »	—	(DPN)	» » » »
» »	gl-6-P	(TPN)	» 5 » »
» »	citrato	(TPN)	» 6 » »
» »	piruvato	(DPN)	» 19 » »
Primo internodio	—	(DPN)	oltre 150 » »
» »	gl-6-P	(TPN)	» 55 » »
» »	citrato	(TPN)	» 60 » »
» »	piruvato	(DPN)	» 70 » »
Cotiledoni	gl-6-P	(TPN)	» 40 » »
»	citrato	(TPN)	» 38 » »
»	piruvato	(DPN)	» 56 » »
Radice, parte pross.	—	(DPN)	oltre 150 » »
» » »	gl-6-P	(TPN)	» 33 » »
» » »	citrato	(TPN)	» 45 » »
» » »	piruvato	(DPN)	» 41 » »
Radice, apice	—	(DPN)	oltre 100 » »
» »	—	(TPN)	» 100 » »
» »	gl-6-P	(TPN)	» 8 » »
» »	citrato	(TPN)	» 8 » »
» »	piruvato	(DPN)	» 32 » »

Una particolare menzione merita il comportamento dei cotiledoni, in fase di involuzione e smobilitazione di riserve. In essi l'attività delle deidrogenasi a TPN, già di per sé ridotta, è da ritenere sia in realtà, nel tessuto integro, anche notevolmente inferiore a quanto non appaia dalle determinazioni su estratti. Infatti questi organi, a questo stadio, sembrano pressoché totalmente sprovvisti di TPN, come risulta dai dati di altri Autori (Oota et al. <sup>(8)</sup>) e anche dalle nostre esperienze riportate in Tabella III. Una notevole quantità di substrati ossidabili da enzimi a TPN è evidentemente presente negli estratti di cotiledoni: infatti l'aggiunta dell'estratto bollito di quest'organo a un estratto fresco di apici caulinari determina una riduzione del tetrazolio pari o maggiore di quella indotta dall'aggiunta, allo stesso estratto di apici, di una quantità optimum di glucosio-6-fosfato; ora si osserva come, malgrado questa abbondanza di substrati, l'attività endogena degli estratti di cotiledoni in assenza di aggiunta di TPN, sia bassissima, indice

(8) Y. OOTA, Y. YAMAMOTO e R. FUJII, «Journ. of Bioch.», 40, 187-203 (1953).

dell'estrema scarsità in questi estratti dello stesso coenzima. Appare quindi legittimo il sospetto che l'attività degli enzimi a TPN nel cotiledone integro sia, in conseguenza di questa carenza in coenzima specifico, ancora inferiore a quella, già ridotta, potenzialmente consentita dalla concentrazione in relativi apoenzimi.

TABELLA III.

*Abbondanza di substrati ossidabili da enzimi a TPN in estratti bolliti di cotiledoni. Effetto dell'aggiunta di 0,5 cc. di estratto bollito per 1 minuto primo, a concentrazione 20 %, a 0,5 cc. di estratto fresco al 20 %, di apici caulinari, in presenza o meno di glucosio-6-fosfato e TPN in eccesso. Tecnica al TTC, condizioni sperimentali come alla Tabella I.*

Composizione dell'incubato	$\gamma$ TTC ridotto in 1 ora
Estratto apici più tampone più TPN	10
» » » Gl.6-P più TPN	292
» » » estratto bollito cotiledoni	76
» » » estratto bollito cotiledoni più TPN	206
» » » estratto bollito cotiledoni più TPN più Gl.6-P	256

DISCUSSIONI E CONCLUSIONI. - In base a questi dati le deidrogenasi da noi studiate sembrano inquadrarsi in due gruppi: da un lato quelle attive sul glucosio-6-fosfato e sull'acido isocitrico, dall'altro la malico e la piruvico deidrogenasi. Nei tessuti in fase di attiva crescita protoplasmatica il rapporto tra l'attività delle prime due e quella delle seconde è molto elevato, raggiungendo valori di circa 3,5 a 1; in quelli a fisionomia più statica esso cade a valori molto più bassi (1,6 a 1, per i tessuti in fase di crescita per distensione 1,3 a 1 per le zone prossimali del fusto e delle radici, e per i cotiledoni).

Sembra quindi potersi affermare, pur con le riserve sempre necessarie circa il valore quantitativo di determinazioni enzimatiche su estratti, che i tessuti in rapida crescita protoplasmatica sono, almeno in questo materiale, caratterizzati da una prevalenza delle deidrogenasi del glucosio-6-fosfato e dell'isocitrico su quelle del piruvico e del malico.

Il parallelismo di comportamento tra glucosio-6-fosfato deidrogenasi e isocitrico deidrogenasi appare singolare, in quanto i due enzimi appartengono a vie respiratorie molto diverse (ossidazione diretta degli esosiomonofosfati, il primo, ciclo di Krebs, il secondo) e sono anche localizzati in strutture cellulari diverse (parte solubile del plasma, l'uno, condrioma, l'altro). Senonché almeno due importanti caratteristiche vengono condivise dai due enzimi. Ambedue appartengono al ristretto gruppo delle deidrogenasi a TPN: fatto interessante ai fini del nostro problema, in quanto già in un altro organo

a elevatissima capacità sintetica è stata rilevata una netta prevalenza del tenore in TPN su quello in DPN (Whatley<sup>(9)</sup>), e in quanto è noto (Vishniac e Ochoa<sup>(10)</sup>, Dickens<sup>(11)</sup>) che solo le deidrogenasi a TPN sono capaci di catalizzare processi di carbossilazione riduttiva, reazioni queste ultime di evidente interesse anabolico. In secondo luogo, isocitrico deidrogenasi e glucosio-6-fosfato deidrogenasi presentano in comune il fatto di occupare posizioni chiave sulle vie di connessione tra catabolismo energetico e processi anabolici: la prima in quanto dall'isocitrico porta, attraverso reazioni reversibili, all'acido alfa-chetoglutarico e all'acido glutamico, e congiunge quindi il metabolismo degli acidi organici con quello degli aminoacidi; la seconda in quanto condiziona la catena di reazioni reversibili che dal glucosio-6-fosfato conduce, passando per il fosfogluconato e il ribulosio fosfato, al ribosio-5-fosfato, essenziale per la sintesi dei nucleotidi, e, di conseguenza, degli acidi nucleici; fatto il cui interesse abbiamo già in altra nota sottolineato.

Concludendo, in base alle presenti ricerche la fisionomia dei tessuti in rapida crescita protoplasmatica sarebbe quindi contrassegnata dalla prevalenza di enzimi a TPN, rispetto agli enzimi a DPN; il che potrebbe essere posto in rapporto con la maggiore importanza dei primi nel catalizzare reazioni di fondamentale importanza anabolica.

**Citologia.** — *Contributo alla conoscenza morfologica e citochimica della spermatogenesi nei Prosobranchi. La spermatogenesi tipica in « Murex trunculus » L.*<sup>(\*)</sup>. Nota di BRUNO BATTAGLIA, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Il processo spermatogenetico si svolge nei suoi tratti essenziali con caratteristiche fondamentali comuni ai vari gruppi animali. I dettagli del processo stesso, tuttavia, presentano modalità che spesso differiscono sensibilmente persino nell'ambito di categorie sistematiche vicine.

Il semplice dato morfologico non permette di chiarire il significato di queste differenze. Il problema del loro eventuale valore funzionale può forse essere risolto corredando il dato morfologico con i dati di una rigorosa analisi citochimica comparata, i cui risultati permetterebbero innanzi tutto di stabilire se alla molteplice varietà che si riscontra, dal punto di vista morfologico, nell'andamento della spermatogenesi, faccia riscontro un diverso

(9) F. R. WHATLEY, « New Phytologist », 50, 244-257 (1951).

(10) W. VISHNIAC e S. OCHOA in *Phosphorus Metabolism*, vol. II, ed. Mc. Elroy and Glass-J. Hopkins Press, Baltimore (1952).

(11) F. DICKENS, « British Med. Bull. », 9, 105-109 (1953).

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Zoologia e Anat. Compar. dell'Università di Padova e la Stazione Idrobiologica di Chioggia, con contributi del Centro di Studi Talassografici del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.



comportamento citochimico. Ricerche recenti di altri Autori e mie, condotte su materiale diverso, sembrerebbero indicare l'esistenza di un simile rapporto. Non in tutti i casi però il materiale si presta a indagini del genere. Di qui la necessità di estendere le ricerche ad animali provvisti di cellule germinali sufficientemente grandi nelle quali sia possibile seguire i vari momenti della spermatogenesi e distinguere con chiarezza gl'interessanti particolari dell'ultima fase, quella della spermioistogenesi.

Tra i Gasteropodi Prosobranchi, dei quali mi sono sinora limitato a trattare il problema della spermatogenesi dimorfa, il *Murex trunculus* costituisce una delle specie più favorevoli a questo tipo di ricerche.

Nella presente Nota saranno riferiti alcuni aspetti morfologici e citochimici della spermatogenesi normale di *Murex* e verrà tentato un primo confronto con i dati di recente ottenuti su altro materiale <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup> <sup>(3)</sup> <sup>(4)</sup>. I risultati delle osservazioni sulla spermatogenesi atipica saranno oggetto di altra Nota.

Gli esemplari di *Murex trunculus* provengono dalla Laguna di Venezia (Chioggia) dove questa specie è abbastanza comune quasi tutto l'anno. Le gonadi e il deferente di maschi adulti maturi sono stati fissati e colorati con diverse tecniche. Per preparati d'insieme, gonadi e deferenti sono stati fissati in Zenker acetico, Helly, Bouin, Carnoy (3:1), inclusi in paraffina, sezionati a 7 micron e colorati con ematossilina Harris-eosina, oppure con ematossilina ferrica. Lo stesso tipo di fissazione e di colorazione è stato praticato su strisci di sperma, prelevato dal deferente, o di gonade. Sia lo sperma che il contenuto della gonade venivano diluiti con qualche goccia di acqua di mare. In certi casi, per mettere in evidenza particolari strutture, gli strisci venivano lasciati essiccare prima di essere fissati. Di solito però venivano fissati quando ancora umidi.

L'acido ribonucleico è stato messo in evidenza secondo la corrente tecnica del Brachet (fissaz. Helly o Carnoy; col. verde di metile - pironina o bleu di toluidina - soluz. all'1 %, pH 4 - con controllo in ribonucleasi). Per l'acido timonucleico si è praticata la reazione di Feulgen. Su strisci di sperma e di gonade fissati in alcool acetico sono state inoltre eseguite alcune fotografie in luce ultravioletta su 2650 Å utilizzando l'apparecchio Zeiss tipo Köhler di questo Istituto.

Per mettere in evidenza sostanze metacromatiche il materiale è stato fissato in acetato basico di piombo (soluz. acquosa al 4 %) e colorato con bleu di toluidina (soluz. acquosa al 0,5 %) per 30'.

Per la fosfatasi alcalina si è adoperata la più recente tecnica di Gomori <sup>(5)</sup> che comporta, rispetto alla formula originale, qualche modifica atta a ridurre al minimo gli artefatti dovuti per esempio a diffusione del fosfato di Ca o alla sua precipitazione in luoghi privi di attività enzimatica. Una discreta conservazione dei dettagli citologici è stata ottenuta adoperando come fissativo una miscela di alcool assoluto e di acetone a volumi eguali, alla temperatura di 4°.

Per la citochimica dei polisaccaridi si è usato il metodo di Hotchkiss (acido periodico-Schiff, PAS). La specificità di questa tecnica è stata sottoposta negli ultimi tempi a diverse critiche. Ho creduto pertanto utile praticare alcuni controlli consistenti nel far variare i tempi di ossidazione e nel praticare l'acetilazione dei gruppi glicolici in posizione 1,2 me-

(1) F. SCHRADER e C. LEUCHTENBERGER, «Chromosoma», 4, 404 (1951).

(2) M. H. G. FRIEDLANDER e M. J. FRASER, «Exp. Cell. Res.», 3, 462 (1952).

(3) B. BATTAGLIA, «Bollet. di Zool.», XVIII, 41 (1951).

(4) B. BATTAGLIA, «Bollet. di Zool.», XIX, 195 (1952).

(5) G. GOMORI, «Microscopic Histochemistry», Chicago 1952.

dante trattamento con anidride acetica-piridina, facendo talora seguire lo sblocco dei gruppi stessi mediante trattamento con KOH dopo l'acetilazione e prima dell'ossidazione. Primi tentativi di identificare la natura delle sostanze Hotchkiss positive sono stati eseguiti utilizzando i risultati delle colorazioni metacromatiche; ovvero sottoponendo i preparati a digestione amilasica (con saliva conc. a 37° per 30') prima di praticare la PAS; infine estraendo, prima della PAS, i glicolipidi con metanolo-cloroformio a caldo, secondo la tecnica di Gersh<sup>(6)</sup>.

La gonade maschile di *Murex trunculus* è suddivisa in follicoli ciascuno dei quali è rivestito da un sottile strato di tessuto connettivo con cellule a nucleo allungato, ovoidale. Sotto il rivestimento connettivale si trova l'epitelio germinativo. La perfetta fissazione di questa regione è indispensabile per il riconoscimento e la seriazione dei primi stadi di sviluppo degli elementi delle due linee spermatogenetiche. Gli Autori che hanno trattato l'argomento non sempre giungono a conclusioni concordi<sup>(7) (8) (9)</sup> sia per quanto riguarda la struttura dell'epitelio germinativo, sia per quanto riguarda il momento in cui s'instaura il differenziamento delle due linee – ammettendo che le cellule capostipiti si originino da un solo tipo di gonocita primitivo. La difficoltà di un precoce riconoscimento delle due linee era già stata da me prospettata in un precedente lavoro su altro materiale<sup>(3)</sup>. Le osservazioni sulla gonade di *Murex* confermano questa difficoltà.

Nell'epitelio germinativo di *Murex* ho potuto mettere in evidenza i seguenti tipi di cellule:

a) 'cellule nutrici' (Schitz)<sup>(7)</sup> contraddistinte da un grande nucleo polimorfo provvisto di 1 o 2 nucleoli. Queste cellule vanno incontro a modificazioni assai cospicue per cui, mentre in alcuni punti del follicolo possono presentare scarso citoplasma, nucleo dal contorno non troppo irregolare e un nucleolo piccolo, in altri punti sono abbondantemente provviste di citoplasma ed hanno nucleo plurilobato – spesso a 'ferro di cavallo' – con uno o due grossi nucleoli. L'aspetto complessivo della cromatina e il suo grado di dispersione pare non subiscano che alterazioni di lieve entità. Non è possibile decidere se queste cellule presentino fenomeni di poliploidia;

b) gonociti con scarso citoplasma (diam. 5,5 micron), nucleo sferico (diam. 4,5 micron), nucleolo non bene identificabile;

c) gonociti simili ai precedenti per forma e struttura salvo che per le dimensioni; qui il citoplasma raggiunge un diametro di 7 micron e il nucleo un diametro di 5 micron. Il nucleolo è poco evidente.

Le cellule di tipo b) e c) sono gli elementi da cui avranno origine le due linee. I primi andranno incontro alle divisioni maturative dando luogo agli spermatozoi tipici; i secondi, con le modalità che verranno descritte in altra Nota, daranno origine agli spermatozoi atipici, apirenici. Non è comunque

(6) I. GERSH, « Arch. of Path. », 47, 99 (1949).

(7) V. SCHITZ, « Arch. Zool. Exp. et Génér. », 59, 477 (1920).

(8) O. TUZET, « Arch. Zool. Exp. et Génér. », 70, 95 (1930).

(9) P. STEPHAN, « C. R. Soc. Biol. Paris », 55 (1903).

possibile escludere che le cellule di tipo *c*) derivino dalle cellule di tipo *b*); ciò ammesso, queste ultime dovrebbero considerarsi come spermatogoni comuni alle due linee, in parte dei quali, per cause non identificabili, ad un certo momento si instaura un processo di abnorme accrescimento nucleare e citoplasmatico culminante nella degenerazione e susseguente frammentazione del nucleo, fenomeno caratteristico della spermatogenesi atipica di molti Prosobranchi. Tale questione esula dagli scopi del presente lavoro. Pertanto mi limiterò a rilevare che il momento in cui è possibile distinguere con certezza una linea dall'altra è quello dell'entrata in meiosi da parte degli elementi tipici, fenomeno che non trova riscontro negli elementi atipici. Con gli Autori che mi hanno preceduto ammetterò, riservandomi di approfondire la questione in appresso, che i due tipi di cellule rappresentino i capostipiti delle due linee.

Praticamente nessuna diversità sussiste, dal punto di vista citochimico e limitatamente alle tecniche adottate, tra le cellule di tipo *b*) e quelle di tipo *c*).

I dati disponibili non mi permettono di confermare l'opinione di altri Autori <sup>(7) (8)</sup> circa la natura sinciziale dell'epitelio germinativo. In ogni caso, sia pure con difficoltà, ho potuto osservare anche nei gonociti più precoci una membrana cellulare. Il fatto che questa non è sempre nettamente delimitabile va messo in rapporto con quanto ho detto sopra circa la difficoltà di fissare in modo soddisfacente l'epitelio germinativo che è da ritenersi la porzione più delicata della gonade. Inoltre non mi è stato possibile osservare nell'epitelio germinativo quei nuclei 'indifferenziati' descritti dallo Schitz, dai quali, sempre secondo questo autore, si originerebbero gli spermatogoni delle due linee. È probabile che questi nuclei non rappresentino altro che momenti dell'evoluzione delle cellule 'nutrici' provviste, come si è detto, di nuclei notevolmente variabili per forma e dimensioni.

L'evoluzione morfologica della spermatogenesi tipica non presenta caratteristiche particolarmente rilevanti. Dagli spermatogoni (cellule di tipo *b*)) si passa agli spermatociti di 1° ordine attraverso un processo di auxocitosi che si manifesta specialmente nell'accresciuto diametro nucleare (5,5 micron). Seguono le due divisioni maturative, la formazione degli spermatidi e la finale spermioistogenesi. Nello spermatozoo maturo si distinguono tre porzioni principali che hanno la seguente estensione: pezzo cefalico, 28 micron; pezzo intermedio, 18 micron; pezzo caudale, 35 micron. Lo spermatozoo intero misura così complessivamente 80 micron circa.

La testa è sormontata da un acrosoma breve e sottile alla cui formazione partecipano materiali di origine periidiosomica insieme con la regione terminale anteriore di un filamento che attraversa nel senso della lunghezza la testa dello spermatozoo. Questo filamento ('*bâtonnet intranucleaire*' e '*filament chromatique*' degli altri Autori), che si comincia già a intravedere nelle prime fasi di allungamento dello spermatidio, e che per la prima volta è stato segnalato negli spermatozoi dei Prosobranchi dal Retzius <sup>(10)</sup>, trar-

(10) G. RETZIUS, « Biol. Untersuch. N.F.T. », XIII (1906).



rebbe origine – secondo lo Schitz – da materiali nucleolari; la Tuzet ritiene invece che esso derivi dal centriolo prossimale. Il reperto citochimico è, come vedremo, a favore di quest'ultima ipotesi.

Nel corso della spermatogenesi tipica il comportamento degli acidi nucleici non si discosta dagli schemi generali verificati su materiale vario <sup>(11)</sup> <sup>(12)</sup> <sup>(13)</sup>. Mentre cioè l'acido timonucleico rimane localizzato nel nucleo, quindi nella testa dello spermio maturo, senza subire modifiche citochimicamente apprezzabili, l'acido ribonucleico del citoplasma e del nucleo tende a diminuire man mano che la spermatogenesi procede, sino a scomparire dallo spermio maturo. In *Murex* non esiste tuttavia espulsione massiva di acido ribonucleico, come è stato riscontrato in altro materiale <sup>(12)</sup> <sup>(14)</sup>.

Anche per quanto riguarda il comportamento della fosfatasi alcalina si nota una netta diminuzione dell'enzima parallela al procedere della spermatogenesi. Negli spermatogoni si ha una decisa positività della reazione di Gomori nel nucleolo, una lieve positività nel citoplasma e una reazione praticamente negativa in corrispondenza della cromatina. In certi punti dell'epitelio germinativo in cui gli spermatogoni appaiono particolarmente numerosi e avvicinati tra loro, si constata una certa positività della cromatina. Ciò però può essere dovuto, più che ad effettiva presenza dell'enzima nel nucleo, a probabili fenomeni di diffusione dipendenti da una imperfetta fissazione della regione più basale dell'epitelio germinativo.

Negli stadi che seguono, la reazione di Gomori diventa sempre più debole. Lo spermatozoo maturo è, infine, completamente privo di enzima. Tale situazione è bene evidente nel deferente, dove la reazione completamente negativa degli ammassi di spermii contrasta con la forte positività della reazione stessa in corrispondenza del contiguo epatopancreas. L'assenza di enzima dallo spermatozoo maturo è un fatto tutt'altro che generale. Nella blatta *Popillia japonica*, per esempio, la reazione per la fosfatasi alcalina è positiva nella regione acrosomica <sup>(15)</sup>; e, per citare un altro caso, nello spermatozoo di montone varie regioni del pezzo cefalico e del pezzo intermedio danno una reazione per la fosfatasi alcalina lievemente positiva; assai più forte è, nello stesso materiale, la positività della reazione per la fosfatasi acida <sup>(2)</sup>.

La costante negatività della cromatina alla reazione di Gomori, durante la spermatogenesi di *Murex*, salvo le rare eccezioni dovute quasi certamente ad artefatti, è in accordo con i recenti risultati di Novikoff <sup>(16)</sup> e Gomori <sup>(17)</sup>. Gli esperimenti di questi due Autori dimostrerebbero che la positività della reazione per la fosfatasi alcalina nei nuclei è dovuta esclusivamente ad adsorbimento secondario del fosfato di calcio.

(11) J. BRACHET, « Arch. de Biol. », 53, 207 (1942).

(12) B. BATTAGLIA e P. OMODEO, « Caryologia », II, 1 (1949).

(13) B. BATTAGLIA, « Riv. di Biol. », 42, 27 (1950).

(14) J. PASTEELS, « Arch. de Biol. », 59, 405 (1948).

(15) J. M. ANDERSON, « Physiol. Zool. », 23, 308 (1950).

(16) A. B. NOVIKOFF, « Science », 113, 320 (1951).

(17) G. GOMORI, « J. Lab. and Clin. Med. », 37, 526 (1951).



La progressiva riduzione dell'enzima nel corso della spermatogenesi è da mettersi in rapporto con l'assenza, durante il processo stesso, di quelle sintesi di acido ribonucleico cui l'attività fosfataseica è di solito associata <sup>(18)</sup> <sup>(19)</sup>.

Colorazioni metacromatiche sono assenti per la maggior parte della spermatogenesi. Una lieve metacromasia appare nel nucleo dello spermatidio nel momento in cui il nucleo stesso comincia a contrarsi, e si conserva nella testa dello spermatozoo maturo. Il significato di questa osservazione, confrontabile con quella precedentemente eseguita nei Lumbricidi <sup>(12)</sup> rimane peraltro ancora oscuro.

Di particolare interesse è la distribuzione dei materiali acidofili e il comportamento della reazione di Hotchkiss.

Il citoplasma degli spermatogoni e degli spermatociti appare uniformemente eosinofilo; nello spermatidio invece l'eosinofilia è prevalentemente localizzata nell'idiosoma. L'acidofilia di questa regione può essere determinata dalla presenza di proteine basiche non legate ad acido ribonucleico. Anche in *Murex* dunque l'idiosoma avrebbe natura chimica fondamentalemente proteica, simile a quella descritta da Stefanelli e Urbani per l'idiosoma degli spermatozoi di cavia <sup>(20)</sup>.

Quando il nucleo dello spermatidio assume forma ad anello, la zona centrale appare fortemente eosinofila, e a mano che il nucleo si allunga, con corrispondente allungamento della cavità intranucleare, il materiale contenuto da quest'ultima - che viene a costituire il filamento intranucleare - mostra intensa eosinofilia. Altrettanto eosinofilo è poi il pezzo intermedio, mentre nella coda l'eosinofilia è assai più lieve e sembra limitarsi al filamento assile. L'acidofilia del filamento intranucleare e altre caratteristiche quali la PAS-negatività sono indice di affinità citochimica tra il filamento stesso e l'idiosoma. La fase di allungamento dello spermatidio fornisce anche un dato morfologico a sostegno della tesi secondo cui il filamento non avrebbe origine nucleolare, come sostenuto dallo Schitz. Alla sua formazione partecipano invece materiali idiosomici; ciò collima con le vedute della Tuzet circa l'origine centriolare del filamento intranucleare, pur non essendo possibile escludere una partecipazione mitocondriale.

In definitiva, nella maggior parte dei processi spermioistogenetici conosciuti la produzione di filamenti, di solito limitati al pezzo intermedio e alla coda, come il filamento assile, spetta all'attività del centriolo distale. Negli spermatozoi di alcuni Prosobranchi, di un Anellide (*Nereis*) e di un Opilione (*Opilio*) (ved. E. B. Wilson, *The Cell in development*, ecc., 1937) - i soli pochi casi in cui siano stati descritti filamenti intranucleari - anche il centriolo prossimale parteciperebbe alla formazione di filamenti.

Da alcune osservazioni a luce polarizzata compiute per investigare la struttura della testa degli spermatozoi nel Prosobranchio *Purpura lapillus*

(18) G. MONTALENTI e M. DE NICOLA, « *Experientia* », 4, 315 (1948).

(19) B. BATTAGLIA, « *Pubbl. Staz. Zool. Nap.* », 22, 79 (1949).

(20) A. STEFANELLI, « *Boll. Soc. Biol. Sper.* », 27, 186 (1951).

(H. G. Callan e B. Battaglia, osserv. inedite) è risultato che il filamento intranucleare e i mutamenti di forma che in esso si verificano in seguito a vari trattamenti sperimentali possono servire come strumenti indiretti per la comprensione delle modifiche strutturali submicroscopiche cui va incontro il nucleo dello spermatozoo e il suo acido timonucleico alla fine della spermioistogenesi.

Per quanto riguarda la reazione di Hotchkiss, l'unica regione che appare PAS-positiva, in una sezione del follicolo testicolare, è quella in corrispondenza del lume del follicolo stesso, ove si trovano gli spermatozoi maturi. Più precisamente la PAS-positività è localizzata nella coda degli spermatozoi. Ciò è stato possibile verificare anche su strisci di gonade. Vediamo così che mentre negli spermatogoni e in tutti gli stadi seguenti, sino a spermatidi avanzati, la reazione è negativa, essa insorge quando il processo di allungamento dello spermio è quasi ultimato e limitatamente alla parte esterna del pezzo caudale, rimanendo l'acrosoma, il resto del pezzo cefalico, il pezzo intermedio e il filamento assile della coda completamente PAS-negativi.

Un trattamento con anidride acetica-piridina della durata di 45' non sopprime la PAS positività. Questa scompare se il periodo di acetilazione viene portato a 90'. Il trattamento con KOH successivo all'acetilazione, secondo la tecnica di McManus e Cason<sup>(21)</sup>, reintegra la PAS-positività nella coda dello spermatozoo. È evidente che la reazione di Hotchkiss è data dai gruppi glicolici in posizione 1,2 di un carboidrato e non da gruppi simili appartenenti eventualmente a un glicolipide, come è dimostrato dall'applicazione del metodo di Gersh<sup>(6)</sup>: praticando infatti l'estrazione dei glicolipidi con metanolo-cloroformio per 24 h a 60°, la PAS-positività non viene soppressa. Di recente è stata ammessa la possibilità che un'ossidazione eccessivamente protratta distrugga la specificità della reazione<sup>(22)</sup>. Per non incorrere in questo rischio ho provato a far variare i tempi di ossidazione in acido periodico. Ne è risultato che la reazione è positiva anche quando il tempo di ossidazione venga ridotto ad 1 minuto; la reazione non ha invece luogo quando l'ossidazione non viene praticata.

Su materiale lasciato ad incubare in saliva concentrata a 37° per 30' la reazione è negativa.

Si pone adesso il problema dell'origine del polisaccaride nella regione caudale dello spermatozoo. Schrader e Leuchtenberger, studiando la citochimica degli spermii nel pentatomide *Arvelius albopunctatus*, hanno rivelato la presenza di un polisaccaride amilasi-resistente nell'acrosoma. Il carboidrato proviene dall'apparato del Golgi che presenta una reazione di Hotchkiss positiva già nello spermatocito I; nell'acrosoma esso si associa ad una proteina costituendo così un complesso interpretabile come un mucopolisaccaride. Gli autori americani, che hanno riscontrato questa situazione anche su altro materiale, formulano l'ipotesi che il mucopolisaccaride del-

(21) J. F. A. McMANUS e J. E. CASON, « J. Exp. Med. », 91, 651 (1950).

(22) J. F. LHOTKA, « Nature », 171, 1123 (1953).

l'acrosoma si identifichi con l'enzima ialuronidasi, assumendo così un ruolo fondamentale nel processo di fecondazione.

In *Murex* non avviene nulla di simile, in primo luogo perché il carboidrato non è precocemente localizzabile nell'apparato di Golgi, in secondo luogo perché trattasi di un polisaccaride amilasi-labile. Esso si origina probabilmente in dipendenza di quei materiali citoplasmatici ribonucleoproteici i quali nella spermatogenesi di *Murex* non subiscono alcun processo di espulsione dallo spermatozoo maturo. Un'analoga conversione di materiali citoplasmatici in glicogeno è stata descritta nelle cellule nutrici della gonade maschile di *Popillia japonica* <sup>(23)</sup>. Per il momento non è tuttavia possibile definire il significato funzionale del carboidrato presente nel pezzo caudale dello spermio di *Murex trunculus*. Tanto più che accanto a specie che presentano questa situazione (*Murex*, *Viviparus*) ne esistono altre in cui il polisaccaride dello spermio è localizzato nella parte cefalica (*Purpura*) - come in *Arvelius* - e altre ancora i cui spermatozoi maturi sono del tutto privi di polisaccaridi (*Columbella*, *Littorina*). Sarà interessante verificare se gli spermatozoi di *Murex* subiscono eventuali modifiche citochimicamente apprezzabili dopo essersi attaccati con l'acrosoma agli spermatozoi atipici, fenomeno di normale incidenza in questa specie <sup>(23)</sup>.

Dai risultati della presente ricerca su *Murex* e dai primi dati comparativi si può, in via generale, concludere che, come dal punto di vista morfologico, così anche da quello citochimico il fenomeno della spermatogenesi si svolge con modalità estremamente varie. È pur vero che i tratti fondamentali del processo citochimico sono comuni alle varie spermatogenesi note; tuttavia è presumibile che alle differenze di dettaglio, spesso assai sensibili anche tra specie vicine, sia da attribuire un significato funzionale. Le differenze stesse infatti interessano complessi chimici, come carboidrati ed enzimi, certamente coinvolti nel metabolismo del gamete.

È inoltre evidente che l'impiego di adeguate tecniche citochimiche permette talora di chiarire problemi morfologici non facilmente solubili impiegando le tecniche istologiche classiche. È significativa a questo riguardo la differenza riscontrata, nella delimitazione delle diverse parti dello spermatozoo, tra i miei dati, ottenuti utilizzando la reazione di Hotchkiss combinata con ematossilina Harris, e quelli di altri Autori, spesso discordanti <sup>(24)</sup>. L'indagine citochimica è servita, nel caso particolare, a introdurre un nuovo criterio, meno convenzionale, nella valutazione delle diverse parti del gamete maschile e della loro estensione.

(23) G. FADDA, «Mem. Comit. Talass. Ital.», Mem. 112 (1924).

(24) Si confrontino a questo proposito le figure illustranti gli spermatozoi di *Murex trunculus*, dei lavori dello SCHITZ e della TUZET (7) <sup>(8)</sup>.

**Morfologia.** — *Dispositivi di blocco in grosse arterie della loggia ascellare di feti di « Sus Scrofa Dom. »* <sup>(\*)</sup>. Nota di ARMANDO GOBETTO, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. LEVI.

In questi ultimi anni venne dimostrata in molte arterie di piccolo calibro l'esistenza di dispositivi di blocco atti a regolare il flusso sanguigno, indipendenti da anastomosi artero-venose. Il Bucciante distingue tre tipi di tali dispositivi: 1° le formazioni sfinteriche; 2° la muscolatura intimale con vari atteggiamenti: manicotti completi di muscolatura intimale longitudinale estesi a tutto il contorno del lume vasale, disposti ad intervallo lungo l'arteria; colonnette di muscolatura intimale e veri e propri cuscinetti intimali di limitata lunghezza, espansi in senso trasversale, formati da cellule muscolari lisce longitudinali o con trasformazione mioepitelioide degli elementi contrattili; le colonnette e i cuscinetti occupano un settore limitato del contorno del lume e possono essere singoli o multipli; 3° i cuscinetti polipoidi.

Dispositivi di chiusura furono rinvenuti in arterie di organi svariatisimi in individui di varia età, compresi per lo più nel periodo postnatale; un'estesa letteratura <sup>(1)</sup> tratta della morfologia di queste formazioni, prospettandone il significato funzionale. Raro è invece il reperto di tali dispositivi nelle arterie di feti. Ricordo a questo riguardo che cuscinetti intimali ben sviluppati furono rinvenuti da Bucciante in un'arteriola dell'ilo di un linfonodo mesenterico di un feto umano settimestre, da Danesino nei rami dell'arteria polmonare di feti oltre il 7° mese, da Tormene in un ramo arterioso del labbro superiore di un feto umano a termine.

Cuscinetti polipoidi furono descritti da Dal Zotto in piccole arterie capsulari del timo e dell'ipofisi di feti umani di 180-220 mm. di lunghezza, da Danesino in un ramo anastomotico tra arteria epigastrica inferiore ed arteria otturatoria in feti umani a termine, da E. ed H. Legait nell'arteria carotide cerebrale di feti di maiale di 100 mm. di lunghezza.

Nel corso di un lavoro tendente ad altro fine, ebbi l'occasione di osservare l'esistenza di dispositivi di blocco in un'arteria relativamente voluminosa della loggia ascellare di feti di maiale; ho istituito allora una serie di ricerche col preciso scopo di studiare tali formazioni.

Furono utilizzati 22 feti di maiale compresi tra 100 (fine 2° mese) e 220 mm. (quasi a termine) di lunghezza.

(\*) Ricerche compiute presso il Centro di Studi sull'accrescimento e presso l'Istituto di Anatomia degli animali domestici dell'Università di Torino.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) Per indicazioni bibliografiche rimando alla relazione del BUCCIANTE al Convegno di Torino della Società Italiana di Anatomia («Monit. zool. ital. Suppl.», 57, II (1949).



In 12 casi ho rintracciato in una grossa arteria della regione in esame un ben sviluppato dispositivo di blocco che per le sue caratteristiche appartiene al tipo dei cuscinetti polipoidi. Unito alla parete dell'arteria per mezzo di un tozzo peduncolo, esso si spinge nell'interno del vaso per una notevole lunghezza; nella parte distale si rigonfia a clava e si fa mammellonato, riducendo il lume ad una sottile fessura. Quando la propaggine polipoide è colpita dal taglio distalmente alla zona d'impianto del peduncolo, appare libera nell'interno del lume, ma le sezioni in serie dimostrano in ogni caso la sua continuità con la parete del vaso.

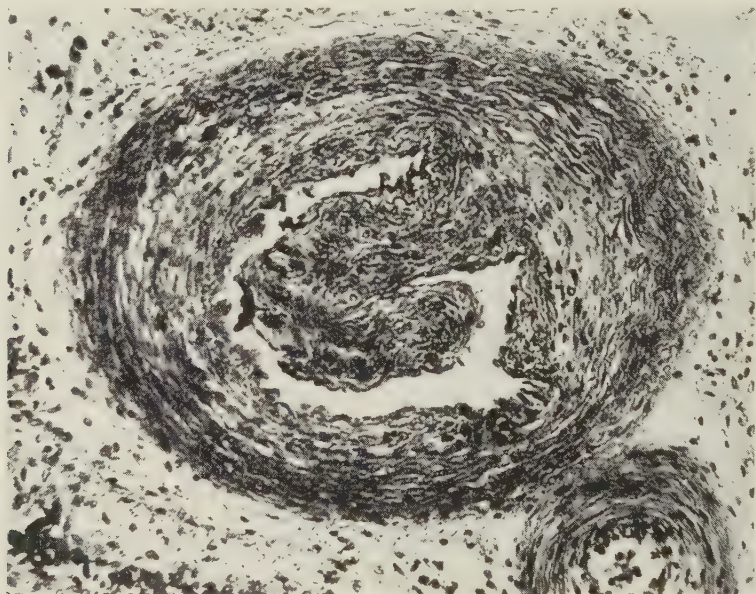


Fig. 1. - Grossa arteria con cuscinetto polipoide della loggia ascellare in feto di maiale di 150 mm. di lunghezza. Color. Azan. Ingrand. 200×

Il cuscinetto risulta di tutti i componenti istologici delle tonache della parete arteriosa, la quale, in un settore limitato del vaso, corrispondente alla regione del peduncolo, si invagina nel lume. La sua struttura è identica a quella della parete del vaso. Nei diversi stadi di sviluppo le sue caratteristiche si modificano parallelamente alle trasformazioni strutturali alle quali va incontro la parete arteriosa.

In feti di 150-220 mm. l'endotelio che riveste la formazione polipoide riposa su di una spessa lamina elastica, la quale a livello dell'attacco del peduncolo si continua con la membrana elastica interna dell'intima vasale. La maggior parte della compagine della gemma è dipendenza della media arteriosa e ne ripete la struttura: risulta di vari strati di tipiche cellule muscolari lisce circolari ed oblique inframmezzate da numerosissime membranelle elastiche concentriche, più sottili dell'elastica interna; esili fibre oblique riuniscono tra loro le singole lamine elastiche (fig. 1).

Mentre nei cuscinetti polipoidi descritti nella letteratura, soltanto scarso tessuto elastico accompagna gli elementi contrattili, nel nostro caso il componente elastico è invece abbondantissimo e la stessa ricchezza di materiale elastico caratterizza anche la parete arteriosa.

L'asse della gemma è costituito da una certa quantità di un connettivo lasso, povero di cellule e privo di elementi elastici, contenente qualche capillare; questo connettivo è in continuità, a livello della zona d'impianto del peduncolo, con quello più denso dell'avventizia del vaso, la quale partecipa alla costituzione del cuscinetto polipoide. L'asse collagene si assottiglia procedendo verso la parte distale della gemma, esaurendosi prima della sua terminazione.

Il cuscinetto polipoide è ben sviluppato già in feti di 100 mm. (fig. 2). A questo stadio la parete arteriosa è ancora in via di formazione: nell'intima è già differenziata un'esile membrana elastica interna, mentre tra gli elementi contrattili della media il materiale elastico è ancora assente. Anche la compagine della gemma polipoide risulta a tal epoca quasi esclusivamente di cellule muscolari, senza fibre elastiche.

In stadi precoci il cuscinetto da noi osservato ha quindi una struttura diversa da quella delle formazioni polipoidi, costituite quasi esclusivamente da collagene, rinvenute recentemente da Dal Zotto in piccole arterie capsulari del timo e dell'ipofisi in feti umani di 180-220 mm.

Col progredire dello sviluppo il cuscinetto va incontro, parallelamente all'accrescimento del vaso, ad un notevole aumento di volume ed acquista le caratteristiche strutturali descritte. In un feto di 200 mm., nel quale fu eseguita una ricostruzione grafica, la sua lunghezza risultava di circa 850  $\mu$ .

Non ho potuto finora individuare con esattezza l'arteria nella quale ha sede il dispositivo di blocco. Posso però affermare che esso si trova o nell'arteria sottoscapolare oppure all'origine di uno dei suoi grossi rami collaterali e presumibilmente nell'arteria circonflessa posteriore dell'omero. In un feto di 200 mm. l'arteria interessata aveva un diametro esterno di circa 620  $\mu$  mentre l'ascellare raggiungeva i 950  $\mu$ .

Come è stato notato frequentemente nelle arterie provviste di cuscinetti polipoidi, anche nel mio caso dal tronco arterioso si stacca, nel tratto immediatamente a monte rispetto alla gemma, una sottile collaterale. La funzione del cuscinetto è evidentemente quella di regolare il flusso sanguigno nel ramo principale ed in quello secondario. Quando i suoi elementi muscolari sono rilassati, è possibile l'afflusso di sangue in ambedue i rami; quando

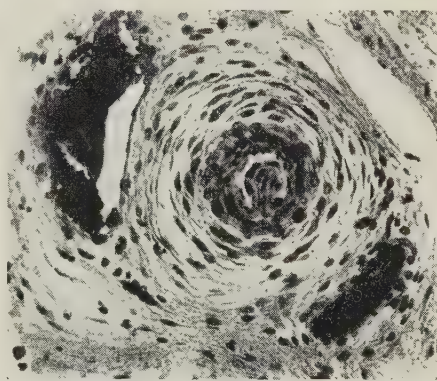


Fig. 2. - Formazione polipoide in un'arteria della loggia ascellare di feto di maiale di 100 mm. di lunghezza. La parete arteriosa è in via di formazione.

sono contratti invece, il tronco principale è escluso del tutto oppure in parte dalla corrente e la maggior parte del sangue è costretta a prendere la via delle collaterali.

Non mi risulta che fino ad oggi dispositivi di blocco siano stati rinvenuti in arterie tanto voluminose quanto quella da me riscontrata. Rimane da stabilire quale sia il destino della formazione polipoide nella vita postnatale, se persiste o scompare. Questo mi propongo di fare in avvenire.

**Genetica.** — *Fenomeni di semilettalità in sporidi di « Ustilago kolleri » Wells<sup>(\*)</sup>*. Nota di VINCENZO GRASSO, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio A. CHIARUGI.

Durante le ricerche sulla genetica di uno dei carboni dell'avena: *Ustilago kolleri* Wells, di cui riferirò più estesamente in un'altra comunicazione, notavo come dei quattro sporidi isolati nelle posizioni *a-b-c-d* dal basidio di clamidospore raccolte a Parma e coltivate su patate destrosio agar, due si accrescessero e due no (fig. 1). Lo stesso comportamento avevano quando li trapiantavo in beute sul medesimo substrato. Inoltre appaiando su acqua agarizzata quelli delle colonie accresciute, sia che provenissero dalla stessa clamidospora o da diverse, non osservavo mai tra loro fusioni o lo sviluppo di ife aeree, per cui i risultati erano sempre come nella Tabella I.

Nonostante avessi provato diversi esempi di combinazione, tuttavia non osservavo mai alcuna fusione tra gli sporidi e quindi non mi era possibile concludere sul numero dei gruppi sessuali della collezione.

Christensen J. J. [2] osservava un caso simile per l'*U. zeae*, cioè combinando circa 63 sporidi isolati da 18 clamidospore di una galla, non otteneva mai fusioni; ma quando appaiava questi con sporidi da altre galle osservava molti tipi di segregazione sessuale. Dato ciò anche io eseguivo numerose combinazioni tra gli sporidi del carbone di Parma con quelli di altre località, ma non ottenevo mai più di due gruppi sessuali, come si rileva dalla Tabella II.

Non essendomi chiaro il comportamento della collezione di Parma e dubitando che negli isolamenti monosporidiali fossero stati commessi degli errori, isolavo dal basidio di circa altre 20 clamidospore i 4 sporidi nelle note posizioni di *a-b-c-d* e li combinavo tra di loro. Ma anche in questi casi metà degli sporidi degeneravano e metà si accrescevano e tra questi ultimi

(\*) Ricerche eseguite presso l'Istituto di Patologia vegetale dell'Università del Minnesota e quello del College di Agricoltura di Pullman (Wash.), usufruendo di una borsa di studio del Consiglio Nazionale delle Ricerche e di un viaggio Fulbright.

Mi è grato ringraziare vivamente il dott. E. C. Stakman, per avermi suggerito lo studio della genetica dei carboni dell'avena del quale fa parte questa Nota e i dottori J. J. Christensen, C. S. Holton, G. W. Fischer per i continui suggerimenti che mi sono stati preziosi ed indispensabili nell'affrontare tali ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.



non si notava mai alcuna fusione per cui mi convincevo che il carbone aveva un comportamento anormale.

Nel consultare la bibliografia, non molto estesa, riguardante il fenomeno appuravo che la mancanza di accrescimento dei due sporidi dei quattro, isolati da una clamidospora, era dovuto ad un fatto di semiletalità e che inoltre



Fig. 1. — Semiletalità in sporidi di *Ustilago kolleri* (collez. Parma) 1-2 sporidi in accrescimento normale; 3-4 sporidi in degenerazione ( $\times 216$ ).

l'assenza di fusione tra essi (per cui tutte le combinazioni davano (-), spiegava che la degenerazione riguardasse soltanto gli sporidi omosessuati.

Questa anormalità non è nuova nei microrganismi, ma neppure molto comune, poiché è stata segnalata solo per alcuni funghi: per la *Neurospora tetrasperma* [3], per la *Ustilago bullata* su *Agropyrum*, *Bromus*, *Festuca*, *Elymus* [4] e per una razza di *Tilletia foetida* [5], ma nessuna menzione è fatta per il carbone dell'avena <sup>(1)</sup>.

(1) I casi di letalità segnalati da CHILTON per l'*Ustilago zeae* [1] e da LASKARIS per la *Sphacelotheca sorghi* [6] sono dovuti ad una anormale germinazione delle clamidospore e quindi alla morte del promicelio.



La prima idea che può sorgere esaminando la Tabella I è che non verificandosi fusioni tra gli sporidi e quindi nessuno sviluppo di micelio aereo, il carbone non sia capace di produrre infezioni, sia cioè sterile. Ciò non è esatto poiché se sullo stesso mezzo, in luogo di far germinare una o due clamidospore si pongano gruppetti di esse, con la loro germinazione si sviluppino numerose ife aeree che, a ragione si debbono ritenere infettive. Infatti in prove eseguite in Pullman, infettando con le masse clamidosporiche le cariossidi dell'avena ho ottenuto un'altissima percentuale di piante infette <sup>(2)</sup>. Anche Fischer ha infettato alcune graminacee con clamidospore di *Ustilago bullata*, che, isolatamente, presentavano il fenomeno della semiletalità. Quello che presentemente mi sembra molto importante da accertare è come e quando si producano le fusioni e da esse si originino le ife infettive. Al riguardo ho fatto alcune prove preliminari.

TABELLA I.

*Risultati delle combinazioni di alcune linee monosporidiali da clamidospore di provenienza Parma (Pa).*

	Ca	b	Ac	d	Ha	Ic
Ca . . . . .	—	—	—	—	—	—
b . . . . .	—	—	—	—	—	—
Ac . . . . .	—	—	—	—	—	—
d . . . . .	—	—	—	—	—	—
Ha . . . . .	—	—	—	—	—	—
Ic . . . . .	—	—	—	—	—	—

C, A, H, I = clamidospore; a, b, c, d = posizione degli sporidi sul basidio

La tecnica che si usa per studiare in generale le fusioni tra gli sporidi degli *Ustilaginales* è di far germinare le clamidospore su patate-destrosio-agar e trasferire le singole basidiospore isolate in beute con lo stesso substrato e successivamente appaiarle su acqua agarizzata secondo lo schema desiderato. Nel caso mio, nel quale delle quattro basidiospore isolate nella posizione tipica due non si accrescono e quindi è inutile trasferirle, ma d'altronde si voglia vedere il loro comportamento sessuale, è consigliabile far germinare le clamidospore direttamente su acqua agarizzata. Così non solo si eliminano alcuni trapianti e quindi si guadagna tempo, ma si rendono possibili delle osservazioni che diversamente sarebbero molto difficili.

Nel raggruppare diversi sporidi, provenienti da uno, due, tre, quattro basidi, si osservano alcune fusioni, senza lo sviluppo di ife aeree, solo dopo 48 ore, mentre nel controllo, cioè un gruppo di clamidospore germinanti sullo stesso mezzo, le si notano subito dopo 24 ore e con uno sviluppo di numerose ife aeree.

(2) Ringrazio vivamente il dott. Holton per avermi fatto curare queste prove nelle serre del suo Laboratorio, dopo il mio ritorno in Italia.

TABELLA II.

Risultati delle combinazioni di alcune linee monosporidiali da clamidospore di provenienza: Parma (Pa), Windom, Minn. U.S.A. (Wi), Siracusa (Si), Firenze (Fi).

	Pa Ea	b	Wi Da	c	Si Ca	b	Fi Ea	Ga
PaEa . . . . .	—	—	—	+	+	—	+	—
b . . . . .	—	—	—	+	+	—	+	—
WiDa. . . . .	—	—	—	+	+	—	+	—
c . . . . .	+	+	+	—	—	+	—	+
SiCa . . . . .	+	+	+	—	—	+	—	+
b . . . . .	—	—	—	+	+	—	+	—
FiEa . . . . .	+	+	+	—	—	+	—	+
Ga . . . . .	—	—	—	+	+	—	+	—

Le lettere E, D... *a, b...* come C, A... *a, b...* della tabella I.

Naturalmente le fusioni, secondo un comune concetto di biologia, avvengono tra le basidiospore di segno opposto; nel caso specifico mio tra quelle provenienti dal gruppo in accrescimento e quelle dell'altro in degenerazione. Ma anche in queste combinazioni tra diversi sporidi, pur notandosi molte fusioni, non si ha alcuno sviluppo di micelio aereo per cui è da presumere che tali sporidi non producano infezioni come hanno dimostrato Holton e Fischer per alcune linee monosporidiali di *Ustilago perennans*, combinate con *U. avenae*, *U. levis* e *U. hordei*.

Poiché come ho detto le ife aeree si sviluppano dagli ammassi delle clamidospore e non da un raggruppamento di tre o quattro di esse, è interessante appurare: *a*) quale è il numero minimo di clamidospore o di sporidi che possano provocarne la formazione; *b*) se esse si sviluppino dalla fusione tra gli sporidi o da quella tra questi e i basidi; *c*) quali siano le condizioni del nucleo degli sporidi che presentano il detto fenomeno.

Questi ed altri fatti mi propongo di indagare con le ricerche in corso.

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] CHILTON ST. JOHN P., *The occurrence of lysis in certain crosses of « Ustilago zeae »* (Abs.) « Phytopat. », 28, 5 (1938).
- [2] CHRISTENSEN J. J., *Studies on the Genetics of « Ustilago zeae »*. « Phytop. Zeitschr. ». Bd. IV, 129-188 (1931).
- [3] DODGE B. O., *A lethal for ascus abortion in « Neurospora »*. « Mycol. », 26, 360-376 (1934).
- [4] FISCHER G. W., *Two cases of haplo-lethal deficiency in « Ustilago bullata » operative against saprophytism*. « Mycol. », XXXII, 3 (1940).
- [5] HOLTON C. S., *Methods and results of studies on heterothallism and hybridation in « Tilletia caries » and « T. foetida »*. « Phytopat. », XLI, 511-521 (1951).
- [6] LASKARIS T., *The occurrence of lysis in certain crosses of « Sphacelotheca Sorghi »* (Abs.). « Phytopat. », 29, 14 (1939).

**Biologia.** — *Sul differenziamento autonomo di neuroni di pollo in impianto in allanto-corion* <sup>(\*)</sup>. Nota di LAURA CHITI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

Problema preso in particolare considerazione nel nostro Laboratorio, partendo dalle ricerche di Stefanelli sulle cellule di Mauthner degli Anfibi, è quello del differenziamento specifico particolare dei neuroni.

In questo processo è stata considerata l'influenza di diversi fattori:

- a) proprietà intrinseche, autonome o ereditarie;
- b) fattori morfologici e morfogenetici;
- c) fattori fisiologici o funzionali che agiscono sul neurone.

Dalle ricerche di Stefanelli sulla cellula di Mauthner <sup>(1)</sup>, è risultato come la natura specifica particolare di questo tipo di neurone venga determinata in un periodo molto precoce dello sviluppo embrionale (determinazione istogenetica particolare). La determinazione è diretta da fattori morfologici (posizione topografica) e morfogenetici.

Una volta subita la determinazione particolare i neuroni anche isolati dall'organismo (trapianto in isolamento, espianto), si differenziano assumendo l'aspetto specifico particolare. Si notano in queste condizioni malformazioni imputabili anche a condizioni sperimentali che limitano l'accrescimento.

Molte condizioni, quali la decussazione della fibra, l'orientamento dell'assone, ecc., che altri autori avevano messo in rapporto a fattori neurobiotattici originati dall'attività funzionale di altri centri e vie, sono state dimostrate invece dovute alla intrinseca natura del neurone acquisita al momento della determinazione istogenetica.

Queste ricerche non escludono tuttavia, come certamente è, che l'attività funzionale di altri centri abbia effetto sulla struttura di determinati neuroni, come pure abbia effetto l'attività funzionale propria (fenomeni di ipertrofia o atrofia, reattività ecc.), ma dimostrano come non tutte le caratteristiche strutturali, e soprattutto quelle che attribuiscono il carattere particolare, sono causate da queste attività, ma sono manifestazioni di una intrinseca qualità acquisita.

Nella estensione di queste ricerche è stato dimostrato da Stefanelli che anche per altri neuroni altamente specializzati è valida la stessa considerazione. Così studiando pesci cavernicoli ciechi (1954) <sup>(2)</sup>, ha potuto constatare come i caratteristici neuroni a neurite ricorrente del tetto ottico non acquistano tale struttura per azione di antagonisti campi neurobiotattici, visivo

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia dell'Università di Roma, con un contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) A. STEFANELLI, «Mem. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. X, 1, 1947.

(2) A. STEFANELLI, lavoro in corso di pubblicazione su questo periodico.

e di sensibilità generale, come ritenne Leghissa, in quanto anche nei pesci ciechi si differenziano; quei pochi che si differenziano, con la stessa caratteristica strutturale.

Per dare una conferma a questa supposizione sono state fatte esperienze di sviluppo in impianto corion-allantoideo di frammenti di tetto ottico di embrione di pollo (Stefanelli e Chiti) <sup>(3)</sup>. Anche in condizioni di espianto, nel piccolo frammento si differenziano neuroni bipolari con il caratteristico neurite ricorrente. Ciò dimostra che l'orientamento di questo neurite non è determinato da campi neurobiotattici ma che è una intrinseca qualità della fibra che si orienta verso la parte dendritica della cellula; non è quindi il risultato di un effetto funzionale, né di centri e vie che circondano la cellula, né della cellula stessa che in espianto non può esplicare alcun lavoro fisiologico.



Fig. 1. - Schema dello stadio dell'embrione dal quale sono stati tolti i frammenti di abbozzi del cervelletto e del midollo spinale (circa 50 ore di incubazione).

Con questa Nota intendo illustrare alcuni altri casi atti a dimostrare che anche altri tipi di neuroni hanno la possibilità di un differenziamento autonomo, in isolamento, mediante espianti corion-allantoidei. Sono stati impiegati per queste ricerche embrioni di pollo (*Gallus domesticus*, razza livornese).

Frammenti di midollo spinale, di cresta gangliare, di cervelletto, tolti da un embrione a circa 50 ore di incubazione (fig. 1) sono stati impiantati sulla membrana corion-allantoidea di un ospite al 6° giorno di incubazione, quando tale membrana è già riccamente vascolarizzata. Verso il 10°-19° giorno di incubazione dell'ospite, prima cioè che avvenga l'essiccamento dell'allanto-corion, il frammento veniva prelevato, fissato e impregnato col metodo argenteo di Cajal-De Castro.

*Espianto dell'abbozzo del cervelletto.* - Data la elevata specializzazione strutturale dei neuroni di questo organo encefalico, i reperti ottenuti sono particolarmente convincenti. La fig. 2 A mostra le cellule di Purkinje di

(3) A. STEFANELLI e L. CHITI, Lavoro in corso di pubblicazione su questo periodico.



embrioni normali alla stessa età di quelle dell'espianto (fig. 2 B). Si può notare come il differenziamento anche in questa condizione di isolamento sia del tutto simile a quello delle cellule del cervelletto in sede normale. È da tener presente come la struttura ad alberello dei dendriti di questi neuroni potesse essere messa in relazione a effetti di stimolo delle fibre rampicanti; nell'espianto, ove queste fibre vengono a mancare, la cellula assume ugualmente

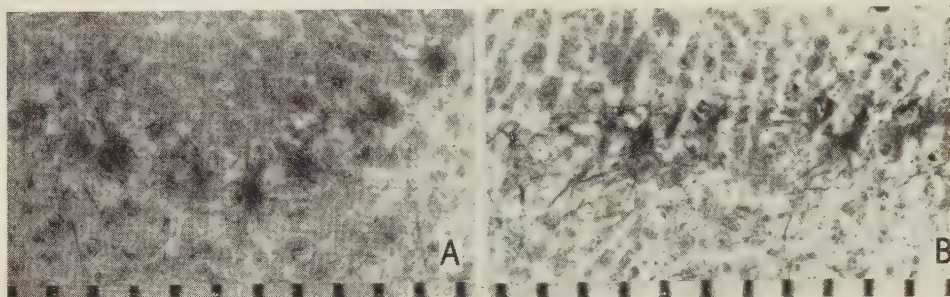


Fig. 2.

A) Struttura delle cellule di Purkinje di embrione di pollo dopo 15 giorni di incubazione. Metodo di Cajal-De Castro.

B) Struttura delle cellule di Purkinje di embrione di pollo in espianto della stessa età isolati allo stadio della fig. 1. Metodo Cajal-De Castro. Ogni divisione della scala in calce = 10  $\mu$ .

il caratteristico aspetto, per lo meno nel grado presentato allo stadio esaminato anche dalle cellule in sede normale.

Anche la neurofibrillazione appare normale, solo le dimensioni appaiono leggermente inferiori nelle cellule dell'espianto.

*Espianto di frammento di abbozzo del midollo spinale.* - La fig. 3 mostra l'aspetto generale dell'espianto di midollo dopo 15 giorni dall'inizio dello sviluppo.

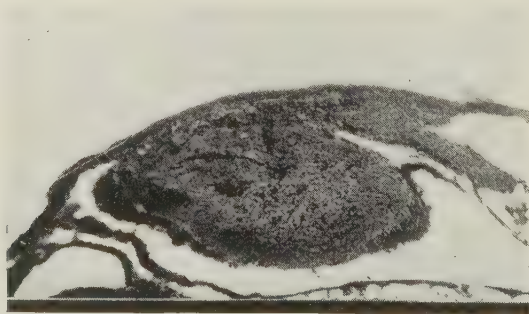


Fig. 3. - Aspetto generale dell'espianto di un abbozzo di midollo spinale di embrione di pollo isolato allo stadio della fig. 1, dopo 15 giorni di sviluppo. Metodo Cajal-De Castro.

La fig. 4 A mostra a forte ingrandimento lo stato di sviluppo di cellule motorie paragonate alle cellule di midollo normale di embrioni alla stessa età di sviluppo (fig. 4 B). Il differenziamento particolare è perfettamente corrispondente.

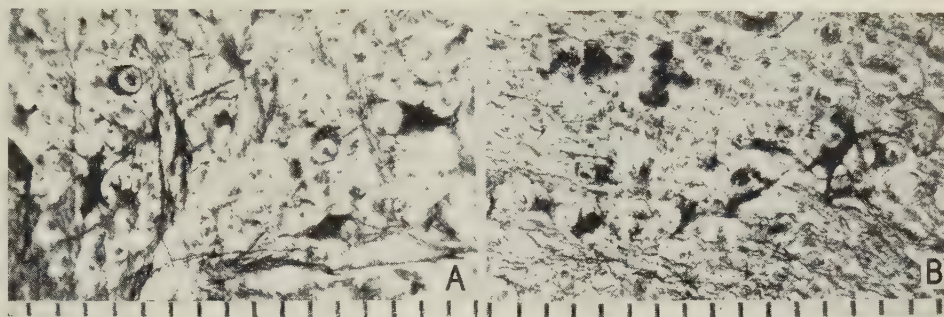


Fig. 4.

- A) Struttura delle cellule multipolari motorie dell'espianto di cui a fig. 3, fortemente ingrandite. Metodo Cajal-De Castro.  
 B) Struttura delle cellule multipolari motorie del midollo spinale di embrione di pollo, dopo 15 giorni di incubazione Metodo Cajal-De Castro.

*Espianto di frammento di cresta neurale.* — Nella fig. 5 B è rappresentato l'aspetto di un ganglietto espantato paragonato ad un ganglio spinale in sede normale di embrione della stessa età (fig. 5 A). La corrispondenza del differenziamento specifico particolare è evidente anche se in questo caso sia da notarsi nella costituzione generale del ganglio un maggiore addensamento delle cellule dovuto ad una minore quantità di fibre le quali risultano anche senza quel netto orientamento riscontrabile nel ganglio in sede normale.

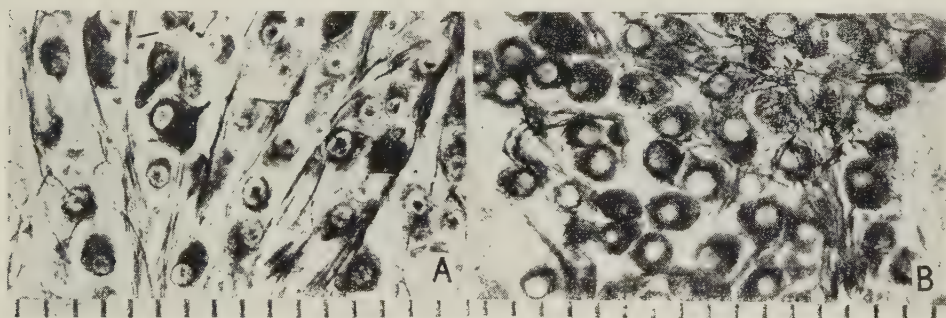


Fig. 5.

- A) Struttura delle cellule di un ganglio spinale di embrione di pollo dopo 15 giorni di sviluppo. Metodo Cajal-De Castro.  
 B) Struttura delle cellule di un ganglio spinale di embrione di pollo sviluppatosi in espianto dopo 15 giorni di incubazione. Metodo Cajal-De Castro.

Da queste osservazioni, collegate con le altre eseguite nel nostro Laboratorio, si può concludere che il differenziamento specifico particolare di neuroni, anche i più specializzati, è autonomo. E cioè dovuto a fattori intrinseci che, dalle ricerche di Stefanelli, risultano agire nei vari neuroblasti al momento della determinazione istogenetica particolare. È prima o durante questo periodo, dunque, che possono avere importanza nei fenomeni di iperplasia, fattori morfologici e morfogenetici.

Tale autonomia non è pertanto limitata, come è stato da qualcuno detto, ai neuroni motori e sensitivi ma è presentata anche da neuroni a funzionalità complessa quali i neuroni Mauthneriani, i neuroni del tetto ottico, le cellule di Purkinje del cervelletto. Nel differenziamento particolare non entrano quindi in giuoco fenomeni fisiologici, né di centri e vie nervose estranee ad un determinato neurone, né del neurone stesso.

I fenomeni funzionali, da quanto è dimostrato dalla letteratura, agiscono quindi in un secondo tempo nel mantenimento e nel perfezionamento delle strutture già acquisite. Ciò è dimostrato dai processi involutivi e degenerativi, dai fenomeni di ipoplasia in seguito a varie modificazioni funzionali provocate (asportazioni, resezioni, trapianti).

Altro problema che rimane ancora aperto è lo studio dell'azione dell'attività funzionale nella organizzazione della più minuta struttura dei neuroni specie nei riguardi dei sistemi sinaptici.

In conclusione è stato dimostrato come in frammenti di tessuto nervoso di embrioni di pollo, isolati prima dell'inizio del differenziamento (50 ore di incubazione) mediante impianti allanto-coriali, si abbia un normale differenziamento di elementi nervosi anche altamente specializzati (cellule di Purkinje).

Queste esperienze, collegate con le precedenti sul tetto ottico (Stefanelli e Chiti), documentano come il meccanismo di differenziamento autonomo dovuto a proprietà intrinseche sia non solo una condizione di elementi motori e sensitivi, ma anche di elementi di associazione, di correlazione e di coordinazione a funzionalità più complessa.

**Biologia.** — *Sul comportamento di vari tessuti di Teleosteo adulto impiantati nella camera anteriore dell'occhio di Rana*<sup>(\*)</sup>. Nota di BEPPINO GIOVANELLA e MARIO PECINI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

È nota da tempo l'estrema difficoltà di realizzare trapianti eteroplastici. Risultati positivi sono stati ottenuti solamente usando tessuti a bassa differenziazione.

In questo campo interessanti esperienze sono state eseguite da Cotronei e coll. che hanno indagato il problema della compatibilità fra embrioni di anfibi Anuri e Urodeli, ottenendo risultati positivi, che si mantengono anche fino a differenziazione relativamente avanzata. Date le moderne vedute della sistematica zoologica, tendente a considerare gli Anuri e gli Urodeli come due Classi distinte, basandosi su criteri genetici e morfologici, questi trapianti possono venire considerati come veri trapianti xenoplastici (Co-

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze della Università di Roma con un contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.



tronei e Spirito <sup>(1)</sup> 1929-1930-1931; Marcucci <sup>(2)</sup> 1931, Spirito <sup>(3)</sup> 1931, ecc.). Per quanto riguarda specificamente i trapianti di pesce su anfibio, notevole è il risultato di Oppenheimer <sup>(4)</sup> (1936), che ha trapiantato mezze blastule di *Brachidanio rerio*, nella cavità del blastocele di *Triturus torosus*.

Il tessuto di pesce si sviluppa e le sue cellule mesenchimali si mescolano con quelle dell'anfibio a formare un tessuto composto. Con l'avanzare del differenziamento si manifestano fenomeni di incompatibilità, in conseguenza dei quali la composizione perisce. Vari autori hanno ottenuto buoni attecchimenti eteroplastici impiantando tessuti a forte capacità proliferativa in sedi particolarissime, come la membrana corion-allantoidea (Swartz <sup>(5)</sup> 1946 - ratto su pollo; Kantz <sup>(6)</sup> 1952 - topo su pollo; Kaufman <sup>(7)</sup> et all. 1952 - uomo su pollo), il tessuto cerebrale (Greene <sup>(8)</sup> 1951), l'orecchio - metodo della camera trasparente, il testicolo (Greene <sup>(9)</sup> 1943-coniglio su cavia), la camera anteriore dell'occhio (Greene <sup>(10)</sup> 1941-topo su coniglio), nelle quali si hanno solo in piccola misura reazioni specifiche. Tali esperienze non possono però venir considerate come veri trapianti, nei quali si ha formazione di tessuto misto di elementi del trapianto e dell'ospite con unica funzione, ma piuttosto come espianti di tessuto coltivati *in vivo*. Infatti in tutti questi casi il tessuto trapiantato, o meglio impiantato, ha unicamente dei rapporti trofici (imbibizione e vascolarizzazione) con l'ospite, a spese del quale vive.

Eccetto i trapianti autoplastici, tutti gli altri presentano difficoltà di attecchimento, dovute alle differenze biochimiche (proteine eterologhe e formazione di anticorpi) fra i tessuti trapiantati e l'ospite. Tali difficoltà crescono con l'aumentare della differenziazione (gli anticorpi si formano tardivamente) ed è perciò che i tessuti adulti e altamente differenziati non possono essere trapiantati con completo successo (eccetto pochi casi ancora discussi, cornea di Filatow, ecc.). Per la stessa ragione i trapianti attecchiscono tanto meglio quanto più è giovane l'ospite (Cotronei, ecc.). Le sedi particolari che abbiamo citato permettono buone sopravvivenze e attecchimento limitato (vascolarizzazione), data la loro scarsa reattività specifica.

È stato nostro intendimento, con il presente lavoro, estendere le ricerche sulla compatibilità e incompatibilità dei tessuti, iniziate da Cotronei e coll., per mezzo di impianti nella camera anteriore dell'occhio.

(1) G. COTRONEI e A. SPIRITO, « Rend. R. Acc. Lincei », vol. 10 (1929); vol. 11 (1930); vol. 12 (1930) vol. 14 (1931).

(2) O. MARCUCCI, « Rend. R. Acc. Lincei », vol. 14 (1931).

(3) A. SPIRITO, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », vol. 6 (1931).

(4) J. OPPENHEIMER, « Proc. Soc. Exp. Biol. and Med. », vol. 34 (1936).

(5) G. SWARTZ, « J. Exptl. Zool. », vol. 103 (1946).

(6) J. KANTZ, « Cancer. Res. », vol. 12 (1952).

(7) N. KAUFMAN, L. PRIETO, E. MASON, T. KINSEY, « Am. J. Path. », vol. 28 (1952).

(8) H. GREENE, « Cancer. Res. », vol. 11 (1951).

(9) H. GREENE, « Cancer. Res. », vol. 3 (1943).

(10) H. GREENE, « J. Exptl. Med. », vol. 73 (1941).



In questa prima serie di ricerche abbiamo tentato di ripetere sui peccilotermi, e in particolare sugli anfibi (materiale classico di studio), ma con metodologia diversa e più organica, le esperienze già effettuate con successo sugli omeotermi da Greene.

Ci è sembrato opportuno per il nostro lavoro dare la preferenza alla camera anteriore dell'occhio, dati i numerosi vantaggi che essa presenta rispetto alle altre. Questi vantaggi sono a nostro avviso:

a) il fatto che i tessuti in essa impiantati attraversano una prima fase di vera e propria cultura in mezzo liquido, durante la quale vanno incontro a processi di sdifferenziazione e di assuefazione alle proteine dell'ospite, che li mettono in grado di entrare in rapporto con esso

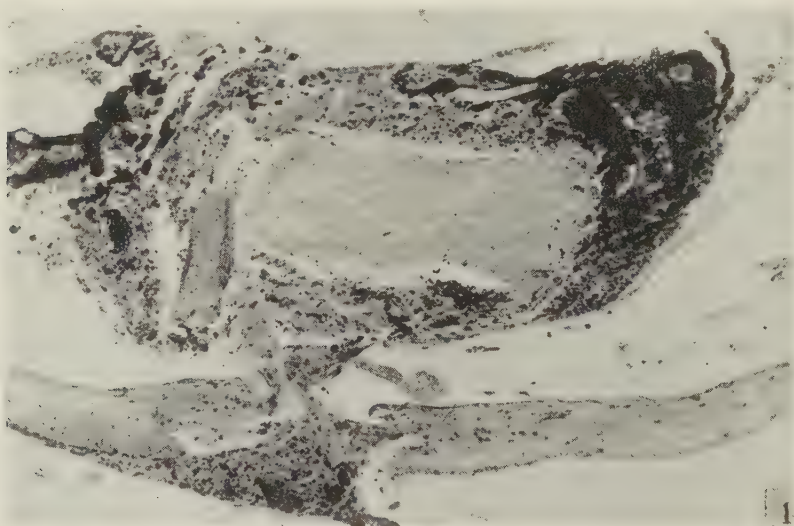


Fig. 1. - Impianto misto di tessuto muscolare, cartilagineo e melanico neoplastico in camera anteriore di Rana dopo 10 giorni. Notare la perfetta conservazione del tessuto cartilagineo, la proliferazione del tessuto melanico e la degenerazione del tessuto muscolare, nonché la proliferazione dell'epitelio corneale nella regione della ferita.

(vascolarizzazione), e quindi di sopravvivere indefinitamente e persino di invaderlo;

- b) la rapidità di cicatrizzazione delle ferite corneali;
- c) la facilità di ispezione dell'espianto inseritovi attraverso la cornea;
- d) la precoce vascolarizzazione, data l'abbondanza di vasi sanguigni nell'iride.

Le presenti ricerche si riferiscono ad innesti di vari tessuti adulti. La tecnica usata è stata la seguente: forata la cornea della rana con un grosso ago da paracentesi, abbiamo iniettato per mezzo di una pipetta un frammento del tessuto in esame, precedentemente dissezionato in liquido di Ringer, nella camera anteriore dell'occhio.

L'espianto, mediante una leggera pressione sulla cornea è stato spinto nell'angolo irido-corneale e quindi seguito con un binoculare da dissezione.

Gli occhi contenenti gli impianti dopo 10 giorni sono stati fissati in liquido di Bouin, sezionati serialmente a  $12\ \mu$  di spessore e colorati con ematossilina-eosina.

Il tessuto muscolare, osservato dopo 10 giorni dalla operazione, è andato incontro a completa degenerazione; esso appare come una massa amorfa, scarsamente colorata, in via di distruzione fagocitaria da parte dei macrofagi della rana.

La cartilagine si è invece conservata (fig. 1) e appare in buono stato benché un po' meno colorabile di quella normale. Non vi si osservano mitosi.

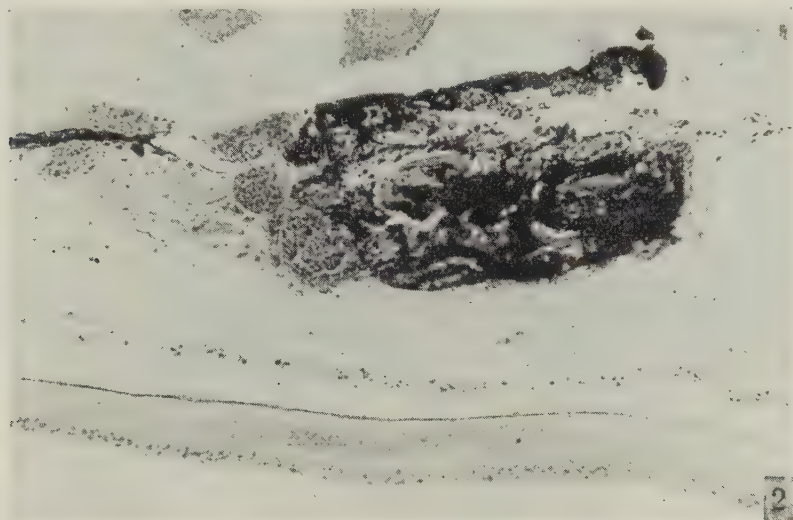


Fig. 2. — Impianto di melanoma in camera anteriore di Rana in cui si nota la vascolarizzazione da parte dell'ospite.

La sopravvivenza della cartilagine era però prevedibile data la natura del tessuto stesso che, come è noto, si nutre per imbibizione ed è resistentissimo in condizioni sfavorevoli.

L'epidermide e il derma degenerano rapidissimamente; al loro posto si trova una massa cellulare con residui nucleari colorabili con ematossilina.

I melanofori sono scomparsi; residuano grossi ammassi di melanina addensata.

Data la completa inerzia chimica di questa non si osservano reazioni apprezzabili da parte della rana.

Avendo avuti a disposizione ibridi di *Xiphophorus hellerii*  $\times$  *Platypoecilus maculatus* che, come è noto dalle osservazioni di Myron Gordon e della sua scuola<sup>(11)</sup> (1931-37 ecc.), manifestano dei melanomi spontanei di origine genetica (fig. 3)<sup>(12)</sup>, abbiamo creduto opportuno, oltre ai trapianti

(11) M. GORDON, «Am. J. Cancer.», vol. 15 (1931); vol. 30 (1937).

(12) Tali pesci presentano tumori notevolmente aggressivi e a carattere distruttore, in conseguenza dei quali perdono totalmente la pinna e spesso anche parte del peduncolo caudale, sino a giungere in molti casi a una rapida morte.

di tessuti normali, di ripetere anche le esperienze di Luckè e Schlumberger, impiantando frammenti di tessuto tumorale nella camera anteriore dell'occhio della rana, ritenendo causa del loro insuccesso l'aver trapiantato un tumore ad elevata differenziazione (papilloma), anziché, come nel caso del melanoma, a bassa differenziazione.

Infatti Luckè e Schlumberger<sup>(13)</sup> (1940, 1941) hanno tentato di innestare tessuti di rana nella camera anteriore dell'occhio di pesce con risultati modesti (i tessuti neoplastici innestati sopravvivono per qualche tempo ma non si vascolarizzano), e tessuti di pesce in camera anteriore di Rana con

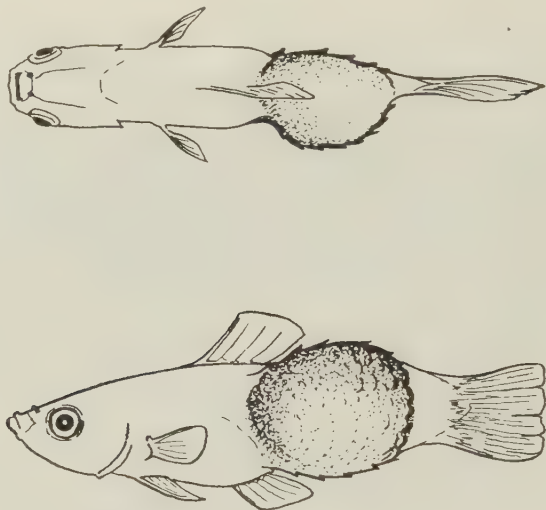


Fig. 3. - Ibrido *Xiphophorus hellerii* × *Platipoecilus maculatus* mostrante la tipica posizione del melanoma.

completo insuccesso (l'innesto, anche in questo caso neoplastico-papilloma, va incontro a completa distruzione entro breve tempo).

La tecnica usata è stata identica a quella eseguita per gli impianti di tessuto normale. Numerosi innesti sono andati incontro a degenerazione, altri sono rimasti stazionari ed uno ha mostrato chiari segni di sopravvivenza (fig. 2). L'esame istologico, praticato anche in questo caso 10 giorni dopo aver praticato l'impianto, ci ha rivelato una ricca e completa vascolarizzazione dell'innesto da parte dell'ospite. Un grosso vaso neoformato collega l'iride della Rana all'impianto (fig. 2); in taluni punti del quale si osservano delle mitosi, con quelle caratteristiche tipiche dei melanoblasti (fig. 4). Non si osservano fenomeni reattivi da parte dei tessuti della Rana: i macrofagi sono completamente assenti nel e intorno al tessuto impiantato. Grosse cellule melaniche rotondeggianti sono sparse qua e là per la camera anteriore, mostrando una notevole attività migratoria; altre sono penetrate nell'iride, confondendosi con lo strato melanico di questa. Alcune di esse sono

(13) B. LUCKÈ and H. SCHLUMBERGER, « J. Exptl. Med. », vol. 72 (1940); vol. 73 (1941).



ben visibili nei vasi propri dell'iride (fig. 5). In certi punti la compenetrazione dei due tessuti è tale che risulta impossibile distinguere l'iride, che appare fortemente intaccata, dall'impianto.

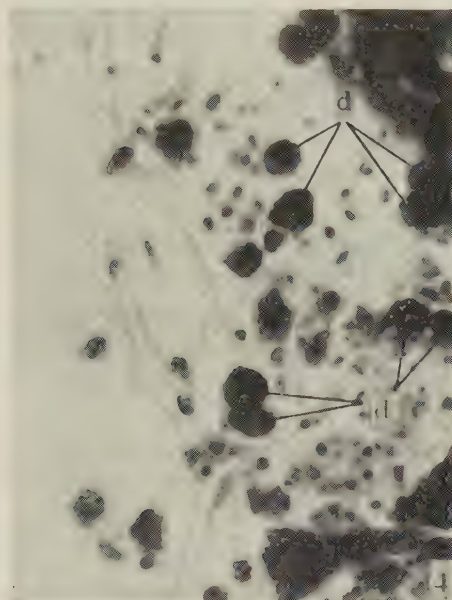


Fig. 4. — Tipiche divisioni cellulari di melanoblasti (d).

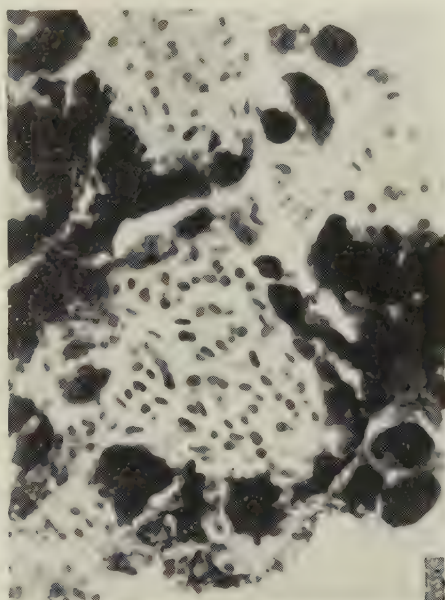


Fig. 5. — Aspetto dei capillari dell'ospite circondati da elementi melanoblastici, alcuni dei quali sono presenti nel lume dei vasi stessi.

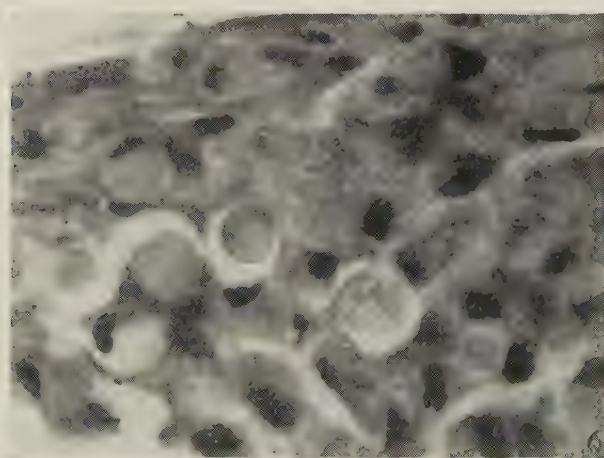


Fig. 6. — Aspetto reattivo della capsula del cristallino. Notare le cellule a sigillo e la presenza di mitosi.

In alcune sezioni si osserva una rottura della cornea ed una intensa proliferazione dell'epitelio proprio di questa, che penetra con una grossa gittata nella camera anteriore, dirigendosi verso l'impianto da cui sembra attratto



fino a raggiungerlo e ad accollarsi ad esso, compenetrandolo in certi punti. Si osservano numerose mitosi bene evidenti e qua e là nuclei con notevole atipia. L'epitelio proprio della capsula del cristallino, nel punto e intorno al punto in cui, attraverso il foro della pupilla, viene a contatto con l'impianto, mostra una intensa proliferazione ed attitudine invasiva verso i tessuti del cristallino. Si nota anche qui, in grado assai maggiore, una spiccata atipia nucleare delle cellule epiteliali; vi sono numerose mitosi ben evidenti e sono presenti parecchie cellule a sigillo (fig. 6).

Ci riserviamo uno studio ulteriore, le cui ricerche sono già in corso, della natura di queste proliferazioni.

Da quanto è sopra esposto risulta che: i tessuti adulti normali o vanno incontro a rapida distruzione, o sopravvivono senza prendere rapporti con l'ospite per un tempo tuttavia limitato e che, mentre il tessuto melanico normale segue il destino degli altri tessuti normali, il tessuto melanico neoplastico riesce a proliferare sino ad un tempo massimo finora accertato di 27 giorni.

Appare logico perciò ritenere causa dell'attecchimento parziale di quest'ultimo tessuto la sua bassa differenziazione e il suo elevato coefficiente mitotico.

**Biologia.** — *Sul significato del nucleo dell'istmo in base ad osservazioni in Anfibi Anuri* (\*). Nota di ANNA MARIA ZACCHEI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Il ganglio o nucleo dell'istmo è una formazione mesencefalica situata al limite posteriore del mesencefalo nella regione dell'istmo.

Questo nucleo è presente nei Pesci, negli Anfibi e nei Rettili; in questi ultimi è molto sviluppato e distinto in una parte magnocellulare e una parvicellulare.

Anche negli Uccelli è presente insieme ad un nucleo istmo-ottico e ad un nucleo del lemnisco laterale che si trovano nelle sue immediate vicinanze.

Nei Mammiferi non è descritto un nucleo dell'istmo e l'Edinger identificò il *ganglion istmi* degli Ittiopsidi e dei Sauropsidi con il corpo parabigeminale (Bechtrew; Kolliker), nucleo situato ventralmente al tubercolo quadrigeminale posteriore.

Le sue connessioni gli fanno attribuire in tutti i Vertebrati il ruolo di una struttura acustica o stato-acustica senza far distinzione tra acustico propriamente detto e laterale. Molti autori lo omologano al nucleo genicolato mediale dei Mammiferi. Larsell (1924) (1), nelle sue ricerche sulla Rana, con

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze della Università di Roma, con un contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) LARSELL, « Journ. Comp. Neurol. », 36 (1924).

clude favorevolmente a questa ipotesi; Kappers (1921) <sup>(2)</sup> pensa che tale omologia non sia completamente possibile nei Rettili: solo la parte parvicellulare sarebbe omologabile, mentre la parte magnocellulare del ganglio dell'istmo sarebbe rappresentata nei Mammiferi da un piccolo nucleo da lui osservato nel mesencefalo, intercalato sul decorso del lemnisco laterale (nucleo del lemnisco laterale di Marburg, 1924).

Tuttavia, tra tante opinioni concordi sulla natura acustica di questo nucleo, alcune osservazioni ne mettono in luce anche altre possibili relazioni funzionali.

Huber e Crosby (1929) <sup>(3)</sup>, in una tortora con cecità congenita unilaterale, hanno constatato la scomparsa del nucleo istmo-ottico dal lato nel quale mancava anche il tratto ottico, attribuendo quindi solamente al nucleo dell'istmo propriamente detto il carattere di struttura acustica.

Charlton (1933) <sup>(4)</sup> nei pesci ciechi cavernicoli (*Typhlichthys*, *Troglichthys rosae*) ha osservato la mancanza del tratto tetto-istmico e del nucleo dello istmo.

Questi fatti che ritengo di grande importanza meritano di avere un controllo in quanto tali rapporti di sviluppo in relazione a quello degli occhi, porrebbero il nucleo dell'istmo anche in rapporto, preminentemente o esclusivamente, con l'attività visiva.

Così non vi è una specifica ricerca che metta in luce il valore della linea laterale nello sviluppo di questo nucleo nei suoi rapporti stato-acustici.

Nell'affrontare il problema del nucleo dell'istmo ho cercato innanzi tutto di stabilirne la funzione in quelle forme in cui non esiste una distinzione del nucleo in suddivisioni minori, quale è la condizione degli Anfibi, per poter poi passare nelle mie indagini ai Pesci e ai Sauropsidi.

Tra gli Anfibi ho considerato alcune specie di anuri tenendo conto del differente sviluppo dell'apparato acustico, dell'occhio e della linea laterale, in relazione al loro adattamento ecologico.

Vi sono specie adattate a vita eminentemente terrestre (Bufonidi, Hylidi), altri hanno vita semi acquatica (*Rana*, *Discoglossus*, *Bombinator*) ed altre (*Xenopus*) conducono vita esclusivamente acquatica.

In rapporto a questi diversi adattamenti ecologici esistono notevoli differenze nello sviluppo dei sistemi sensoriali.

Mentre nei Ranidi e Bufonidi studiati l'apparato acustico e l'apparato visivo sono ben sviluppati troviamo nel *Bombinator*, per il suo più stretto adattamento alla vita acquatica, una notevole riduzione dell'apparato acustico. Anche l'occhio tuttavia raggiunge uno sviluppo più modesto.

Nello *Xenopus* queste condizioni di riduzione sono ancora più accentuate per l'adattamento ad una esclusiva vita acquatica.

(2) KAPPERS, Mac Millan ed. (1936).

(3) HUBER e CROSBY, « Journ. Comp. Neurol. », 47-48 (1929).

(4) CHARLTON, « Journ. Comp. Neurol. » (1933).

Nello *Xenopus* inoltre vi è una condizione particolare: la persistenza e lo sviluppo della linea laterale, anche nell'adulto, quasi a vicariare la deficienza

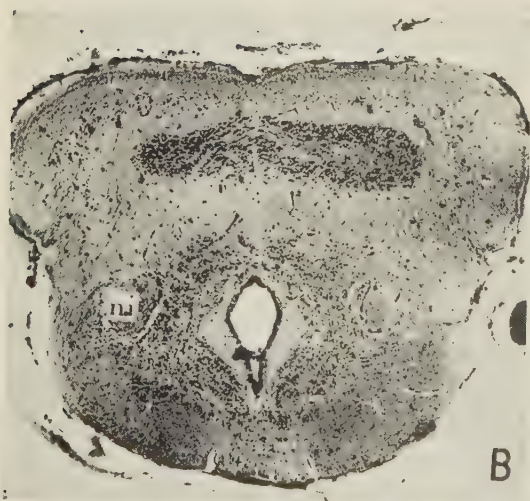


Fig. 1. - Sezione del mesencefalo al livello del nucleo dell'istmo (n. i.).

A - Rana, B - Bombinator, C - Xenopus (vedi le spiegazioni nel testo) - ogni divisione della scala 10  $\mu$

degli altri due apparati sensoriali. In questi animali l'area della linea laterale è presente nel rombencefalo oltre ai centri acustici cocleari (Stefanelli e Zacchei)<sup>(5)</sup> che però non raggiungono lo sviluppo di quelli degli altri anuri.

(5) STEFANELLI e ZACCHEI, « Rend. Acc. Lincei », vol. 7, fasc. 6 (1950).



Lo studio della morfologia del nucleo dell'istmo in questa serie di Anfibi ha portato ai seguenti risultati<sup>(6)</sup>: un maggiore sviluppo in *Rana* (fig. 1 a), *Bufo*, *Hyla*, *Discoglossus*, uno più moderato nel *Bombinator* (fig. 1 b), modestissimo nello *Xenopus* (fig. 1 c).

Possiamo tuttavia constatare come si debba scindere la parte acustica propriamente detta da quella laterale nei rapporti con lo sviluppo di detto nucleo. Infatti, mentre le sue dimensioni sono proporzionali allo sviluppo della parte acustica, il rapporto è invece proprio l'inverso per quanto concerne la linea laterale, poiché nello *Xenopus*, dove questo apparato sensorio è maggiormente sviluppato, vi è il minor sviluppo del nucleo dell'istmo.

Vi è invece un diretto rapporto di questo nucleo oltre che con l'apparato acustico anche con lo sviluppo dell'occhio.

È ora opportuno ricordare come in una serie di ricerche fatte da Stefanelli<sup>(7)</sup> nei Rettili, circa le condizioni di sviluppo del cervelletto in rapporto al tipo di locomozione, egli abbia notato come il nucleo dell'istmo sia più ridotto nelle forme in cui il cervelletto è più piccolo.

Questa osservazione, tenendo conto dei rapporti anatomici con la parte acustica e visiva, fa considerare il nucleo dell'istmo come una stazione intermedia tra gli apparati acustico e visivo e il cervelletto nei fenomeni statici; è ben noto infatti come nell'equilibrio statico entrino in gioco vista e udito.

In quei rettili dove il meccanismo statico è enormemente ridotto, quali le forme apode serpentiniformi il cui corpo è direttamente poggiato sul terreno, sia il cervelletto che il nucleo dell'istmo risultano notevolmente più piccoli.

La stessa situazione va considerata anche negli Anfibi presi in esame. Infatti nello *Xenopus*, oltre ad esserci riduzione degli organi sensori, occhio e orecchio, vi è anche riduzione del cervelletto inquantoché, benché tetrapodo, questo animale adattato a vivere in acqua, ha enormemente diminuita la funzionalità statica di questo organo mentre è sviluppato il tipico apparato acquatico sensorio statico: la linea laterale.

Questo studio del nucleo dell'istmo degli Anfibi anuri, non è in grado di chiarire se questo nucleo abbia un più diretto rapporto con l'occhio o con l'orecchio (probabilmente in questi animali dove non vi è differenziazione del nucleo in parti parvo e magnocellulare, è in rapporto ad ambedue gli organi di senso) è però servito a escludere da questa relazione l'apparato della linea laterale (per cui si deve parlare di relazione acustica e non stato-acustica) e ha portato una nuova documentazione sulla fondamentale importanza del nucleo dell'istmo nei suoi rapporti col cervelletto.

Queste ricerche morfo-ecologiche danno pertanto un nuovo contributo alla concezione che il nucleo dell'istmo costituisca una connessione tra gli

(6) Si tenga conto che la taglia di questi animali è pressoché uguale; solo il *Bufo vulgaris* è di taglia appena maggiore e il *Bombinator* un poco più piccolo.

(7) STEFANELLI, « Pont. Acad. Scient., Commentationes », vol. VIII, n. 10 (1944).



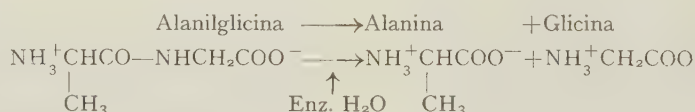
organi acustico e visivo e il cervelletto. Ed è anche chiaro che lo sviluppo di questo nucleo si ha solo se i termini di questa connessione, cervelletto da un lato e organi di senso dall'altro sono sviluppati.

In conclusione, pur riconoscendo l'importanza del nucleo dell'istmo quale centro in relazione con l'apparato acustico (e non laterale), non si deve trascurare il rapporto che indubbiamente c'è tra questo nucleo e l'organo visivo, come è dimostrato dagli animali ciechi (Charlthor, Huber e Crosby).

Le osservazioni morfo-ecologiche nei Rettili (Stefanelli) e le presenti sugli Anuri, dimostrano che il nucleo dell'istmo rappresenta un centro di relais tra i centri acustici e ottici e il cervelletto nel gioco dei fenomeni statici o di equilibrio sugli arti.

**Biologia.** — *Dipeptidasi ed acidi nucleici nel metabolismo della cellula* (\*). Nota di ENRICO URBANI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Le dipeptidasi sono enzimi proteolitici capaci di idrolizzare il legame peptidico che unisce due aminoacidi, con il risultato della liberazione degli aminoacidi stessi. Così l'alanilglicina viene scissa in alanina e glicina in una maniera che può essere schematizzata, in accordo con Linderstrøm-Lang (1952) <sup>(1)</sup> nel seguente modo.



Uno dei metodi di studio che abbiamo per l'identificazione della attività dipeptidasica di materiali biologici riposa appunto sulla possibilità di determinazione degli aminogruppi liberi del substrato che aumentano progressivamente durante l'idrolisi enzimatica (Linderstrøm-Lang e Holter, 1934).

È merito soprattutto di Linderstrøm-Lang, Holter e Coll. del Carlsberg Laboratorium da una parte e di Smith e Coll. <sup>(2)</sup> dall'altra se questi enzimi sono stati studiati in modo molto ampio da un punto di vista biologico e chimico; oggi possediamo un buon numero di dati che rientrano nel quadro delle conoscenze sulla natura e sulla dinamica degli enzimi proteolitici in generale, conoscenze che dobbiamo ai lavori classici di Fischer, Abderhalden, Wilstätter e Coll., Bergmann e Coll. e di molti altri.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

(1) K. LINDERSTRØM-LANG, *Proteins and Enzymes*. «Lane Med. Lect. Stanford University Press», vol. VI (1952).

(2) E. L. SMITH, «Advances in Enzymology», 12, 191 (1951). *Proteolytic Enzymes in The Enzymes*. Edited by Sumner and Myrbach, Acad. Press. Inc., 1952.

Le dipeptidasi oltre che esser presenti nei succhi digestivi degli animali dove compiono l'ultima fase della demolizione delle molecole proteiche alimentari, si trovano anche in tutte le cellule sia animali che vegetali, e questa universalità della loro distribuzione li ha fatti definire fermenti ubiquitari ed ha permesso di prospettare l'idea che essi intervengano in fenomeni metabolici di ordine generale, e precisamente nella sintesi delle proteine cellulari: l'azione che esercitano nei succhi digerenti o nelle idrolisi *in vitro* non sarebbe perciò che un aspetto delle possibilità che hanno questi enzimi quando si trovano ad agire non nel protoplasma ma al di fuori delle cellule che li hanno generati.

È noto che nell'interno della cellula esiste un corredo enzimatico che determina e condiziona ogni attività metabolica del protoplasma e tra i vari enzimi endocellulari esistono anche fermenti proteolitici: proteinasi, polipeptidasi e dipeptidasi. Alcuni autori considerano anche le dipeptidasi come «catepsine», termine dato da Wilstätter e Bamann (1929) <sup>(3)</sup> a quei fermenti proteolitici con un pH di azione tra 4 e 5 e che sono responsabili della autodigestione del protoplasma quando la cellula è morta. Le catepsine che esistono nella cellula vivente sono probabilmente inattive anche a causa del pH del protoplasma che è lontano da valori così acidi: non appena la cellula muore il pH raggiunge i valori adatti perché questi enzimi possano iniziare e compiere la digestione delle proteine cellulari.

Le dipeptidasi probabilmente non possono essere considerate come catepsine in quanto il loro pH di azione, intorno a 7,4-7,8 lascia presumere che esse funzionino durante la vita della cellula e non dopo la sua morte: la loro attività sarebbe perciò legata a fenomeni metabolici di carattere generale e non a digestioni postmortalì. Enzimologi autorevoli come Max Bergmann e Linderstrøm-Lang hanno avanzato l'ipotesi che le dipeptidasi presenti nel protoplasma abbiano la funzione di iniziare, con l'agganciamento di due aminoacidi, la sintesi delle proteine e perciò gli stessi enzimi che noi una volta estratti dalle cellule studiamo nella loro attività di scissione dei dipeptidi, in realtà nella cellula svolgono attività di sintesi. Questa concezione non è contraria ai presupposti teorici sulla natura e sulla termodinamica degli enzimi: sappiamo infatti che lo stesso enzima può, a seconda delle condizioni energetiche del sistema, agire sia nel senso della analisi di un substrato che nel senso della sintesi essendo la reazione enzimatica, nella generalità dei casi, teoricamente reversibile. Ad appoggiare questa ipotesi restano le classiche esperienze sulla sintesi della *plasteina*: Danielewski (1886), Wasteneys e Borsook (1930) Virtanen e Coll. (1949) hanno ottenuto *in vitro* la sintesi di un peptide ad elevato peso molecolare (plasteina) per azione di enzimi tipicamente proteolitici (pepsina, papaina) agenti su di un idrolizzato proteico concentrato. Inoltre Bergmann e Fraenkel-Conrat (1938) <sup>(4)</sup> hanno

(3) J. B. SUMNER e G. F. SOMERS, *Chemistry and Methods of Enzymes*. Acad. Press. Inc., 1953.

(4) M. BERGMANN e H. FRAENKEL CONRAT, « J. Biol. Chem. », 124, I (1938).

ottenuto la sintesi di peptidi *in vitro* ad opera di fermenti proteolitici endocellulari. Questi reperti sperimentali appoggiano l'ipotesi che le dipeptidasi intervengano nelle sintesi proteiche del protoplasma <sup>(5)</sup>.

Duspiva (1939) <sup>(6)</sup> ha invece avanzato l'ipotesi che il compito delle peptidasi, e in particolar modo delle dipeptidasi, consista nella demolizione dei peptidi che continuamente appaiono con il rinnovamento delle proteine protoplasmatiche.

Per ora non esistono prove dirette che le dipeptidasi intervengano nelle sintesi proteiche: quello che sappiamo con certezza è che tutte le cellule nelle quali sono spiccati i fenomeni di riproduzione e accrescimento come le cellule embrionali, o che sono impegnate in fenomeni secretori come le cellule ghiandolari, o che provvedono all'accumulo di materiali come gli oociti in vitellogenesi, presentano un elevato tenore in dipeptidasi. Levy e Coll. (1943, 1948) <sup>(7, 8)</sup> ritengono anche loro che la ubiquità di questi enzimi richieda come spiegazione il loro intervento in fenomeni di carattere generale e pensano che la loro azione possa essere o la sintesi del legame peptidico o l'idrolisi dei peptidi protoplasmatici per fornire gli aminoacidi necessari alle sintesi; quest'ultima ipotesi rientra nella idea sopra riportata di Duspiva. Borsook (1952) <sup>(9)</sup> e Linderstrøm-Lang. (1952) <sup>(10)</sup> si sono preoccupati di compiere uno studio sulle condizioni termodinamiche necessarie perché le dipeptidasi possano agire nel senso delle sintesi e si è visto che tali condizioni sono compatibili con lo stato fisiologico delle cellule e perciò una attività sintetica di questi enzimi è biologicamente e termodinamicamente possibile. Si rimanda il lettore desideroso di approfondire la questione oltre che ai lavori citati anche alla recente opera di Terroine (1952) <sup>(10)</sup>.

In questi ultimi anni la morfologia chimica e l'embriologia chimica sono state in gran parte polarizzate sul problema della funzione degli acidi nucleici nella vita della cellula e dell'embrione. Dalle fondamentali ricerche di Brachet e Caspersson sugli acidi nucleici citoplasmatici una enorme quantità di lavori è comparsa a confermare quanto Brachet e Caspersson avevano asserito, che cioè quanto più spiccate sono le attività sintetiche delle cellule, tanto più elevato è il tenore del citoplasma in RNA.

Non ci si può nascondere che il problema degli acidi nucleici lasci al momento attuale i ricercatori in un certo stato di perplessità in quanto rimane tuttora oscuro quale possa essere il meccanismo con il quale gli acidi nucleici sintetizzerebbero le proteine o in quale maniera essi interverrebbero

(5) Anche JUNQUEIRA e ROTHCHILD ritengono che le catepsine possano avere funzioni di sintesi (comunicazione personale).

(6) F. DUSPIVA, « Protoplasma », 32, 211 (1939).

(7) M. LEVY e A. AH. PALMER, « J. Biol. Chem. », 150, 271 (1943).

(8) M. LEVY e N. F. YOUNG, « J. Biol. Chem. », 176, 185 (1948).

(9) H. BORSOOK, *Fortschritte der Chem. Organ. Naturstoffe*. Ed. Zechmeister, Wien, vol. IX, 1952.

(10) E. F. TERROINE, *La Synthèse Protéique*. Ed. C.N.R.S. Paris 1952.

nelle attività sintetiche del protoplasma. Noi siamo tuttora costretti a considerare gli acidi nucleici quali dei sicuri *indicatori*, come li ha definiti Cotronei (1950)<sup>(11)</sup>, delle possibilità di sintesi di una cellula e possiamo solo congetturare quale sia l'ingranaggio da essi costituito o azionato.

Tra le ipotesi più seducenti ve n'è una che prende origine dalle ricerche di Binkley (1951)<sup>(12)</sup>. Questo A. ha trovato che l'acido ribonucleico possiede una attività enzimatica, è capace cioè di idrolizzare la cisteinilglicina, comportandosi cioè come una dipeptidasi. Brachet (1952)<sup>(13)</sup> pur essendo molto cauto nell'ammettere l'importanza del dato non nasconde che questo reperto potrebbe spostare, dall'angolo morto nel quale si trova, il problema degli acidi nucleici e ricorda, a questo proposito, alcune delle argomentazioni da me riportate nella presente Nota sulla possibilità che le dipeptidasi siano enzimi ad attività sintetica.

Scorrendo la letteratura sulle dipeptidasi e sugli acidi nucleici anche chi non abbia lavorato direttamente sull'argomento non può non rimanere colpito da alcuni parallelismi che risultano dal confronto e dalla associazione di esperimenti diversi e compiuti da diversi autori. L'ubiquità degli acidi nucleici citoplasmatici e delle dipeptidasi, l'elevato tenore degli uni e delle altre nelle cellule embrionali, ad attività secretoria o sintetica in generale, l'identità di localizzazione nel citoplasma e probabilmente nei microsomi, il controllo che il nucleo esercita sugli uni e sulle altre sono tutti fatti che non possono non spingere a studiare in modo analitico e omogeneo quali siano i rapporti morfologici e funzionali tra dipeptidasi e acidi nucleici.

Scopo di questa Nota è l'esposizione sommaria di alcuni risultati sperimentali ottenuti sia da altri ricercatori sia nel nostro Istituto che mostrano come *dipeptidasi ed acidi nucleici siano attori del metabolismo cellulare che meritano di essere studiati in relazione tra di loro* e come questo indirizzo di indagine si presenti interessante e lasci sperare in un maggiore chiarimento del problema delle sintesi proteiche nella cellula.

#### A) Localizzazione delle dipeptidasi e dell'RNA nella cellula.

Holter e Kopac (1937), Holter e Løvtrup (1949)<sup>(14)</sup> hanno studiato la distribuzione delle dipeptidasi in *Amoeba proteus* e in *Amoeba chaos* ed hanno visto che l'alanilglicina dipeptidasi è localizzata nel citoplasma e si trova o legata ai microsomi o nel ialoplasma o in ambedue. Viceversa le proteinasi di ameba (che sono probabilmente le catepsine delle quali si è parlato sopra) sono localizzate nel condrioma. Negli oociti di Anfibi (Brachet (1938)<sup>(15)</sup> e Duspiva (1942) hanno mostrato che la localizzazione dell'enzima è citoplasmatica ma se ne può trovare una certa quantità anche nel nucleo, per quanto i dosaggi eseguiti su nuclei isolati abbiano la probabilità di essere inesatti per contaminazioni citoplasmatiche.

(11) G. COTRONEI, *Le basi strutturali dei processi ereditari*. « Rend. Adunanza solenne dell'Acc. Naz. dei Lincei del 4 giugno 1950 », fasc. 5.

(12) F. BINKLEY, « Nature », 167, 888 (1951) e « Exp. Cell. Res. », Suppl. 2, 145 (1952).

(13) J. BRACHET, *Le rôle des acides nucleiques dans la vie de la cellule et de l'embryon*. Ed. Masson e Desoer 1952.

(14) H. Holter e S. LØVTRUP, « C. R. Lab. Carlsberg, Sér. Chim. », 27, 27 (1949).

(15) J. BRACHET, *Embryologie chimique*. Ed. Masson e Desoer 1944.



Nel globuli rossi di *Triton cristatus* le dipeptidasi sono localizzate esclusivamente o quasi nel citoplasma (Salvidio e Urbani, 1953, 1954) <sup>(16)</sup>.

È noto che l'RNA citoplasmatico si trova legato prevalentemente ai microsomi e in qualche caso al citoplasma ialino (Claude, Brachet, Chantrenne): è appunto nei microsomi che si iniziano le sintesi delle proteine specifiche delle cellule; anche l'incorporazione degli aminoacidi nel fegato di cavia avviene nella maggior percentuale a livello dei microsomi (Borsook 1950) <sup>(9)</sup>.

Queste limitate citazioni alle quali potrebbero esserne aggiunte molte altre mostrano una molto probabile identità di localizzazione delle dipeptidasi e dell'RNA citoplasmatico nel citoplasma della cellula.

#### B) *Controllo nucleare sulle dipeptidasi e sull'RNA.*

Allo scopo di vedere quale sia l'influenza esercitata dal nucleo sulle dipeptidasi e proteinasi è stato condotto uno studio (Urbani 1952) <sup>(17)</sup> sul tenore in questi enzimi su frammenti nucleati e anucleati di *Amoeba proteus* fino a 14 giorni dalla enucleazione. I risultati ottenuti hanno mostrato che mentre le proteinasi non mostrano diminuzioni fino al 10° giorno nelle amebe senza nucleo, le dipeptidasi diminuiscono nei primi tre giorni per raggiungere un livello che in qualche caso è del 50 % in meno rispetto alle amebe nucleate. Linet e Brachet (1951) <sup>(13)</sup> hanno dimostrato sullo stesso materiale che l'acido ribonucleico citoplasmatico diminuisce fortemente nelle amebe enucleate e si mantiene dal quarto all'ottavo giorno della enucleazione intorno al 50 % rispetto alle amebe nucleate. Queste osservazioni mostrano che dipeptidasi e RNA si trovano sotto il controllo nucleare e che l'asportazione del nucleo viene risentita da questi composti mentre non ha effetto su altri enzimi proteolitici endocellulari come le proteinasi. Probabilmente l'asportazione del nucleo porta alla alterazione o distruzione dei microsomi e con queste formazioni vengono distrutti dipeptidasi e RNA che vi sono localizzati.

Uno studio comparativo sugli eritrociti di Vertebrati ha mostrato (Salvidio e Urbani, 1953, 1954) <sup>(16)</sup> che gli eritrociti di Mammiferi (che con il differenziamento hanno perduto il nucleo) hanno il contenuto più basso in dipeptidasi tenuto conto anche del volume globulare. Sarebbe interessante a questo proposito uno studio analogo condotto quantitativamente sull'RNA di eritrociti nucleati e anucleati e sul destino dei microsomi nei globuli rossi dei Mammiferi.

#### C) *Dipeptidasi e RNA nelle cellule ghiandolari.*

Van Weel (1939) <sup>(18)</sup> ha studiato il comportamento della glicil-glicina dipeptidasi nel pancreas di ratto dopo stimolazione pilocarpinica ed ha visto che il ciclo di lavoro della ghiandola esocrina è caratterizzato da un tipico comportamento delle dipeptidasi. Quando i granuli di secreto sono espulsi dalla cellula le dipeptidasi diminuiscono e poi cominciano ad aumentare mano mano che procede la sintesi del nuovo secreto. Urbani-Mistruzzi e Pacini (1951) <sup>(19)</sup> hanno studiato sullo stesso materiale il comportamento dell'RNA ed hanno visto che la maggior concentrazione in ribonucleoprotidi si ha all'inizio della elaborazione del secreto cioè quando, secondo le esperienze di Van Weel, le dipeptidasi sono in rapido aumento. Urbani-Mistruzzi (1954) <sup>(20)</sup> ha ripreso, con la collaborazione di Vecchioli, queste osservazioni studiando comparativamente alanilglicina dipeptidasi e RNA nel pancreas di ratto a vari tempi dopo la stimolazione pilocarpinica ed è stato confermato un andamento parallelo delle dipeptidasi e dell'RNA durante il ciclo secretorio delle cellule ghiandolari.

(16) E. SALVIDIO e E. URBANI, «Haematologica», vol. 38, 1953. «Experientia», 10, 25 (1954).

(17) E. URBANI, «Arch. Int. Physiol.», 60, 189 (1952).

(18) H. VAN WEEL, «Z. Zellforsch.», 27, 65 (1939).

(19) L. URBANI-MISTRUZZI e V. PACINI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», 10, 427 (1951).

(20) Osservazioni inedite.

D) *Dipeptidasi e RNA negli oociti in crescita.*

È noto come gli oociti in crescita e soprattutto gli oociti di Anfibi siano un materiale molto adatto per lo studio dei fenomeni di sintesi proteica collegati alla vitellogenesi. Duspiva (1942)<sup>(15)</sup> ha studiato il tenore in dipeptidasi negli oociti in crescita di *Rana esculenta* ed ha visto che nei piccoli oociti vi è una grande quantità di enzima, che aumenta fino alla comparsa delle tre prime formazioni vitelline, dopo di che la quantità di enzima può considerarsi in continua diminuzione tenuto conto dei volumi crescenti degli oociti. De Cesaris-Coromaldi<sup>(20)</sup> ha controllato sullo stesso materiale nel nostro Istituto le osservazioni di Duspiva con una concordanza completa di risultati.

Lo studio dell'RNA negli oociti in crescita di Anfibi è stato oggetto di numerose osservazioni che in sostanza hanno confermato i risultati di Brachet (1944)<sup>(15)</sup> il quale ha visto che la massima concentrazione di RNA si ha nel periodo precedente la comparsa delle prime formazioni deutoplasmatiche. D'altra parte Steinert (1951)<sup>(21)</sup> ha confermato con un metodo quantitativo molto preciso le osservazioni qualitative e quantitative di Brachet. Questo comportamento dell'RNA negli oociti non è peculiare degli Anfibi in quanto è stato ritrovato e controllato quantitativamente negli Echinodermi e in altri Invertebrati e Vertebrati (Urbani 1949, 1953)<sup>(22)</sup>.

Si vede perciò che anche nei fenomeni di vitellogenesi vi è parallelismo di comportamento tra dipeptidasi e RNA.

E) *Dipeptidasi e RNA nello sviluppo embrionale degli Anfibi.*

Ammon e Schutte (1935)<sup>(23)</sup> hanno studiato le dipeptidasi nello sviluppo embrionale dell'uovo di anatra ed hanno visto che il tenore enzimatico rimane costante nei primi cinque giorni di incubazione e dopo si ha un rapido aumento. Løvtrup (1953)<sup>(24)</sup> ha visto che nello sviluppo embrionale di *Amblystoma* le dipeptidasi aumentano nel periodo di forte accrescimento dell'embrione. Nel nostro Istituto, De Cesaris-Coromaldi (1954)<sup>(25)</sup> ha visto in *Rana esculenta* che le dipeptidasi mostrano una diminuzione dallo stadio di uovo fecondato a bottone caudale—inizio contrazioni. Da questi stadi fino all'inizio della vita larvale si ha invece un forte aumento del tenore enzimatico. In uno studio su *Bufo vulgaris* da me fatto in collaborazione con De Cesaris-Coromaldi (1954) è stato ritrovato un andamento eguale: le dipeptidasi aumentano dal bottone caudale in poi, quando cioè inizia il periodo di grande accrescimento dell'embrione.

Steinert (1951)<sup>(21)</sup> ha eseguito dei dosaggi dell'RNA nello sviluppo embrionale dello *Axolotl* ed ha trovato che il forte aumento in RNA inizia dopo la neurulazione. Anche in questo caso le dipeptidasi hanno un comportamento sensibilmente parallelo all'RNA.

Sempre su *Bufo vulgaris* ci siamo proposti lo studio della distribuzione delle dipeptidasi e dell'RNA negli embrioni allo stadio di bottone caudale—giovane pinna caudale. I dosaggi delle dipeptidasi e dell'RNA sono stati effettuati su embrioni tagliati in tre parti come illustrato nel grafico. Ciascuna parte è stata pesata con la bilancia a diavoleto di Cartesio e calcolato il *peso ridotto* (RW). L'attività dipeptidasica per unità di peso (DP) e l'acido ribonucleico per unità di peso (RNA) hanno un comportamento parallelo ed il tenore più elevato si ha in corrispondenza delle parti cefalica e caudale, dove cioè a questo stadio si ha attiva morfogenesi ed accentuato accrescimento.

Altri risultati, che saranno pubblicati a parte<sup>(26)</sup>, hanno mostrato che le dipeptidasi non sembrano aver rapporti con la digestione del tuorlo, subiscono una caduta nel passaggio

(21) M. STEINERT, « Bull. Soc. Chim. Biol. », 33, 549 (1951).

(22) E. URBANI, « Riv. di Biol. », 41, 331 (1949) e « Rend. Acc. Naz. Lincei », 10, 427 (1951).

(23) R. AMMON e E. SCHUTTE, « Biol. Zeitschr. », 275, 216 (1935).

(24) S. LØVTRUP, « C. R. Lab. Carlsberg Sér. Chim. », 28, 426 (1953).

(25) L. DE CESARIS-COROMALDI, « La Ricerca Scientifica », 24, 319 (1954).

(26) URBANI e DE CESARIS COROMALDI (in corso di stampa su «La Ricerca Scientifica», 1954).

dalla vita embrionale alla vita larvale, in quello stadio cioè nel quale Cotronei (1922, 1930, 1932) <sup>(27)</sup> ha dimostrato che si modificano le condizioni metaboliche ed umorali dell'embrione che diviene larva.

A seguito di quanto detto si può affermare che esiste una correlazione tra accrescimento embrionale e comportamento delle dipeptidasi e RNA.

F) *Dipeptidasi e RNA nelle rigenerazioni.*

Orechkovitch (1936) <sup>(28)</sup> ha visto che nella coda in rigenerazione di larve di rana e di axolotl l'attività dipeptidasi aumenta fino al 10<sup>o</sup>-12<sup>o</sup> giorno di rigenerazione. Le catepsine invece sullo stesso materiale hanno un comportamento diverso. Questa differenza di

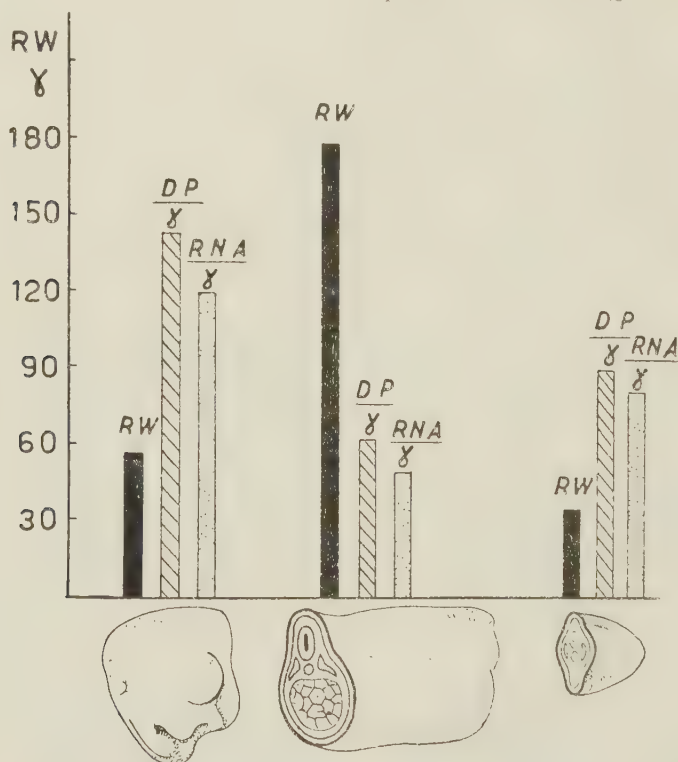


Fig. 1. - Rappresentazione schematica del tenore in dipeptidasi (DP) dosate con il metodo di Linderstrøm-Lang e Holter, dell'acido ribonucleico (RNA) dosato con il metodo di Steinert, e del peso ridotto (RW) determinato con il diavoleto di Cartesio nelle parti isolate di *Bufo vulgaris*. DP e RNA rappresentano i valori divisi per il peso delle singole parti.

comportamento tra dipeptidasi e proteinasi, che già abbiamo notato nei frammenti nucleati e enucleati di ameba, è un'altra prova di funzioni diverse nel metabolismo cellulare delle catepsine e delle dipeptidasi.

Un allievo di Brachet, Clement-Noël, ha visto con metodo istochimico che nei blastemi rigenerativi di planarie alle quali era stata tagliata la testa, nella rigenerazione

(27) G. COTRONEI, « Arch. Zool. Ital. », 10, 85 (1922). « Mon. Zool. Ital. », 41 (1930). « Rend. Acc. Naz. Lincei », 5, 15 (1932) e Note seguenti sugli stessi « Rendiconti ».

(28) V. N. ORECHKOVITCH, « Bioch. Zeitschr. », 286, 91 (1936).

della coda di larve di rana e di tritoni adulti si ha nelle zone di rigenerazione un aumentato tenore in RNA 1944 <sup>(29)</sup>.

Pur tenendo presenti le differenti condizioni di lavoro dei due autori tuttavia i risultati mostrano una notevole concordanza di comportamento tra dipeptidasi e RNA nei fenomeni rigenerativi. Essendo interessante un controllo di questi dati eseguito con lo scopo di un preciso confronto tra il comportamento delle dipeptidasi e dell'RNA nei blastemi rigenerativi, Sette, allievo interno nel nostro Istituto, ha eseguito esperienze del genere le quali non hanno però ancora un preciso significato quantitativo in quanto i dosaggi non possono essere riportati ad unità di peso. La questione è attualmente ripresa con l'impiego della bilancia a diavoletto di Cartesio e con la stessa metodica usata per lo studio, prima illustrato, sulle parti isolate di embrioni di *Bufo*.

**CONCLUSIONI.** — Sono state illustrate alcune caratteristiche biochimiche e biologiche delle dipeptidasi, enzimi che nella cellula vivente svolgono probabilmente attività sintetiche nella edificazione delle molecole proteiche protoplasmatiche. Si è richiamata l'attenzione sulla probabilità di strette relazioni tra questi enzimi e i ribonucleoprotidi. A giustificazione di tale ipotesi è stata riferita una serie di risultati dovuti a diversi autori ed altri ottenuti da me e dai miei Collaboratori che mostrano in varie condizioni un parallelismo di comportamento tra dipeptidasi e RNA. Questo indirizzo di ricerca merita di essere seguito con la speranza che possa essere di chiarimento nel problema della sintesi delle proteine nella cellula.

**Biologia.** — *Trapianti tra larve ibride e larve normali: esperienze su «Bufo vulgaris», «Bufo viridis» e loro ibridi* <sup>(\*)</sup>. Nota di LAURA DI NATALE, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

Espongo in questa Nota i risultati che ho finora raggiunti in esperienze di trapianto della vescicola ottica di larve ibride giovanissime (*Bufo vulgaris* ♀ × *Bufo viridis* ♂ e *Bufo viridis* ♀ × *Bufo vulgaris* ♂) nel cavo orbitario di larve normali di *Bufo vulgaris* e di *Bufo viridis*. Ho anche eseguito trapianti della vescicola ottica da larve normali su larve ibride vitali (*Bufo vulgaris* ♀ × *Bufo viridis* ♂) e, per confronto, trapianti eteroplastici tra larve normali di *Bufo vulgaris* e di *Bufo viridis*.

Queste esperienze le ho eseguite per consiglio e sotto la guida del prof. T. Perri di questo Istituto. Sono esperienze che si ricollegano da un lato con il particolare comportamento delle ibridazioni tra *B. vulgaris* e *B. viridis*; e da un altro lato con i trapianti eteroplastici tra le due specie.

Nell'ambito delle ibridazioni tra specie differenti di Anfibii, quelle tra *B. vulgaris* e *B. viridis* presentano una notevole diversità di comportamento a seconda del senso nel quale si pratica l'incrocio. Infatti, se l'ibridazione

(29) H. CLEMENT-NOËL, «Ann. Soc. Roy. Zool. Belgique», 286, 91 (1936).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «B. Grassi» dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.



avviene tra uova di *B. vulgaris* e spermatozoi di *B. viridis* si ottengono ibridi vitali che facilmente superano la metamorfosi; invece nell'ibridazione inversa, ossia tra uova di *B. viridis* e spermatozoi di *B. vulgaris*, si hanno ibridi non vitali, tanto che solo i più resistenti raggiungono al massimo lo stadio di larva giovanissima. Vari Autori cercarono di chiarire questa diversità di comportamento. G. Hertwig <sup>(1)</sup> ammise che i nuclei elaborassero un enzima specifico per la digestione del tuorlo della propria specie. G. Montalenti <sup>(2)</sup> si fondò sulla diversa velocità di sviluppo che si ha nelle due specie (in *vulgaris* lo sviluppo è più lento che in *viridis*); egli ritiene, in base a varie argomentazioni, che se un uovo è fecondato con uno spermio di una specie con minore velocità di sviluppo si ha, nello sviluppo dell'ibrido, un danno molto maggiore di quando lo spermio è di una specie a sviluppo più rapido. Riferirò tra poco le esperienze di T. Perri.

Le ricerche da me eseguite si ricollegano inoltre con quelle che il Cotronei dal 1929 va eseguendo, con la collaborazione di vari allievi, sulle compatibilità ed incompatibilità biochimiche tra Anuri e Urodeli, studiate in condizioni di trapianto, di espianto e di parabiosi; altre ricerche riguardano i trapianti eteroplastici. Cotronei e Perri <sup>(3)</sup> studiarono il comportamento della vescicola ottica primaria in trapianti tra *B. vulgaris* e *B. viridis*. Essi se ne occuparono appunto in relazione al diverso risultato che si ottiene nei due incroci tra *vulgaris* e *viridis*; era stato infatti supposto (Holtfreter, Jucci) che al diverso risultato negli incroci dovesse corrispondere un diverso comportamento nei trapianti tra queste due specie, con risultati migliori nella combinazione *viridis* su *vulgaris*. Cotronei e Perri conclusero che la vescicola ottica primaria di *B. viridis* trapiantata su embrioni, allo stesso stadio, di *B. vulgaris* giunge costantemente alla metamorfosi in ottime condizioni; per quanto riguarda il trapianto inverso, descrissero tre casi di completo sviluppo del trapianto sino alla metamorfosi.

Perri (1946, 1949) <sup>(4)</sup> riprese, applicandovi la metodica dei trapianti, lo studio degli ibridi tra *B. vulgaris* e *B. viridis* avendo particolarmente di mira le cause del diverso comportamento a seconda che le uova siano dell'una oppure dell'altra specie. Egli osservò anzitutto che negli ibridi « vitali » si hanno, con varia frequenza, embrioni con malformazioni incompatibili con la vita. Osservò inoltre che la vescicola ottica d'ibrido non vitale (*B. viridis* ♀ × *B. vulgaris* ♂) se trapiantata su *B. vulgaris* può giungere alla metamorfosi. Egli dà importanza ad una incompatibilità biochimica tra le due specie, che si palesa nei trapianti da *vulgaris* su *viridis*. Osservò infatti che la vescicola ottica di giovanissima larva di *B. vulgaris* röntgenirradiata con dose subletale, se trapiantata nel cavo orbitario di una larva di *B. viridis* finisce con l'andare distrutta; mentre, come nello stesso Istituto osservò F. Chelli, se la detta vesci-

(1) G. HERTWIG, in « Z. f. Anat. Entw. gesch. », vol. 92 (1930).

(2) G. MONTALENTI, in « Physiol. Zoöl. », vol. VI (1933).

(3) T. PERRI (con Nota aggiunta di G. COTRONEI), in « Boll. di Zool. », a. VII (1936); G. COTRONEI e T. PERRI, ivi, a. XII (1941).

(4) T. PERRI, in questi « Rendiconti », vol. I (ser. VIII), p. 995 (1946) e vol. VI, p. 255 (1949).

cola ottica (nelle stesse condizioni di röntgenirradiazione) viene trapiantata su *B. vulgaris*, prosegue nello sviluppo. Il Perri nei trapianti da ibrido vitale o da ibrido non vitale, sulle specie parenterali, ebbe risultati migliori quando il trapianto veniva eseguito su *vulgaris* anziché su *viridis*. Più recentemente <sup>(5)</sup> ha cominciato ad occuparsi della competenza artoformativa negli ibridi in confronto alle specie parenterali, avendo trovato notevoli differenze tra *B. vulgaris* e *B. viridis*.

Le ricerche delle quali qui espongo i risultati hanno lo scopo di approfondire, mediante trapianti larvali della vescicola ottica, lo studio dell'importanza delle differenti condizioni biochimiche che si hanno in *B. vulgaris*, *B. viridis* e nei loro ibridi. I trapianti li ho eseguiti sia da ibridi, vitali e non vitali, su normali sia da normali su ibridi vitali; per necessario controllo ho pure eseguito trapianti eteroplastici tra *B. vulgaris* e *B. viridis*. Lo stadio di operazione è stato sempre di larva giovanissima sia per i donatori che per i portatori; l'occhio da trapiantare veniva asportato intero però senza lo strato esterno della cornea; la sede di trapianto è stata la cavità orbitaria, previa asportazione del relativo globo oculare, a parte il foglietto esterno della cornea che è stato sempre lasciato *in situ*.

Ecco in breve i risultati raggiunti.

Ho eseguito innanzi tutto trapianti omoplastici della vescicola ottica sia in *B. vulgaris* che in *B. viridis*. Queste esperienze mi sono servite per controllo tecnico; non ho mai osservato, conformemente a quanto era da attendersi, alcun caso di distruzione dell'occhio trapiantato.

Ho pure eseguito trapianti dell'occhio di giovanissima larva di *B. vulgaris* su *B. viridis* e di *B. viridis* su *B. vulgaris*. Questi trapianti erano evidentemente indispensabili per la interpretazione dei risultati delle esperienze tra ibridi e normali.

Nei trapianti da *B. viridis* su *B. vulgaris* ho avuto costantemente lo sviluppo dell'occhio trapiantato come si osserva bene sia all'esame in toto al binoculare, sia all'esame istologico. Questo risultato è pienamente d'accordo con quello ottenuto in trapianti tra embrioni giovanissimi eseguiti da Cotronei e Perri. Anche nei miei casi, su larve, l'occhio trapiantato va in metamorfosi contemporaneamente a quello del portatore, come si osserva agevolmente notando la saldatura tra il foglietto interno della cornea (di *viridis*) e il foglietto esterno della cornea (di *vulgaris*), onde una cornea chimerica.

Nel trapianto inverso, ossia da larva giovanissima di *B. vulgaris* su *B. viridis* ho avuto in sette casi che l'occhio trapiantato è giunto in ottime condizioni alla metamorfosi (che anche qui avviene contemporaneamente nell'occhio trapiantato e nell'occhio del portatore) e ciò riconferma l'uguale risultato ottenuto da Cotronei e Perri negli stessi trapianti tra embrioni. In un numero di casi molto maggiore (diciannove) ho osservato invece che l'occhio di *B. vulgaris* trapiantato su *B. viridis*, mentre dapprima si conserva in ottime con-

(5) T. PERRI, in « Rivista di Biologia », vol. 44 (1952).

dizioni e si accresce, verso la fine della vita larvale si ha che comincia a regredire, finché ne rimangono residui che poi anch'essi scompaiono. Non vi è pertanto in questa combinazione quella completa compatibilità che si ha invece, come si è visto, nella combinazione *viridis* su *vulgaris*: è molto più idoneo l'ambiente biochimico di *vulgaris* rispetto a *viridis* che non viceversa.

Vediamo ora il comportamento che si ha nel trapianto dell'occhio di giovanissima larva d'ibrido vitale (*B. vulgaris* ♀ × *B. viridis* ♂) sulle due specie parentali.

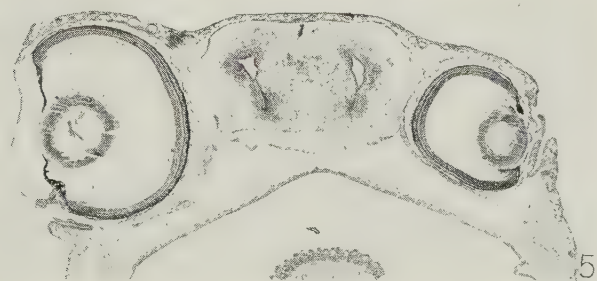
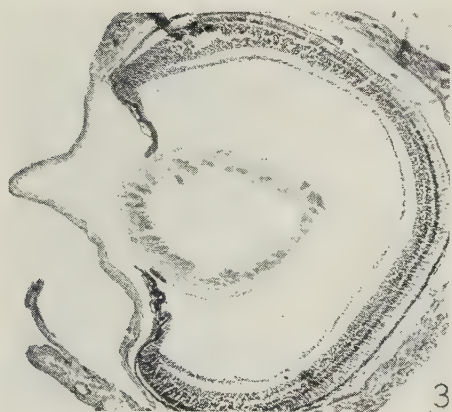
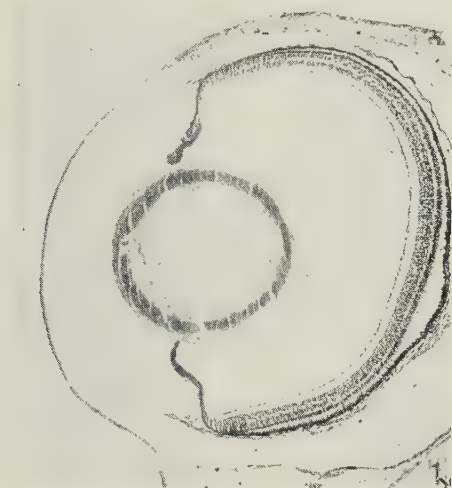
La vescicola ottica d'ibrido vitale trapiantata su *B. vulgaris* continua normalmente nel suo accrescimento e giunge alla metamorfosi in ottime condizioni (contemporaneamente a quella del portatore). Nel trapianto invece dell'occhio dell'ibrido vitale su *B. viridis* ho ottenuto che in una metà dei casi l'occhio è proseguito normalmente nello sviluppo e si è metamorfosato (vedi figg. 1 e 2), mentre negli altri casi dapprima si è sviluppato normalmente, ma poi in prossimità della metamorfosi è andato distrutto. Ricordando quanto ho detto sopra a proposito dei trapianti tra le forme normali, si vede che l'occhio d'ibrido vitale si comporta come l'occhio di *B. vulgaris* trapiantato su *B. viridis*.

Questa prevalenza di matroclinismo negli ibridi vitali viene ribadita da altre esperienze, da me eseguite, di trapianto di occhio larvale di *B. vulgaris* normale o di *B. viridis* normale nella cavità orbitaria d'ibrido vitale (non ho ancora avuto occasione di eseguire trapianti da ibrido non vitale su ibrido vitale). Ho osservato che in queste condizioni il trapiantato sia esso *viridis* o *vulgaris* prosegue nello sviluppo e giunge regolarmente alla metamorfosi. Il fatto che l'occhio di *B. vulgaris* su ibrido vitale giunge alla metamorfosi (ved. figg. 3 e 4) mostra chiaramente, ricordando quanto si è visto sopra, che l'ibrido vitale ha un chimismo che molto si avvicina a quello di *B. vulgaris* ossia si ha anche qui un caso molto evidente di matroclinismo. Questo matroclinismo dell'ambiente biochimico è d'accordo con il matroclinismo morfologico che è completo, almeno fino ad un certo stadio, negli ibridi vitali (*B. vulgaris* ♀ × *B. viridis* ♂) (G. Hertwig, G. Montalenti <sup>(6)</sup>).

Vediamo ora il comportamento degli ibridi non vitali (*B. viridis* ♀ × *B. vulgaris* ♂) trapiantati sulle specie parentali. Si ricordi che questi ibridi giungono, al massimo e sempre in numero assai piccolo, allo stadio di giovanissime larve; ho usato per i trapianti quelli che avevano raggiunto lo stadio larvale e che perciò, come d'altronde risulta dai controlli, sarebbero vissuti solo per pochi altri giorni. La vescicola ottica di questi ibridi trapiantata su *B. vulgaris* giunge alla metamorfosi in buone condizioni ribadendo in tal modo che l'ambiente biochimico di *B. vulgaris* è idoneo al suo sviluppo. Nei trapianti su *B. viridis* ho ottenuto lo sviluppo del trapiantato solo in una parte dei casi (ved. fig. 5). Almeno per ora è difficile parlare, per la vescicola ottica di questi ibridi, di prevalenza del biochimismo del-

(6) G. MONTALENTI, in « Arch. Zool. Ital. », vol. XXVI (1939).









l'una o dell'altra specie parenterale: si può però affermare con certezza che l'ambiente biochimico di *B. vulgaris* è meno tossico di quello di *B. viridis*.

Riguardando tutti i risultati descritti a seconda che i trapianti siano stati eseguiti su *B. vulgaris* o su *B. viridis*, si osserva agevolmente che i migliori risultati si hanno quando i portatori sono *vulgaris*, mostrando così una differenza tra gli ambienti biochimici delle due forme. È l'ambiente biochimico di *B. viridis* che presenta una certa tossicità per *B. vulgaris*, mentre quest'ultimo non ha presentato, almeno nelle esperienze fin'ora eseguite, alcuna tossicità verso *B. viridis*. L'ambiente biochimico degli ibridi vitali si è manifestato assai simile a quello dei *B. vulgaris* normali. I risultati ottenuti da Perri nelle sue esperienze sugli ibridi, vengono da queste mie ricerche riconfermati e ampiamente estesi.

CONCLUSIONI. — Dai risultati che ho ottenuto in questo insieme di trapianti larvali della vescicola ottica tra *B. vulgaris*, *B. viridis* e loro ibridi, si può concludere che gli ibridi vitali (*B. vulgaris* ♀ × *B. viridis* ♂) presentano un ambiente biochimico molto più simile a quello di *B. vulgaris* anziché a quello di *B. viridis*.

## SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLA TAVOLA

Figg. 1 e 2. — Trapianto, allo stadio di giovanissima larva, della vescicola ottica d'ibrido vitale (*B. vulgaris* ♀ × *B. viridis* ♂) nella cavità orbitaria sinistra di *B. viridis*; portatore fissato in metamorfosi. Fig. 1: l'occhio normale del portatore. Fig. 2: l'occhio trapiantato che presentasi ben differenziato in tutte le sue parti (uguale ingrandimento: 45 diam.).

Figg. 3 e 4. — Trapianto, allo stadio di giovanissima larva, della vescicola ottica di *B. vulgaris* nella cavità orbitaria sinistra d'ibrido vitale (*B. vulgaris* ♀ × *B. viridis* ♂). Fig. 3: l'occhio del portatore. Fig. 4: l'occhio trapiantato, che presentasi ben differenziato in tutte le sue parti. (Uguale ingrandimento: 45 diam.).

Fig. 5. — Trapianto, allo stadio di giovanissima larva, della vescicola ottica d'ibrido non vitale (*B. viridis* ♀ × *B. vulgaris* ♂) nella cavità orbitaria sinistra di *B. viridis*; portatore fissato in metamorfosi. L'occhio trapiantato è ben differenziato nelle sue varie parti; è solo da notare che è di dimensioni più piccole. (Ingr. di 20 diam.).

## COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che assistono alla seduta i proff. Davies, matematico dell'Università di Southampton e Wuster, cristallografo a Cambridge e porge agli illustri ospiti il cordiale saluto della Classe e suo personale.

## PLICHI SUGGELLATI

Il prof. Giordani presenta un plico suggellato, consegnato all'Accademia dal sig. Tommaso Martini in data 30 marzo u. s., contenente, come risulta dall'indicazione sulla busta, uno studio dal titolo: «Ultime acquisizioni sul complesso M».

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico di cui trattasi sia conservato nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

## RELAZIONE DI COMMISSIONI

Il Presidente dà la parola al Socio Pupilli, il quale, anche a nome del Collega Margaria, legge la seguente relazione sulla richiesta avanzata dal prof. Giuseppe Pagano, intesa ad ottenere che l'Accademia si faccia iniziatrice di un ricorso all'UNESCO per un giudizio arbitrale circa la priorità della scoperta delle azioni riflesse destinate con la stimolazione del seno carotideo:

« Il Signor Presidente, onorandoci della sua stima, ci ha chiesto se sia o no opportuno che l'Accademia si faccia iniziatrice di un ricorso all'Unesco, per un giudizio arbitrale circa alla spettanza di priorità della scoperta delle azioni riflesse destinate con la stimolazione del seno carotideo. Esprimeremo il nostro parere, dopo aver in breve esposto gli antefatti che riguardano il quesito propostoci.

Che la esistenza dei riflessi carotidei sia stata rivelata da Giuseppe Pagano, nessun fisiologo oggi oserebbe negare. Un fenomeno di tanta importanza fisiologica, farmacologica e clinica venne scoperto dal geniale ricercatore italiano, oltre cinquant'anni fa, sul fondamento dei risultati di indagini del tutto originali, bene ideate e saggiamente interpretate.

Che inoltre il Pagano abbia fin da allora compreso la portata dei fatti a cui aveva dato evidenza, risulta dalle sue stesse parole che riferiamo. « Ecco dunque un esperimento che scuote alcuni fatti ritenuti assiomi in fisiologia e in clinica e introduce nella valutazione di molti fenomeni universalmente noti un fattore inaspettato e della più grande importanza. È mio intendimento di rivedere, con questo indirizzo, se molte delle pretese azioni centrali di agenti meccanici o chimici esistano realmente: non ch'io dubiti che determinate cause di stimolo possano agire direttamente sui centri nervosi, ma perché sono convinto, e credo che le mie esperienze bastino a farmene ragione,

che buona parte dei fenomeni attribuiti, sino ad oggi, a stimolazione diretta dei centri encefalo-midollari, riconoscono un'origine indiretta e si producono per effetto di eccitamento di superfici sensitive. E ciò non soltanto nel campo puro delle funzioni fisiologiche. . . ma anche nel campo patologico dove tali fenomeni più raramente sono stati l'oggetto di indagini rigorosamente condotte".

Il Pagano iniziò le sue ricerche nel 1898 e ne comunicò i risultati in lavori a stampa, corredati di documenti grafici assai dimostrativi, che comparvero nei seguenti periodici: «Giornale di Scienze naturali ed economiche di Palermo» del 1899, «Archivio di Farmacologia e Terapeutica» del 1900 e «Archives italiennes de Biologie» dello stesso anno. In quest'ultimo periodico, pure nel 1900, Luigi Siciliano fece note le sue compiute osservazioni sperimentali intorno agli effetti della occlusione e disocclusione della carotide, confermando e ampliando i risultati del Pagano, sotto la cui guida egli aveva eseguito gli esperimenti nell'Istituto di Fisiologia di Palermo.

Nel 1912 P. Kaufmann negò recisamente l'esattezza delle osservazioni sperimentali di Pagano e Siciliano, allontanandosi dalla soluzione del problema per avere erroneamente scelto la sede di applicazione degli stimoli. E ancora nel 1923 le conclusioni dei due fisiologi italiani venivano ruscate da B. Kisch e S. Sakai.

In quell'anno medesimo e nel 1924 comparvero le prime pubblicazioni di H. E. Hering. Dopo aver indagato il meccanismo delle reazioni cardiache e vasomotorie destinate da stimoli meccanici, aspecifici o specifici, e da stimoli elettrici applicati al seno carotideo, il fisiologo di Colonia studiò assai accuratamente la innervazione del seno stesso, identificando il fascetto di fibre sensitive che da esso partono e provando con certezza che la via afferente essenziale del riflesso è il Nervo glossofaringeo. Le osservazioni di Hering furono poi estese da E. Koch e particolarmente da C. Heymans, al quale si deve una doviziosa illustrazione, sperimentale e dottrinale, dei meccanismi assai complessi che intervengono nella regolazione neuromorale della pressione intrarteriosa. A datare dal 1926 la zona del seno carotideo ha attirato l'attenzione di numerosi ricercatori, che ne hanno continuato lo studio sotto l'aspetto morfologico e quello funzionale.

Il grande merito del Pagano è ormai riconosciuto dagli studiosi tutti. Tre anni or sono, per voto unanime dei Soci italiani e stranieri della Società italiana di Fisiologia, tale riconoscimento venne espresso in una forma altamente e degnamente onorifica: all'illustre studioso fu conferita la nomina di Professore Ordinario Emerito di Fisiologia umana.

Di recente il Pagano, in un articolo pubblicato nel fasc. 6° del vol. II di «Medicina» (1952), ha minutamente esposto quale sia l'origine di quella acquisizione scientifica che nella sua parte essenziale si deve a lui. In tale pubblicazione egli critica quanto Hering aveva scritto nel capitolo introduttivo della sua monografia «Die Karotissinusreflexe auf Herz und Gefäße», pubblicata nel 1927; e in modo esplicito fa colpa allo studioso tedesco di avere, nelle sue numerose memorie, di proposito inficiato o minimizzato l'opera di chi lo aveva preceduto nella scoperta. Ora è certo che nelle varie sue pub-



blicazioni Hering ha dato insufficiente risalto ai preziosi trovati del Pagano, che propriamente costituiscono il punto di partenza delle sue ricerche.

In quello stesso articolo il Pagano rimprovera a Heymans di avere, con errati richiami a fatti e ad Autori, attribuito la scoperta dei riflessi carotidei a Hering, anzi che a lui: il che apparirebbe nelle numerose pubblicazioni del fisiologo di Gand, nelle conferenze ch'egli ha tenute in Università italiane e anche nella rassegna critica da lui pubblicata, tre anni fa, nel medesimo periodico «Medicina» (1951, vol. I, fasc. 6°). Ma a tale riguardo ci sia consentito di dire che non possiamo condividere la opinione del Pagano.

In verità, proprio il contenuto della rassegna da ultimo ricordata, ci sembra attestare i retti intendimenti dell'Autore. Asserire infatti che «Ce furent les observations expérimentales de H. E. Hering et E. Koch, qui, à partir de 1924, révélèrent le rôle fondamental du sinus carotidien dans la régulation réflexe de la pression artérielle», non equivale affatto ad affermare che la esistenza dei riflessi del seno carotideo sia stata rivelata da due studiosi tedeschi; nello stesso modo che, per esempio, attribuire a Sherrington la paternità della dottrina delle funzioni riflesse organizzate non è fargli merito della scoperta dei fenomeni riflessi.

A fine di rappresentare fedelmente il valore che Heymans assegna alla opera del Pagano, riportiamo dalla predetta rassegna il passo in cui l'Autore esprime, a tale riguardo, il proprio pensiero. Dopo aver riferito le opinioni e conclusioni che nel passato erano state accolte in tutti i trattati classici di fisiologia, intorno all'azione diretta esercitata dalla pressione intrarteriosa sui centri cardio-vasali del bulbo, Heymans si esprime nei seguenti termini. «Toutefois, déjà en 1900, Pagano et Siciliano avaient mis en évidence que si l'occlusion des carotides communes (hypotension artérielle céphalique) entraîne de l'accélération du coeur et de l'élévation de la pression artérielle, ces réactions ne sont pas déterminées par une action directe de la pression au niveau des centres cardio-vasculaires bulbaires, mais sont dues, au contraire, à un mécanisme réflexe. Ces auteurs observèrent, en effet, que l'occlusion des branches efférentes des carotides communes ne provoque pas les réactions cardio-vasculaires que l'occlusion des carotides communes elles-mêmes déclenche. Ils montrèrent également que l'occlusion des artères vertébrales, qui provoque un hypohémie plus prononcée au niveau des centres cardio-vasculaires de la moelle allongée que l'occlusion des carotides communes, n'entraîne pas de modifications de la fréquence cardiaque et de la pression artérielle. Ces physiologistes italiens ont conclu de leurs importantes observations expérimentales que la pression artérielle agit par voie indirecte et à distance, donc par voie réflexe, sur les centres cardio-vasculaires, et ainsi sur la fréquence du coeur et sur le niveau de la pression artérielle... Il est intéressant de signaler, d'autre part, que lorsque Pagano a situé les récepteurs sensibles à la pression artérielle dans la carotide commune, il a toutefois ajouté que la zone réflexogène la plus sensible à la pression était localisée près de la bifurcation carotidienne, donc au niveau du sinus carotidien».

C'è dunque tanto che basti per confermare quanto dicevamo dianzi, cioè che nella esposizione di Heymans la scoperta della esistenza dei riflessi carotidei è tenuta distinta dai trovati che concernono i meccanismi con cui tali processi si effettuano e intervengono, mediante reciproche influenze, nella regolazione della pressione arteriosa. Ed è chiaro che il fisiologo belga fa merito a Pagano e Siciliano di avere per la prima volta dimostrato le reazioni cardiache e vasali evocabili con la stimolazione della zona del seno carotideo, mentre ascrive a lode di Hering e Koch aver a fondo analizzato tali effetti come fattori di regolazione emodinamica.

Quanto poi all'avere accomunato l'opera del Pagano con quella del Siciliano, in un articolo che tratta succintamente degli aspetti vecchi e nuovi del problema, ciò non ci sembra assolutamente che si possa ascrivere a intenti alieni dal giusto, da cui l'Autore sarebbe stato mosso. Dapprincipio si è fatto rilevare come il Siciliano abbia contribuito all'analisi delle azioni riflesse carotidee mediante la dimostrazione di fatti di ragguardevole significato; tanto che il suo nome, secondo il parere dell'illustre nostro Consocio Gilberto Rossi, va ricordato subito dopo quello del Pagano. Nel citare le prime e indubitabili prove della esistenza dei riflessi carotidei, Heymans ha insieme menzionato i due studiosi italiani, la guida e il discepolo; in modo analogo, come si è visto, egli ha poi accostato al nome di Hering quello di Koch suo Assistente.

In conclusione, muovere oggi una questione intorno alla spettanza di priorità della scoperta dei riflessi carotidei, non è a nostro giudizio né necessario né conveniente. Chi mostrasse d'ignorare, tutto o in parte, quanto di fondamentale spetta a Giuseppe Pagano, della « bella e armonica costruzione » venuta ad arricchire la medicina sperimentale, proverebbe soltanto di non aver acquisito quelle elementari nozioni di storia della fisiologia, la cui incontestabilità è ormai indiscussa. La qual cosa sarebbe tanto meno degna di rilievo quanto più deplorabile.

La Classe, su proposta del Socio Giuseppe Levi, delibera che la relazione sia pubblicata integralmente nei Rendiconti e comunicata al prof. Pagano.

Il Presidente ringrazia i Colleghi Pupilli e Margaria.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il prof. Giordani comunica che il Socio Margaria ha offerto in omaggio all'Accademia un volume dal titolo: « Le pubblicazioni dell'Istituto di Fisiologia dell'Università di Milano » per gli anni accademici 1948-1953, che lo stesso prof. Giordani presenta e illustra brevemente.

Il Socio Bompiani offre in omaggio e presenta il III volume delle « Opere Matematiche » di Paolo Ruffini con le seguenti parole:

« Il terzo volume delle « Opere Matematiche » di Paolo Ruffini, testé uscito nelle Edizioni Cremonese, completa il disegno di pubblicazione concepito e preparato da Ettore Bortolotti ed attuato per merito dell'Unione Matematica Italiana.

«Questo volume contiene il carteggio - quasi completamente inedito - del Ruffini con matematici, italiani e stranieri, del suo tempo e ci presenta l'ambiente, in un'Italia ancora divisa e dominata da più governi stranieri, in cui dovette svolgersi l'opera del Ruffini.

«Il primo gruppo di lettere si riferisce al maggior titolo di gloria del Ruffini - cioè alla dimostrazione dell'insolubilità delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto - e mostra le difficoltà che il Ruffini incontrò a far accettare, fino al riconoscimento esplicito di Cauchy, la sua scoperta.

«Ma non meno interessanti sono gli altri gruppi; il secondo, sui fondamenti del calcolo infinitesimale, in cui attraverso la corrispondenza con il Saladini e col Barbieri sugli ordini d'infinitesimo e sui contatti di curve si vede sorgere la necessità di un nuovo ente - l'elemento differenziale -; il terzo sulle trascendenti ellittiche in cui il Ruffini sospetta l'impossibilità di esprimere l'integrale dell'inverso di un radicale quadratico portante sopra un polinomio di 4° grado mediante integrali ellittici di prima e seconda specie e di funzioni elementari; il quarto sulle serie trigonometriche in cui il vivace carteggio col Frullani pone in evidenza due mentalità diverse e due concezioni opposte - e ugualmente feconde come sarà poi provato da sviluppi successivi - nella teoria delle serie infinite; il gruppo quinto in cui, attraverso la corrispondenza col Franchini sopra un teorema del Giorgini relativo all'intersezione di due quadriche, si vedono affiorare considerazioni e metodi divenuti poi abituali nella geometria algebrica.

«Il gruppo sesto, carteggio con l'idraulico Venturoli, mostra la penetrazione del Ruffini anche in problemi di fisica matematica; e il gruppo settimo il suo interessamento per l'istituzione di un Osservatorio astronomico in Modena.

«Ciascun gruppo di lettere è preceduto da un'introduzione che ne definisce il contenuto e dà notizia dei corrispondenti del Ruffini: le introduzioni sono dovute pure ad Ettore Bortolotti ad eccezione di quelle dei gruppi terzo e quarto, dovute a G. Sansone, e del gruppo sesto dovuto a G. Evangelisti.

«L'edizione è stata curata con affetto filiale e con perizia scientifica da Ettore Carruccio, Emma Bortolotti Carruccio e Angiolo Procissi; l'editore Cremonese ne ha fatto un capolavoro di arte tipografica».

Il Socio Chiarugi presenta il IX volume (in due parti) di «Webbia, raccolta di scritti botanici edita dall'Istituto Botanico dell'Università di Firenze», contenente undici Memorie di illustri scienziati italiani e stranieri, le quali documentano l'attività svolta dall'Istituto per valorizzare le sue grandi collezioni botaniche. Il prof. Chiarugi ricorda, tra tali memorie, quelle che rappresentano il contributo dell'Erbario Centrale Italiano alla migliore conoscenza della flora e della vegetazione della Penisola italiana: e cioè quella di G. Montelucci su «La vegetazione del Monte Terminillo», importante caposaldo per la conoscenza della flora dell'Italia centrale, e l'altra di D. Bertolani-Marchetti su «Il popolamento delle stazioni salse della Valle Padana». Mette poi in particolare evidenza l'illustrazione da parte di P. van

Royen della collezione delle Podostemaceae raccolte nel 1931 dal prof. Nello Beccari nella Guiana Britannica e conservate nel Museo Botanico di Firenze: insieme al testo viene pubblicata anche una serie di magnifiche fotografie con cui il raccoglitore illustrò magistralmente l'ecologia di queste singolari piante endemiche delle cascate dei grandi fiumi tropicali. Uno studio di Irmischer sulle Begoniaceae raccolte in Malesia dal celebre botanico Odoardo Beccari e conservate nell'Herbarium Webbianum rappresenta uno dei primi frutti della collaborazione dell'Istituto Botanico di Firenze con la grande iniziativa degli Olandesi, che hanno intrapreso a Leida la pubblicazione della Flora Malesiana, opera poderosa che ha il fine di illustrare completamente la flora di quelle terre che costituiscono il loro grande impero coloniale; la revisione di queste piante ha portato al riconoscimento di sedici nuove specie di Begonia e Symbegonia raccolte dal Beccari nelle foreste malesi e rimaste inedite per ben ottant'anni nonostante le intense esplorazioni floristiche compiute successivamente, e ciò dimostra compiutamente quale sia ancora il valore delle collezioni che Odoardo Beccari eseguì con insuperato acume naturalistico e che aspettano ancora in gran parte di essere illustrate.

Il prof. Chiarugi ricorda infine che, nel citato volume, l'Erbario Colonniale Fiorentino, che conserva le più ricche collezioni botaniche dell'Africa Orientale, opportunamente integrate da quelle della stessa regione appartenenti all'Erbario Centrale Parlatoreano e all'Erbario Webb, ha iniziato, con una introduzione dello stesso prof. Chiarugi e con studi di R. Pichi-Sermolli e di H. Heiniger sulle Ericaceae e su varie famiglie di Pteridophyta, una serie di Memorie dal titolo generale «Adumbratio Florae Aethiopicae» per la revisione e la illustrazione metodica dei materiali destinati a rendere infine possibile la redazione di una «Flora Aethiopica», che sarà insieme la realizzazione di una impresa scientifica ormai indispensabile per la messa in valore delle risorse naturali dell'Africa Orientale ed un doveroso omaggio ai valorosi precursori che tanti materiali preziosi hanno portato all'Istituto Botanico Fiorentino, costituendo nello stesso tempo un legame ideale fra il nostro Paese e quelle terre che gli Italiani aprirono alla civiltà. In queste prime memorie sono state già messe in luce diverse specie nuove o per la prima volta segnalate per l'Etiopia. Questa iniziativa ha già valso da parte dell'Association pour l'Etude Taxonomique de la Flore d'Afrique Tropicale (A.E.T.F.A.T.), residente a Kew, il riconoscimento all'Istituto Botanico Fiorentino, e per esso all'Italia, della esclusiva consulenza internazionale per gli studi sulla flora di tutta l'Africa Orientale, comprendente l'Eritrea, l'Etiopia, la Somalia, il Somaliland Britannico, la Côte Française des Somalis e l'Arcipelago di Socotra. Se all'Istituto Botanico Fiorentino non mancheranno mezzi finanziari adeguati, tutte queste iniziative saranno continuate con la massima energia e i loro risultati saranno illustrati nei prossimi volumi di «Webbia».

Il Socio Cotronei offre in omaggio i volumi XXXVII e XXXVIII dell'«Archivio Zoologico Italiano» editi quale pubblicazione giubilare, per iniziativa della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli e con i contri-



buti dell'Università stessa e del Consiglio Nazionale delle Ricerche, in onore del Collega Umberto Pierantoni per la sua nomina a Professore Emerito. Tali volumi contengono contributi scientifici di tutte le scuole zoologiche, senza distinzione, perché unanime è l'ammirazione e l'affetto che tutti i cultori di tali scienze nutrono verso il prof. Pierantoni per le sue altissime virtù di studioso e di uomo.

Il Socio Cotronei ricorda che, iscrivendosi cinquant'anni or sono alla Università di Napoli, vi trovò il prof. Pierantoni, allora giovane libero docente, ed è ben lieto oggi di porgergli, nella sede accademica, il suo affettuoso saluto e il sincero augurio per una lunga e feconda attività.

La Classe si associa con un vibrante applauso e il Presidente desidera esprimere al Collega Pierantoni, anche a nome dell'Università di Napoli, i suoi più fervidi voti augurali.

Il Socio Pierantoni ringrazia.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza una pubblicazione dell'Accademia Nazionale dei XL in onore del Socio Achille Russo, una Nota del predetto Socio dal titolo: « Il potere germinale del soma, carattere generale negli esseri viventi, causa parziale per lo sviluppo dei tumori » (estratto dal « Bollettino » dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania), una pubblicazione edita dall'Istituto di Medicina Tropicale di Lisbona per il cinquantenario dell'Istituto stesso, un volume della Camera di Commercio, Industria e Agricoltura di Piacenza contenente gli « Atti del II Convegno Nazionale sulle utilizzazioni del Metano », e una pubblicazione, edita sotto gli auspici dell'Alto Commissariato dell'Igiene e Sanità Pubblica, dal titolo « Gli Istituti Zooprofilattici sperimentali e l'Istituto Sperimentale Italiano 'Lazzaro Spallanzani' ».

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Pensa, riferendosi alla commemorazione di Battista Grassi, tenuta questa mattina in Accademia dal Collega Cotronei, desidera rendere nota una interessante lettera del Grassi al Golgi a proposito della malaria che può essere conferma e documentazione, sia pure superflua, delle eminenti doti di scienziato e di uomo dell'illustre Maestro e assicura che invierà prossimamente in omaggio all'Accademia lo zinco con la riproduzione dell'autografo conservato, col carteggio del Golgi, nel Museo della Storia della Università di Pavia. Viene riportato integralmente qui appresso quanto è stato esposto dal Socio Pensa.

In questa giornata celebrativa di quell'uomo insigne che fu GIAN BATTISTA GRASSI desidero aver l'onore e la compiacenza di rendere nota una interessantissima lettera del Grassi al Golgi a proposito della malaria

che può essere conferma e documentazione, sia pure superflua, della rievocazione del Grassi che ci ha fatta il Collega Cotronei ricordandone efficacemente il carattere eminente di scienziato e di uomo.

« In questo documento che presento appaiono appunto evidenti molte doti: la comprensione che egli aveva per l'opera scientifica altrui ed il rispetto per le vedute che potessero anche contrastare con le sue personali; la fermezza e l'equilibrio nel sostenere l'esattezza della verità da Lui controllata; la passione indomabile per la ricerca e la tenacia nell'approfondire i problemi con l'osservazione e la sperimentazione; l'onestà scientifica e la lealtà ammirevole nel giudicare ed anche esaltare i meriti di chicchessia e nel riconoscere e correggere i propri errori.

La lettera, il cui autografo io ho in consegna col carteggio del Golgi nel Museo della Storia dell'Università di Pavia, è datata 20 marzo 1890 da Catania dove allora il Grassi era professore ed è evidentemente la risposta ad un appunto fattogli dal Bizzozzero seguito anche da certo risentimento pervenutogli dallo stesso Golgi per il fatto che, pochi mesi prima, in un convegno tenutasi a Pavia, il Grassi aveva messo in dubbio che le forme descritte dal Golgi nel sangue di malarici fossero parassiti.

È noto come il Golgi avesse fin dal 1885 confermata la natura parassitaria del plasmodio della malaria umana completando e perfezionando le osservazioni del Marchiafava e del Celli; come negli anni successivi, arrivando appunto fino al 1889, avesse descritto il ciclo del parassita sempre nel sangue dell'uomo malarico e i suoi vari aspetti nella quartana, nella terzana, nelle forme gravi estivo-autunnali; come il Golgi abbia avuto inoltre il grande merito di sorprendere la coincidenza fra determinate fasi del ciclo e l'insorgenza dell'accesso febbrile, di dettare le norme per aggredire efficacemente il parassita col chinino e debellarlo.

Ora, nella sua lettera del 1890, il Grassi qualifica come ingiusto l'appunto del Bizzozzero di aver mancato di riguardo al Golgi con le sue obiezioni e definisce come delittuosa l'interpretazione che da qualcuno si è voluta dare a quell'appunto e dà al Golgi la più ampia assicurazione della sua ammirazione. Qui riporto le sue parole:

« “ammirazione che certamente è cresciuta di molto riguardo alla malaria ora che mi sono persuaso che Ella aveva ragione di ammettere parassiti quelle forme che io in buona fede non ritenevo sicuramente parassiti”. In questa frase è tutta la nobiltà e la lealtà dell'uomo e dello scienziato; ma nella seguente spicca la tenacia e la fiducia nelle proprie capacità di ricercatore. “Ora nell'argomento della malaria ci sono entrato e voglio andare avanti finché posso, non foss'altro pel puntiglio di dimostrare che qualche piccola cosa so fare anch'io”. Ed a quale risultato in otto anni di lavoro assiduo egli sia pervenuto lo sanno tutti coloro che ricordano la notizia data dal Grassi nel 1898 di aver sorpreso le fasi dell'altro ciclo di sviluppo del parassita nell'ospite intermedio (nell'*Anopheles*) e la possibilità, attraverso a questo, di trasmissione della malaria da uomo ad uomo.

farmi di aver fiori del mondo, e basti questo ostigo per pungermi se qualche volta posso in buona fede sbagliare.

Ma ho scritto forse troppo a lungo. Vengo alla conclusione, e la conclusione è: che io pubblicando una Nota sui parassiti della malaria negli uccelli, troverò modo di innestarmi i sensi della mia ammirazione per tutto quanto lei ha fatto sulla malaria, troncando così qualche dubbio. Tro che ella aveva ragione di crederci parassiti; plasmodi, e che io in buona fede mi ero sbagliato, e che io non intendo di fare una solenne affermazione contraria alla di lei opinione. (Il lavoro esodo poi sulla malaria farò a lei (con Lebbi) un dedica, che confermi pubblicamente che io non ho mai avuto la più lontana intenzione di diminuire il merito grandissimo dell' di lei lavoro sulla malaria. Mi posso far di più, se lo dica e lo farà. Dopo queste mie gagliardi speranze, non indegnerà di stringermi la mano, e sarà con profondo rispetto

Catania 20 Marzo 1891      Doc. Prof. D. Grassi

Quella lettera della quale ho riferito alcune frasi e riproduco qui integralmente la parte conclusiva, io ho letto e riletto con grande commozione, perché mi è apparsa quale espressione di una mente e di una lealtà di uomo di scienza non comune. A me che ebbi la ventura e l'onore di intrattenermi con Gian Battista Grassi in varie occasioni, è sembrato di rivivere con lui uno di quegli indimenticabili incontri nei quali, oltre che la sua sapienza, ammiravo la spontaneità, la vivacità e la schiettezza.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Giuseppe Levi, Tonzig, Cotronei, Nobile, D'Ancona, Natta, Bonino, Tricomi, Piccone, Signorini e Pupilli.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

BATTAGLIA B. — Citologia e citochimica della spermatogenesi atipica in *Murex trunculus* (pres. dal Corrisp. U. D'ANCONA).

FRANCESCHINI M. — Caratteri dell'epitelio dell'amnios espantato *in vitro* (pres. dal Socio G. LEVI).

PINO P. — Sintesi dell'acido  $\beta$  carbossil  $\gamma$  carbossimetilpimelico (pres. dal Corrisp. G. NATTA).

SCROCCO E. e MARMANI G. — Sul coefficiente di temperatura del potenziale di ossido-riduzione dei complessi dell'argento mono e bivalente con il dipiridile (pres. dal Socio G. B. BONINO).

PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE  
PRESSO L'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

## ELENCO DEI CONCORRENTI

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA  
ISTRUZIONE PER LE SCIENZE MATEMATICHE

(Scadenza 15 marzo 1954 — Premi lire 250.000).

1. ADAMO GIUSEPPE. — « Le Geometrie a curvatura costante secondo l'indirizzo metrico-proiettivo ».

2. AGRUSTI GIOVANNI. — 1. « Nota su qualche proprietà dei punti appartenenti ad un poligono regolare ». — 2. « Sui raggi associati di convergenza di una serie di potenze a più variabili complesse ».

3. ANDRIANO BENIAMINO. — « Rappresentazione geometrica del principio di relatività ».

4. AYMERICH GIUSEPPE. — 1. « Trasformazioni di Appell nel caso di forze lineari nelle velocità ». — 2. « Sulla espressione in coordinate curvilinee degli sforzi e degli spostamenti in elasticità piana ». — 3. « Sulla geometria delle configurazioni piane di sforzi elastici ». — 4. « Sulle oscillazioni forzate di due circuiti elettrici non lineari con accoppiamento induttivo e capacitivo ». — 5. « Oscillazioni forzate periodiche di sistemi non lineari a due gradi di libertà ». — 6. « Sulle onde elettromagnetiche guidate da una superficie cilindrica perfettamente conduttrice anisotropa ». — 7. « Un teorema di unicità sulle onde elettromagnetiche guidate da un guscio anisotropo ». — 8. « Sulle oscillazioni autosostenute impulsivamente ». — 9. « Oscillazioni forzate di sistemi autosostenuti impulsivamente ». — 10. « Modulazioni di ampiezza e di fase nell'oscillatore di Rocard ».



5. BERNASCONI CARLO. — 1. «Trasformazioni con mezzi ottico-meccanici fra le proiezioni cartografiche della sfera». — 2. «Sull'analisi periodale dei diagrammi». — 3. «Strumento fotoelettrico per il calcolo del coefficiente di correlazione e per altri computi». — 4. «Rappresentazione di curve spaziali materializzate». — 5. «Questioni di ottica geometrica risolte con metodi meccanici». — 6. «Proiezioni cartografiche di carattere speciale». — 7. «Carte geografiche secondo il modello della membrana elastica».
6. BURNENGO GIUSEPPE. — 1. «Studio dei punti multipli di una curva algebrica di ordine  $-n-$  mediante trasporto nell'origine degli assi». — 2. «Nota sui fasci e schiere di coniche». — 3. «Metodi per risolvere i principali problemi sulla circonferenza». — 4. «Un metodo uniforme per la dimostrazione di alcuni limiti fondamentali». — 5. «Una collana di osservazioni didattiche». — 6. «Sullo sfruttamento didattico dei polinomi».
7. CAPRIO NICOLA. — «Considerazioni sopra alcune definizioni di geometria elementare».
8. CASELLI VINCENZO. — 1. «L'aritmetica intuitiva per la scuola secondaria inferiore». — 2. «Nota didattica sulla lunghezza della circonferenza ed area del cerchio».
9. CASILLI FERDINANDO. — «Sulla divisione dei numeri decimali».
10. COPPOLA CAMPOLO IDA. — «Speculazioni sui numeri».
11. CORBETTA GIOVANNI. — «Il bipendolo centrifugo». (Lo stesso lavoro è stato presentato al Premio per le Sc. Fisiche n. 15).
12. DE TOMMASO GIOVANNI. — «Sulle tautocrone, ipertautocrone e brachistocrone». (Lo stesso lavoro è stato presentato al Premio per le Sc. Fisiche n. 16).
13. DUCCI GUGLIELMO. — 1. «La topografia per i geometri» (trigonometria piana). — 2. «La topografia per i geometri» (3 voll.).
14. FERRARI ALESSANDRO. — «Studio di alcune particolari famiglie di numeri piani».
15. FILOSTO MICHELE. — «Sulla indipendenza lineare delle matrici».
16. GALLIA SAETONE WALLY. — «Invarianti proiettivi di due elementi differenziali curvilinei dello spazio».
17. GARGANO ROSARIO. — «Parallelismo di un vettore lungo una linea».
18. GONDOLO LORENZO. — «Appunti su due proposizioni di Fermat».
19. GRECO SALVATORE. — «Studio per determinare la "Legge di formazione dei polinomi" che figurano come coefficienti, secondo la teoria di Faber nello sviluppo in serie di Polinomi di una funzione di variabile complessa  $Z$ , regolare entro il profilo pisciforme dello Joukowski».
20. HOLZER ENRICO. — «Il metodo continuo in matematica finanziaria».
21. IVALDI PIETRO. — 1. «Risoluzione grafica di qualche problema di matematica finanziaria con l'uso di un abaco». — 2. «Rettificazione di alcune sestiche dedotte da coniche mediante trasformazioni cremoniane».
22. MATTACHEO RABITTI DELMA. — «Introduzione allo studio delle singolarità esponenziali».
23. MAZZA GIUSEPPE. — «Sopra la rappresentazione di una funzione olomorfa in una regione ellittica».
24. MAZZANTI MARCO. — «Sui potenziali ritardati del second'ordine».
25. MONTALDO OSCAR. — 1. «Esistenza di infiniti autovalori per un sistema differenziale lineare omogeneo a coefficienti costanti». — 2. «Sull'integrazione dei sistemi di Riccati». — 3. «Sul sistema di due equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine omogeneo nelle derivate prime».
26. ORAZIO GILIBERTO. — 1. «Sull'attrazione degli elissoidi». — 2. «Lo schiacciamento della terra». — 3. «Sul valore esatto della massa lunare». — 4. «Introduzione allo studio delle masse planetarie, vere ed apparenti». — 5. «Sulle oscillazioni delle rose magnetiche nelle bussole a secco ed a liquido, durante la navigazione, col mare mosso». (Gli stessi lavori sono stati presentati al Premio per le Scienze Fisiche n. 25).
27. PALAMÀ GIUSEPPE. — 1. «Su di alcune formule relative al calendario». — 2. «Numero di termini minimo di un membro multigrado non banali». — 3. «Somme uguali di biquadrati». — 4. «Tabella delle posizioni iniziali relative al "Neocribum" di L. Poletti». — 5. «Funzioni di Laguerre di 2<sup>a</sup> specie». — 6. «Una grande impresa: continuazione della

tavola dei numeri primi di Lehmer a mezzo delle tavole del Kulik, del Poletti e del Porter». — 7. «Multigrade normali del 9.<sup>o</sup> ordine inverso del teorema di Gloden». — 8. «Sistemi indeterminati impossibili». — 9. «Contributo alla ricerca di relazioni fra classici polinomi». — 10. «Sulle somme di K.me potenze e su di un teorema relativo alle multigrade». — 11. «Osservazioni sul "Neocribum" di L. Poletti». — 12. «Numeri primi e composti contenuti nella forma 1848 ecc.». — 13. «Recensione a V. Thébault "Les Récréations Mathématiques"». — 14. «Su alcune questioni di analisi diofantea». — 15. «Su di un limite inferiore della distanza di due zeri consecutivi ecc.». — 16. «Aritmo-quadrilatero inscrittibile». — 17. «Tavola dei numeri primi dell'intervallo 12012000-12072060». — 18. «On a Theorem of D. H. Lehmer». — 19. «Sul Wronskiano delle funzioni di Laguerre di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie e su dei polinomi ad esse associati». — 20. «Relazioni integrali tra le funzioni d'Hermite e di Laguerre di prima e seconda specie, e su dei polinomi ad esse associati». — 21. «Su di una questione relativa a somme uguali di potenze simili». — 22. «Risposta alla questione di A. Moessner». — 23. «Diophantine systems of the type». — 24. «Sulla derivata erresima di classici polinomi rispetto ai parametri». — 25. «Su di una regola di Fermat per la fattorizzazione dei numeri e su di una sua questione relativa alle parti aliquote». — 26. «Matematica e poesia». — 27. «Polinomi più generali di altri classici e dei loro associati e relazioni tra essi». — 28. «Relazioni tra i Polinomi associati alle funzioni di Laguerre e d'Hermite». — 29. «Sul progetto di riforma del calendario di Marco Mastrofini».

28. PERASSI RINALDO. — 1. «Sulla geometria elementare a tre dimensioni di un corpo finito». — 2. «Sui fondamenti logici della matematica e sulla teoria degli insiemi».

29. PUCCIO LIBERO. — «Dei discriminanti delle equazioni differenziali a traverso un invariante di Schwarz».

30. QUAGLIA GIUSEPPE. — 1. «Sul metodo di Tartinville». — 2. «Sulla discussione dell'equazione di II grado a parametro». — 3. «Sulle disuguaglianze fra i lati e le mediane, le altezze e di bisettrici di un triangolo».

31. REBBI PIETRO. — «Coordinate assiali di retta nello spazio».

32. RIGATTI GIUSEPPE. — «Dimostrazione di un teorema».

33. SCARDINA MARIANO. — Numero 102 estratti dal «Bollettino della Società Matematica calabrese».

34. SCUOR VOLPATO LIA. — «La stella doppia visuale, ecc.».

35. STEINDLER ADOLFO. — «Di un criterio per il calcolo dell'aliquota progressiva dell'imposta sul reddito».

36. TOSCANO LETTERIO. — 1. «Calcolo di un integrale della teoria del potenziale di un ellissoide». — 2. «Relazione integrale di trasformazione dei polinomi ultrasferici in quelli di Laguerre». — 3. «Funzione generatrice dei prodotti di polinomi di Laguerre con gli ultrasferici». — 4. «Gli integrali ellittici completi di prima e seconda specie nel calcolo simbolico». — 5. «Su una relazione di ricorrenza triangolare». — 6. «Una classe di polinomi della Matematica attuariale». — 7. «Sur un triangle associé a un triangle donné». — 8. «Sulla norma del complemento  $\Gamma(\alpha, \chi)$  della funzione gamma incompleta per  $\alpha = -1/2$ ». — 9. «Sulla periodicità di una particolare corrispondenza tra rette di un fascio». — 10. «Sulla decomposizione in fattori simbolici della potenza dell'operazione di derivazione». — 11. «Formule di trasformazione e sviluppi sulle funzioni ipergeometriche a due variabili». — 12. «Funzioni generatrici di particolari polinomi di Laguerre e di altri da essi dipendenti». — 13. «Su una disuguaglianza relativa ai polinomi di Hermite». — 14. «Relations métriques de la Géométrie du triangle par rapport aux centres isogones et isodynamiques. I». — 15. «Idem. II». — 16. «Sur les triangles podaires orthogonaux». — 17. «Points remarquables d'un triangle sur le cercle de Brocard et sur la droite de Lamvine. I». — 18. «Idem. II». — 19. «Le funzioni del cilindro parabolico come caso limite delle funzioni ipergeometriche». — 20. «Polinomi associati a polinomi classici».

37. VALENTE GUERINO. — «Su un nuovo impiego delle coniche omofocali sferiche, ecc.».

38. ZIBARDI LUCIANO. — «Equidistanza e medie geometriche per la costruzione di curve di grado superiore al secondo».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA  
ISTRUZIONE PER LE SCIENZE FISICHE

(Scadenza 15 marzo 1954 - Premi lire 250.000).

1. ALEANZI GIUSEPPE. — « Generatore asincrono a funzionamento autonomo ed anche decelerato ».
2. ANDRIANO BENIAMINO. — « Perfezionamento del reticolo a gradinata di Nicholson ».
3. ANGIOI GIOVANNI. — « Il mistero del tempo nei tempi ».
4. ANTONI GIUSEPPE. — « Trasmissione e natura dell'energia raggiante ».
5. BALDASSARRI RADAMES. — « Dispositivo per il controllo delle lampadine di targa ».
6. BARRA CARACCIOLLO FRANCESCO. — 1. « Sulla sovrapposizione degli effetti ». — 2. « Sorgenti luminose lineari ». — 3. « Contributo alla teoria e alla pratica dell'interpolazione ». — 4. « Contributo allo studio fotometrico delle lampade fluorescenti ». — 5. « Sorgenti luminose puntiformi ». — 6. « Calcolo dell'illuminazione artificiale degli ambienti chiusi ». — 7. « Sorgenti luminose superficiali ». — 8. « Sorgenti luminose curvilinee ». — 9. « Calcolo dell'illuminazione naturale ». — 10. « Sorgenti luminose cilindriche ».
7. BERNASCONI CARLO. — 1. « Le barovariographe comme appareil de sondage aérologique ». — 2. « Nuovo metodo di registrazione dello stato del mare e primi risultati ottenuti a Genova ». — 3. « Questioni di ottica geometrica risolte con metodi meccanici ». — 4. « Carte geografiche secondo il metodo della membrana elastica ».
8. BORDONE ERNESTO. — 1. « Metodo elementare per risolvere problemi complessi sulle correnti alternate ». — 2. « Metodo per determinare esattamente le curve di regolazione e le caratteristiche esterne negli alternatori ». — 3. « Elettrotecnica ». — 4. « Temi svolti di elettrotecnica ». — 5. « Elettrotecnica » (2 voll.).
9. CANTONI MARIA GIOVANNA. — « Cattura del Mesone  $\pi$  da parte di nuclei atomici ».
10. CAPPELLO ALFIO. — « Gli anioni ( $S_2 O_3^{''}$ ) e ( $CuS_2 O_3$ ) nella lotta contro il malsecco degli agrumi » (lo stesso lavoro è stato presentato al Premio per le Scienze Chimiche n. 4 e per le Scienze Naturali n. 5).
11. CAPRIO NICOLA. — « Alcune semplicissime esperienze per rendere evidenti degli importanti principi di fisica ».
12. CERASOLI ERCOLE. — 1. « In tema di propagazione della radiazione nei mezzi birifrangenti ». — 2. « Del linguaggio pseudo-scientifico nei libri di testo ad uso delle scuole medie superiori ». — 3. « Determinazione della temperatura superficiale del Sole ». — 4. « Qualche osservazione sul potenziale elettrico ». — 5. « Importanza delle definizioni nella didattica scientifica e tecnica ». — 6. « La polarizzazione cromatica dal punto di vista Fisico e Matematico ».
13. CHILOSI GIUSEPPE. — 1. « Un nuovo criterio astronomico per giudicare in favore della validità dell'ipotesi della costanza della velocità della luce o in favore di quella balistica ». — 2. « Dimostrazione della inconsistenza logica della Teoria speciale della Relatività ».
14. CORBETTA CASIMIRO. — « La funzione del concetto di entropia nello sviluppo della termodinamica ».
15. CORBETTA GIOVANNI. — « Il bipendolo centrifugo ». (Lo stesso lavoro è stato presentato al Premio per le Scienze Matematiche n. 11).
16. DE TOMMASO GIOVANNI. — « Sulle Tautocrone, ipertautocrone e brachistocrone ». (Lo stesso lavoro è stato presentato al Premio per le Scienze Matematiche n. 12).
17. DI FILIPPO DOMENICO. — « Pubblicazioni a cura dell'Istituto Nazionale di geofisica: Numeri 191-194-197-199-211-214-217-232-229-246-252-255-264-279 ».
18. FOLCO ANTONIO. — « Il rendimento delle coppie termoelettriche ».
19. GALLI GIUSEPPE. — « La pressione eccentrica nei solidi corti ».
20. GIAMBALVO VITO. — « Diagrammi polari della distribuzione del flusso luminoso ».
21. MAINELLI ROBERTO. — 1. « Le motrici termiche ed alcuni aspetti della termodinamica ». — 2. « Il funzionamento ed il rendimento delle eliche ».

- 22. MASTANDREA PASQUALE.** — 1. «La tecnica delle misure elettriche» (2 voll.). — 2. «Strumenti di misura elettrici».
- 23. MEONI GIOVANNI.** — 1. «Prove comparative meccaniche e di usura fra pignoni per riduttori fabbricati in acciaio al 3,5 % di Ni e in acciaio al Cr. Mo.». — 2. «Potere termoelettrico nella lega antimonio-cadmio».
- 24. ODONE FILIPPO.** — 1. «L'ingrandimento dei sistemi ottici». — 2. «Argomenti di fisica». — 3. «Sui sistemi di unità di misura ed in particolare sul sistema MKSAW».
- 25. ORAZIO GILIBERTO.** — 1. «Sull'attrazione degli ellissoidi». — 2. «Lo schiacciamento della Terra». — 3. «Sul valore esatto della massa lunare». — 4. «Introduzione allo studio delle masse planetarie, vere ed apparenti». — 5. «Sulle oscillazioni delle rose magnetiche nelle bussole a secco ed a liquido, durante la navigazione col mare mosso». (Gli stessi lavori sono stati presentati al Premio per le Scienze Matematiche n. 26).
- 26. PACE NICOLA.** — 1. «Taratura della scala delle lunghezze d'onda nell'ultravioletto mediante le soluzioni di antracene». — 2. «Misure di assorbimento nel visibile di soluzioni di iodio». — 3. «I calori specifici di alcuni gas alle alte temperature».
- 27. PICCAGLIANI CARLO.** — 1. «Lavoro di Fisica» — senza titolo. — 2. «I progressi tecnici ecc.».
- 28. PUCCIANO MICHELE.** — «Trattato di costruzioni civili rurali stradali ed idrauliche» (2 voll.).
- 29. SCARDINA MARIANO.** — Numero 16 lavori pubblicati sul Bollettino della Società Matematica calabrese».
- 30. SOMMA ALBERTO.** — «Elementi di meteorologia e oceanografia» (2 voll.).
- 31. VERNACCHIA PASQUALE.** — «Nuovi sistemi di trasmissione elettrica sincrona».
- 32. VETERE FRANCESCO.** — «Un sistema nuovo per l'uso delle valenze nelle formulazioni chimiche». (Lo stesso lavoro è stato presentato al Premio per le Scienze Chimiche n. 25).

#### ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE PER LE SCIENZE CHIMICHE

(Scadenza 15 marzo 1954 — Premi lire 250.000).

- 1. ARCIDIACONO SALVATORE.** — «Così si studia la chimica» (2 voll.).
- 2. BERTORELLE EUGENIO.** — 1. «Ricerche sull'azione del fluoro e sulla codeposizione nichel-cobalto nella elettrolisi per zinco». — 2. «Ricerche di carattere tecnico-analitico per controllo rapido degli elettroliti per la esposizione dei metalli». — 3. «Ricerche sul controllo dei depositi metallici al catodo». — 4. «Ricerche sulla elettrodeposizione di leghe». — 5. «Ricerche di carattere analitico». — 6. «Ricerche di carattere vario».
- 3. BROGLIA VALERIO.** — 1. «Due secoli di nichelio». — 2. «Panorama di chimica». — 3. «G. Cr. Oersted e la scoperta dell'alluminio».
- 4. CAPPELLO ALFIO.** — «Gli anioni nella lotta contro il malsecco degli agrumi». (Lo stesso lavoro è stato presentato al Premio per le Scienze Fisiche n. 10 e per le Scienze Naturali n. 5).
- 5. CAVALLINI FILIBERTO.** — «Studi ed esperienze sulla bonifica veneta». (Lo stesso lavoro è stato presentato al Premio per le Sc. Naturali n. 7).
- 6. CERASOLI ERCOLE.** — 1. «Il legame chimico». — 2. «La legge della periodicità di Mendeleieff». — 3. «Alcune osservazioni sulla terminologia chimica».
- 7. CURLI GIORGIO.** — 1. «Sul colore rosso-violetto che presentano talvolta le soluzioni commerciali di ipoclorito». — 2. «Azione del rame su reattivi perossidasici». — 3. «Alchilxantogenati di rame nella determinazione ponderale del rame e del solfuro di carbonio». — 4. «Recenti esperienze con gli antiossidanti dei grassi».
- 8. DE NICOLA MARINA.** — 1. «Alkaline Phosphatases and the Cycle etc.». — 2. «Azione dei raggi X sulle cellule in attivo metabolismo di acidi nucleici». — 3. Numero 3 estratti da «Experientia». — 4. «Rapporto fra fosfatasi alcaline e metabolismo degli acidi nucleici».



ecc. ». — 5. « Il pigmento carotenoidico del guscio dell'echinoderma *Ophidiaster Ophidianus* ». — 6. « The distribution of carotenoids in some marine invertebrates ». — 7. « The carotenoids pigment during early development etc. ». (Gli stessi lavori sono stati presentati al Premio per le Scienze Naturali n. 10).

9. GABUCCI BOSSO MARCELLA. — « L'acido piruvico prodotto intermedio nell'ossidazione dell'acetato a mezzo del lievito ».

10. GIORDANO SALVATORE. — « Sulla eterificazione per mezzo dell'acido sulfurico in tubi chiusi ».

11. GUERRINI GIUSEPPE. — « Considerazioni su tre argomenti di Chimica ».

12. GUILIZZONI GIAN GIACOMO. — « Elementi di analisi chimica qualitativa ».

13. IMBRICI DONATO. — « Contributo allo studio del fabbisogno fosforico, potassio scambiabile e manganese riducibile e scambiabile nei terreni della Daunia ».

14. LASSANDRO PEPE TOGO. — « La silice nei fumi sviluppati nelle operazioni di saldatura elettrica dei metalli ».

15. LO CASCIO MASSIMO. — 1. « Teoria elettronica della valenza ». — 2. « Chimica moderna. - Elementi di Mineralogia ».

16. MATALONI FILIPPO. — « Importanza industriale della concia con formaldeide ».

17. NOVARA GIUSEPPE. — « Andamento di analisi chimica qualitativa mediante l'impiego di numerosi reattivi organici ».

18. OCCHIALINI UNTERSTEINER LAURA. — 1. « Sulla funzione del radicale metilico in posizione 2 negli antipiretici derivati isopierzolonici ». — 2. « Farmaci metemoglobinizzanti, metemoglobinemie e loro trattamento ». (Gli stessi lavori sono stati presentati al Premio per le Scienze Naturali n. 21).

19. PACE NICOLA. — 1. « Taratura della scala delle lunghezze d'onda nell'ultravioletto mediante le soluzioni di antracene ». — 2. « I calori specifici di alcuni gas alle alte temperature ». — 3. « Misure di assorbimento nel visibile di soluzioni di jodio ».

20. PANI ANTONIO. — « Su alcuni schemi di trattamento dei minerali ossidati di zinco ».

21. PAVOLINI TITO. — 1. Numero otto estratti da « Annali di chimica ». — 2. Numero due estratti da « Gazzetta chimica italiana ». — 3. Numero tre estratti da « Bollettino chimico farmaceutico ». — 4. Numero due estratti da « Analytica Chimica Acta ». — 5. « Sintesi della canfopiperazina ».

22. RASCA PIETRO. — « Affinazione dell'oro con procedimento misto ».

23. RIZZO FRANCESCO. — « La fabbricazione e l'impiego dei mosti muti e mosti concentrati nella industria enologica del marsalese ».

24. ROSATTI RIVERSO GIUSEPPINA. — 1. « Sui prodotti di irradiazione del colesterolo ai raggi u. v. ». — 2. « Gli studi più recenti sugli antimalarici sintetici ».

25. VETERE FRANCESCO. — « Un sistema nuovo per l'uso delle valenze nelle formulazioni chimiche ». (Lo stesso lavoro è stato presentato al Premio per le Scienze Fisiche n. 32).

## ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE PER LE SCIENZE NATURALI

(Scadenza 15 marzo 1954 - Premi lire 250.000).

1. ARCIDIACONO SALVATORE. — « Botanica » (2 voll.).

2. BOCCADAMO CARMELO. — « Natura ».

3. BONU VITTORIO. — « Lo zolfo e i suoi composti inorganici e organici nella moderna fitoiatria ».

4. BRIAN LUIGI. — « Difesa della vita ».

5. CAPPELLO ALFIO. — « Gli anioni nella lotta contro il malsecco degli agrumi ». (Lo stesso lavoro è stato presentato al Premio per le Scienze Chimiche n. 4 e per le Scienze Fisiche n. 10).

6. CAPRA ANNA. — « Andamento delle precipitazioni a Bologna dal 1813 al 1942 ».

7. CAVALLINI FILIBERTO. — « Studi ed esperienze sulla bonifica veneta ». (Lo stesso lavoro è stato presentato al Premio per le Scienze Chimiche n. 5).

8. CITRO GIORGIO. — « Qualche ricerca sull'azione biologica del Rubidio ».
9. D'ARCA SIMONETTI ADELE. — 1. « Studio sulla possibilità d'incrocio tra *Culex Pipiens* L. e *Culex Autogenicus* R. ». — 2. « Possibilità di studio della tossina stafilococcica mediante cromatografia ».
10. DE NICOLA MARINA. — 1. N. 3 estratti da « Experientia ». — 2. « Alkaline Phosphatases and the Cycle of Nucleic Acids, ecc. ». — 3. « Azione dei raggi X sulle cellule in attivo metabolismo di acidi nucleici ». — 4. « Rapporto fra fosfatasi alcaline e metabolismo degli acidi nucleici, ecc. ». — 5. « Osservazioni sulle variazioni dei pigmenti durante lo sviluppo embrionale di echinodermi ». — 6. « Il pigmento carotenoidico del guscio dell'echinoderma *Ophidiaster Ophidianus* ». — 7. « The distribution of carotenoids in some marine invertebrates ». — 8. « The Carotenoid pigments during early development, ecc. ». — 9. « The Supply of Ribonucleic acid to the male germ cells, ecc. ». (Gli stessi lavori sono stati presentati al Premio per le Scienze Chimiche n. 8).
11. FRACANZANI CARLO. — « Castrazione ormonale dei pulcini ».
12. GHIDINI GIOVANNI MARIA. — 1. « Glossario di Entomologia ». — 2. « Eccezionale comportamento di *Blaps Gibba* verso alcuni contatticidi ». — 3. « Lotta contro gli insetti ». — 4. « L'Ape ». — 5. « L'impiego dell'elicottero per la difesa della bieticoltura italiana ». — 6. « Il Cleono della bietola e l'estendersi della sua area di distribuzione ». — 7. « Validità delle due specie *Antisphodrus Reissi* e *Antisphodrus Boldorii* ». — 8. « Considerazioni sistematiche sulle due specie *Antisphodrus Scheibersi Küst*, ecc. ».
13. GIORDANO SALVATORE. — « Argomento di scienze naturali sulla Mirmecofilia e Acarofilia ».
14. GIZZI CORRADO. — « Ecologia del grano ».
15. IACONI IONE. — « Saggio di carta antropogeografica della Valle Umbra ».
16. LOMBARDINI GIOCONDO. — 1. « Acari nuovi ». — 2. « Osservazioni biologiche e anatomiche su *Rhipicephalus sanguineus* ». — 3. « *Canestriniidae* dell'America del Sud ». — 4. « Acari nuovi ». — 5. « Su alcuni acari raccolti dal dott. Mari Franciscolo ». — 6. « Acarina ». — 7. « Acari nuovi ».
17. MARCUCCI GIOVAMBATTISTA. — « Anomalie della metagenesi sull'*Olea Europaea* L. — Var. *Sativa* ».
18. MAUCCI WALTER. — 1. « L'ipotesi dell'“ Erosione inversa ” come contributo allo studio della speleogenesi ». — 2. « Inghiottriti fossili e paleoidrografia epigea del solco di Aurisina ».
19. MICELI DOMENICA. — « Il principio della vita ».
20. MONACO TERESA. — « Sui rapporti numerici dei sessi nei ragni con speciale riguardo a *Teutana Triangulosa* ».
21. OCCHIALINI UNTERSTEINER LAURA. — 1. « Sulla funzione del radicale metilico in posizione 2 negli antipiretici derivati isopirazolonici ». — 2. « Farmaci metemoglobinizzanti, metemoglobinemie e loro trattamento ». (Gli stessi lavori sono stati presentati al Premio per le Scienze Chimiche n. 18).
22. PIAMARTA LINO. — « Rovereto ricerche di geografia urbana ».
23. ROMAGNOLI EMILIO. — « Note di vita delle api ».
24. SAVÀ ANNA MARIA. — « Gli idrocarburi della Sicilia ».
25. TACCHINI MATILDE. — « Ricerche sui batteri simbiotici delle Blatte ».
26. TORDI MIRELLA. — 1. « Epitassia o reciproca orientazione fra cristalli di specie diversa ». — 2. « Determinazione del sesso nelle api ».
27. TORELLI BEATRICE. — 1. « Su alcuni particolari aspetti della istologia di *Cerianthus* ». — 2. « Osservazioni sulla mesoglea di *Calliactis Parasitica* ».
28. VENTURA MARIA. — 1. « Osservazioni sulla origine di radici avventizie da cauli ». — 2. « Origine delle radici avventizie da cauli in alcune Asteracee ».
29. ZANANDREA GIUSEPPE. — 1. « Rilievi e confronti biometrici e biologici sul *Petromyzon* (Lampetra) Planeri, Bloch. Nelle acque della Marca Trevigiana ». — 2. « Sulla rigenerazione nei Petromizonti ». — 3. « La piccola Lampreda in Italia ».

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 10 aprile 1954*

- ACCADEMIA NAZIONALE DEI XL. — *Achille Russo*. Estr. da « Annuario Generale », 1953.
- Archivio Zoologico Italiano*. (Edito sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche). Pubblicazione giubilare in onore di Umberto Pierantoni promossa dalla Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli. Voll. XXXVII-XXXVIII, 1952-53 (P. I e II).
- BORTOLOTTI Ettore. — Vedi: RUFFINI PAOLO.
- CAMERA DI COMMERCIO, INDUSTRIA ED AGRICOLTURA. PIACENZA. — *Atti del II Convegno Nazionale sulle utilizzazioni del Metano. Piacenza, 12-14 settembre 1953*. Piacenza, Soc. Tip. Ed. Porta, 1953. Pp. 362, in-8°.
- *Seconda Mostra Nazionale del Metano*. Numero unico. Piacenza, Soc. Tip. Ed. Porta, 1953. Pp. 46, in-4°, con figg.
- EJDUK JU. JA. - Vedi: VAJVD A. JA., EJDUK JU. JA. i GOFMAN B. E.
- GOFMAN B. E. — Vedi: VAJVD A. JA., EJDUK JU. JA. i GOFMAN B. E.
- INSTITUTO DE MEDICINA TROPICAL. LISBOA. — *Cinquenta anos de actividade do Instituto*. (24 de Abril de 1902-24 de Abril 1952). Pp. 207, in-8°.
- Gli Istituti Zooprofilattici Sperimentali e l'Istituto Sperimentale Italiano « Lazzaro Spallanzani »*. Rassegna delle attività. Sotto gli auspici dell'Alto Commissariato per l'Igiene e la Sanità Pubblica. Faenza, Lega, 1954. Pp. XIII-376, in-4°.
- MARGARIA Rodolfo. — *Pubblicazioni dell'Istituto di Fisiologia dell'Università di Milano*. Anni Accademici 1948-1953.
- PIERANTONI Umberto. — Vedi *Archivio Zoologico Italiano*.
- RUFFINI Paolo. — *Opere matematiche*. Pubblicate sotto gli auspici dell'Unione Matematica Italiana a cura del prof. dott. Ettore Bortolotti con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. T. III: *Carteggio matematico*. Roma, Edizioni Cremonese della Casa Editrice Perrella, 1954. Pp. XXVII-254, in-8°.
- RUSSO Achille. — *Il potere germinale del soma, carattere generale negli esseri viventi, causa parziale per lo sviluppo dei tumori*. 2ª nota riassuntiva. Estr. da « Bollettino delle Sedute dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », serie 4ª, vol. II, fasc. 8.
- SENCKENBERGISCHE NATURFORSCHENDE GESELLSCHAFT. — *Gesamt-Verzeichnis der Senckenberg-Schriften. Zwölfjahres-Verzeichnis für 1941-1952*. Frankfurt am Main, 1952. Pp. 147, in-8°.
- Il Servizio fitopatologico negli Stati Uniti*. Rapporto della Missione Nazionale di Assistenza Tecnica n. 45/40 sul viaggio di studio effettuato nel 1951 negli Stati Uniti di America. Roma, Istituto Poligr. dello Stato, 1953. Pp. 254, in-8°.
- SOCIÉTÉ NÉERLANDAISE DE ZOOLOGIE. LEIDEN. — *Volume jubilaire dédié à J. A. Bierens de Haan*. Leiden, E. J. Brill, 1953. Pp. 139, in-8° (Archives Néerlandaises de Zoologie, tome X, 2<sup>e</sup> supplément).
- TEIXEIRA Carlos. — *Flora Mesozóica Portuguesa*. II parte. Lisboa, Serviços Geológicos de Portugal, 1950. Pp. 33, in-fol., con tavv.
- VAJVD A. JA., EJDUK JU. JA. i GOFMAN B. E. — *Vjažušie veščestva iz othodov gipsovyh kar'erov*. Riga, Ak. Nauk Latv. SSR. Pp. 186, in-8°, con figg.
- Webbia*. Raccolta di Scritti botanici edita dall'Istituto Botanico dell'Università di Firenze. Vol. IX, 1953-54.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta dell'8 maggio 1954*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Geometria.** — *Sugli elementi curvilinei piani  $E_3$  tangenti.* Nota (\*)  
del Socio E. BOMPIANI.

1. PREMESSA. — La totalità  $\infty^2$  degli  $E_3$  piani (di un piano proiettivo) passanti per un punto  $O$  ( $x = y = 0$ ) con la stessa tangente ( $y = 0$ ) rispetto al gruppo proiettivo è stata già studiata da C. Longo<sup>(1)</sup>, il quale ha mostrato che essi possono pensarsi come punti di un piano proiettivo rispetto ad un determinato gruppo di trasformazioni quadratiche (con i punti fondamentali appartenenti ad  $E_2$  aventi il centro nel punto rappresentativo dell'elemento iperinflessionale, cioè a tangente quadripunta).

Dò qui una rappresentazione un po' diversa, in cui gli stessi  $E_3$  vengono rappresentati su punti di un cono di uno  $S_3$  proiettivo sul quale opera un ben determinato gruppo di collineazioni  $G_4$ . Mi occupo poi degli invarianti di più elementi  $E_3$ .

Esamino infine la rappresentazione degli  $E_3$  tangenti in un punto rispetto alle trasformazioni puntuali e i relativi invarianti.

2. RAPPRESENTAZIONE NELLO  $S_3$  DEGLI  $E_3$  TANGENTI. — Sia

$$(2.1) \quad y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + [4]$$

uno degli  $E_3$  in esame: si ottengono gli  $\infty^2$  variando  $a_2, a_3$ .

(\*) Presentata nella seduta dell'8 maggio 1954.

(1) C. LONGO, *Sugli elementi curvilinei piani  $E_3$  con lo stesso  $E_1$ .* « Boll. U. M. I. », ser. III, a. III, pp. 108-111 (1948).



Una collineazione piana che lasci fissi  $O$  e  $y = 0$

$$(2.2) \quad x = \frac{a\bar{x} + b\bar{y}}{1 - (p\bar{x} + q\bar{y})} \quad , \quad y = \frac{d\bar{y}}{1 - (p\bar{x} + q\bar{y})}$$

muta lo  $E_3$  (2.1) nello  $\bar{E}_3$  per cui

$$(2.3) \quad \bar{a}_2 = \frac{a^2}{d} a_2 \quad , \quad \bar{a}_3 = \frac{a^2 p}{d} a_2 + 2 \frac{a^3 b}{d^2} a_2^2 + \frac{a^3}{d} a_3 \quad (2).$$

Si ponga

$$(2.4) \quad \frac{a^2}{d} = \lambda \quad , \quad \frac{a^2 p}{d} = \mu \quad , \quad 2 \frac{a^3 b}{d^2} = \nu \quad , \quad \frac{a^3}{d} = \sigma$$

e

$$(2.5) \quad \xi = a_2 \quad , \quad \eta = a_2^2 \quad , \quad \zeta = a_3 \quad , \quad \tau = 1;$$

gli  $E_3$  in esame si rappresentano nello  $S_3$  ( $\xi, \eta, \zeta, \tau$ ) nei punti del cono

$$(2.6) \quad \xi^2 = \eta\tau$$

rispetto al gruppo  $G_4$  delle collineazioni

$$(2.7) \quad \rho\bar{\xi} = \lambda\xi \quad , \quad \rho\bar{\eta} = \lambda^2\eta \quad , \quad \rho\bar{\zeta} = \mu\xi + \nu\eta + \sigma\zeta \quad , \quad \rho\bar{\tau} = \tau$$

che trasformano il cono in sé.

Risultano uniti in tutte le omografie il punto  $O_3$  ( $0, 0, 1, 0$ ) vertice del cono e il punto  $O_4$  ( $0, 0, 0, 1$ ), e le rette  $O_3 O_1$ ,  $O_3 O_2$ , su ciascuna delle quali si ha per ogni omografia un punto unito,  $U_1$  su  $O_3 O_1$  e  $U_2$  su  $O_3 O_2$ , variabili con l'omografia del gruppo:  $U_1$  ( $\lambda - \sigma, 0, \mu, 0$ ),  $U_2$  ( $0, \lambda^2 - \sigma, \nu, 0$ ).

Il punto  $O_4$  rappresenta l'elemento iperinflessionale,  $a_2 = a_3 = 0$ ; i punti di  $O_3 O_4$  (diversi da  $O_3$ ) rappresentano gli  $\infty^1 E_3$  con  $E_2$  di flesso ( $a_2 = 0$ );  $O_3$  va considerato come rappresentante di un elemento eccezionale non regolare (per cui non si può adottare la rappresentazione (2.1); ciò si vede scrivendo  $a_2/a_0$ ,  $a_3/a_0$  in luogo di  $a_2$ ,  $a_3$ ; i punti  $\neq O_3$  si ottengono per  $a_2 = 0$ ,  $a_0 \neq 0$  mentre  $O_3$  corrisponde ad  $a_0 = 0$ ).

Anche i punti della generatrice unita  $O_3 O_2$  rappresentano elementi eccezionali che si ottengono facendo tendere  $a_2$  e  $a_0$  a zero in modo che il rapporto  $a_2^2/a_0 a_3$  si mantenga finito o nullo (e in questo caso si ha  $O_3$ ).

Una generatrice ( $\neq O_3 O_2$ ) rappresenta un  $E_2$ , nel senso che due suoi punti ( $\neq O_3$ ) rappresentano due  $E_3$  con lo stesso  $E_2$ .

Ciò pone in evidenza in altro modo il fatto notissimo (Wölffing, Mehmke, C. Segre) che due  $E_2$  tangenti hanno un invariante di contatto (che qui apparisce come birapporto delle due generatrici che li rappresentano e delle due generatrici unite sul cono).

Prescindiamo nel seguito dagli invarianti relativi agli  $E_2$  degli  $E_3$  che si considerano.

(2) Salvo la differenza di notazioni queste formule sono in loc. cit. di C. Longo.

3. INVARIANTI DI E<sub>3</sub>. — Se si hanno tre E<sub>3</sub> con lo stesso E<sub>2</sub>, individuati da a<sub>2</sub> e da a<sub>3</sub>, a'<sub>3</sub>, a''<sub>3</sub> è evidente ch'essi hanno un invariante proiettivo (birapporto dei tre punti rappresentativi sulla stessa generatrice e del vertice). L'espressione dell'invariante è

$$(3.1) \quad \frac{a_3 - a'_3}{a_3 - a''_3}.$$

Già due E<sub>3</sub> hanno un invariante se il loro E<sub>2</sub> comune è di flesso.

Consideriamo ora due E<sub>3</sub> regolari individuati da (a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>), (a'<sub>2</sub>, a'<sub>3</sub>) con a<sub>2</sub> ≠ a'<sub>2</sub> (cioè con diversi E<sub>2</sub>); essi definiscono una *retta covariante* ai due E<sub>3</sub> luogo dei punti di contatto di coniche contenenti i due E<sub>3</sub>. Questa retta, passante per O, ha l'equazione y = m'x con

$$(3.2) \quad \frac{2}{m'} = \frac{\frac{a'_3}{a'_2} - \frac{a_3}{a_2}}{a_2 - a'_2}.$$

Tre elementi E<sub>3</sub> individuati da (a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>), (a'<sub>2</sub>, a'<sub>3</sub>), (a''<sub>2</sub>, a''<sub>3</sub>) si diranno in posizione speciale se il primo e il secondo e il primo e il terzo danno luogo alla stessa retta covariante, cioè se

$$(3.3) \quad \frac{\frac{a''_3}{a''_2} - \frac{a_3}{a_2}}{a''_2 - a_2} = \frac{\frac{a'_3}{a'_2} - \frac{a_3}{a_2}}{a'_2 - a_2}.$$

La posizione speciale non dipende dall'ordine dei tre elementi. Si vede subito che, nella nostra rappresentazione *tre E<sub>3</sub> in posizione speciale sono rappresentati da tre punti* (del cono) *in un piano per O<sub>4</sub>*.

Siano ora dati *quattro* E<sub>3</sub> di cui tre qualsiasi non siano in posizione speciale. Uno di essi considerato insieme a ciascuno dei rimanenti dà luogo a una retta covariante.

Il birapporto delle tre rette così individuate e della tangente comune è un invariante proiettivo dei quattro E<sub>3</sub>. Indicati i rapporti che figurano in (3.2), (3.3) con L'<sub>3</sub>, L''<sub>3</sub> (e similmente per L'''<sub>3</sub>) l'invariante dei quattro E<sub>3</sub> vale

$$\frac{L'''_3 - L'_3}{L''_3 - L'_3}.$$

Esso è l'*unico* invariante (dipendente effettivamente dal 3° ordine) come risulta dall'eliminazione di λ, μ, ν, σ dalle (2.7).

L'interpretazione di questo invariante nello spazio rappresentativo è la seguente:

*Si consideri la retta congiungente O<sub>4</sub> col punto rappresentativo di uno degli E<sub>3</sub>; i piani che da essa proiettano i punti rappresentativi degli altri tre E<sub>3</sub> ed O<sub>3</sub> hanno per birapporto l'invariante.*

4. ULTERIORI PROPRIETÀ DELLA RAPPRESENTAZIONE DEGLI E<sub>3</sub> TANGENTI. — Si possono aggiungere alcune osservazioni sulla rappresentazione data degli E<sub>3</sub> tangenti in un punto.

Qual'è il significato di un punto P dello spazio  $S_3$ ?

Poiché P determina un punto del cono (sulla  $PO_4$ ) e una generatrice (nel piano  $PO_3O_2$ ), *il punto P rappresenta la coppia di un  $E_3$  e di un  $E_2$*  <sup>(3)</sup>.

La rappresentazione data si presta quindi bene allo studio delle proprietà di queste coppie.

In particolare due tali coppie hanno, oltre gli invarianti del 2° ordine determinati dai loro quattro  $E_2$ , un invariante dipendente dagli  $E_3$  (il birapporto dei due punti rappresentativi e delle intersezioni della loro congiungente con il cono).

Per completezza bisognerebbe esaminare le rette in posizioni particolari rispetto al cono (tangenti in un punto generico; contenute nel piano tangente lungo  $O_2O_3$ ; contenute nel piano tangente lungo  $O_3O_4$  e più in particolare quelle per  $O_4$  o per  $O_3$ ; passanti per  $O_3$ ).

Un piano determina  $\infty^1 E_3$  (se in posizione generica rispetto al cono). Se il piano passa per  $O_4$  si hanno  $\infty^1 E_3$  in posizione speciale. Come si è visto questi  $E_3$  sono determinati da uno di essi e da una retta covariante (determinata da due qualsiasi degli  $E_3$ ). Se questa retta si assume come  $x = 0$  (non ancora fissata) è per la (3.2)

$$\frac{a'_3}{a'_2} = \frac{a_3}{a_2}$$

cioè il piano per questi due elementi (quello fissato e uno qualsiasi degli  $\infty^1$ ) e per  $O_4$  è

$$a_2 \zeta = a_3 \xi$$

che sega la  $O_2O_3$  in  $O_2(0, 1, 0, 0)$ . Questo punto non dipende affatto dall' $E_3$  quindi dipende soltanto dalla retta che si è scelta come covariante. Ciò porta che il punto  $O_2$  si può scegliere come immagine della retta e, poiché  $O_2$  non è geometricamente fissato sulla  $O_2O_3$  i punti di  $O_2O_3$  si possono assumere come immagini delle rette per  $O$ .

Del resto, senza specializzare la retta covariante, posto  $2/m' = k$ , dalla (3.2) si ha

$$\frac{a'_3}{a_2} = \frac{a_3}{a_2} + k(a'_2 - a_2).$$

Il piano per  $O_4$  e per i due elementi è

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ a_2 & a_2^2 & a_3 \\ a'_2 & a_2'^2 & a'_3 \end{vmatrix} = 0$$

(3) L' $E_2$  appartiene all' $E_3$  se e solo se P è sul cono. Se P è sul piano tangente ad esso lungo la  $O_2O_3$  esso individua in realtà il solo  $E_3$ : perciò anche i punti di quel piano si possono assumere a rappresentare gli  $E_3$  insieme alle omografie rappresentate dalle prime tre equazioni (2.7). Però in questo caso un  $E_3$  è rappresentato da  $\xi = 1$ ,  $\eta = a_2$ ,  $\zeta = a_3/a_2$  e quindi si perde la rappresentazione degli  $E_3$  con  $E_2$  inflessionale ( $a_2 = 0$ ); o se si vuole si rappresentano tutti in  $O_3$ .

e taglia  $O_2 O_3$  ( $\xi = \tau = 0$ ) nel punto per cui

$$\begin{vmatrix} 0 & \eta & \zeta \\ 1 & a_2 & \frac{a_3}{a_2} \\ 1 & a'_2 & \frac{a'_3}{a'_2} \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\eta \left( \frac{a'_3}{a'_2} - \frac{a_3}{a_2} \right) = \zeta (a'_2 - a_2)$$

ossia  $k\eta = \zeta$  ossia nel punto di coordinate  $(0, 1, k, 0)$ ; cioè questo punto di  $O_2 O_3$  non dipende che dalla retta  $y = m'x$  (e non dall' $E_3$ ).

Consideriamo ora un piano *non* passante per  $O_4$ .

Esso può individuarsi mediante i punti rappresentativi di due  $E_3$  e un punto di  $O_2 O_3$  (cioè di una retta per  $O$ ). Questi elementi individuano un sistema di  $E_3$ ; indicati con  $(a_2, a_3)$ ,  $(b_2, b_3)$  i due elementi dati e con  $(c_2, c_3)$  un  $E_3$  generico del sistema si ha

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_2^2 & a_3 & 1 \\ b_2 & b_2^2 & b_3 & 1 \\ c_2 & c_2^2 & c_3 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 1 \\ b_2 & b_3 & 1 \\ c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} a_2 & a_2^2 & 1 \\ b_2 & b_2^2 & 1 \\ c_2 & c_2^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Se  $k = 0$ , cioè se il punto su  $O_2 O_3$  si sceglie come  $O_2$ , o la retta per  $O$  come  $x = 0$  si hanno i sistemi  $\infty^1$  già detti dal Longo *fasci* di  $E_3$  e caratterizzati dal fatto che tali  $E_3$  appartengono ad un *fascio* di cubiche aventi cuspidi sulla retta e la stessa tangente cuspidale.

Lo stesso accade naturalmente per qualunque valore di  $k$ ; cioè:

*Due  $E_3$  tangenti e una retta per il loro centro determinano un fascio di  $E_3$ ; due  $E_3$  tangenti determinano  $\infty^1$  fasci.*

5. INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI PUNTUALI. — La situazione cambia radicalmente se si considerano gli  $E_3$  per un punto e con assegnata direzione tangente rispetto alle trasformazioni puntuali regolari nel punto (di classe  $C_3$ ).

Posto, per l'elemento  $a_0 y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

$$(5.1) \quad \xi = a_2 a_0, \quad \eta = a_2^2, \quad \zeta = a_3 a_0, \quad \tau = a_0^2$$



e indicando con  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\tau}$  le analoghe espressioni per l'elemento trasformato si trova che una trasformazione puntuale induce nello spazio proiettivo  $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  una collineazione

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \bar{\xi} = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \tau \\ \rho \bar{\eta} = 2 \lambda_1 \lambda_2 \xi + \lambda_1^2 \eta + \lambda_2^2 \tau \\ \rho \bar{\zeta} = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \nu \zeta + \sigma \tau \\ \rho \bar{\tau} = \tau \end{array} \right.$$

i punti rappresentativi degli  $E_3$  essendo quelli del cono invariante

$$(5.3) \quad \xi^2 = \eta \tau.$$

La totalità delle trasformazioni puntuali che lasciano fisso il punto e la direzione tangente comune agli  $E_3$  si riflette nel gruppo di collineazioni  $G_6$  (5.2).

Rispetto ad esso si ha sul cono una sola generatrice invariante  $\xi = \tau = 0$  (sulla quale il  $G_6$  determina un  $G_1$  col vertice  $O_3$  invariante).

Due  $E_3$  con lo stesso  $E_2$  sono rappresentati da due punti di una stessa generatrice (che rappresenta l' $E_2$ ).

Segue da ciò il teorema noto <sup>(4)</sup> che tre  $E_2$  hanno un invariante di contatto (nel gruppo delle trasformazioni puntuali).

Scartiamo questi invarianti relativi ai soli elementi del 2° ordine di tre o più  $E_3$  in esame.

Tre  $E_3$  definiscono nello spazio rappresentativo un piano (dei tre punti immagini) e quindi un sistema  $\infty^1$  di  $E_3$  di cui quattro si diranno in posizione speciale (fra di loro).

Presi *cinque*  $E_3$  di cui non mai quattro in posizione speciale si può formare un invariante nel modo seguente (dipendente effettivamente dagli  $E_3$  e non soltanto dai loro  $E_2$ ). Si consideri nello spazio rappresentativo la retta che ne congiunge due e i piani per essa che proiettano gli altri tre punti (immagini degli altri tre  $E_3$ ). Il birapporto di questi tre piani e del piano del fascio per il vertice del cono è un invariante dei cinque  $E_3$  (per trasformazioni puntuali).

La stessa costruzione geometrica fornisce l'espressione analitica dell'invariante. Indicati i primi due elementi con  $(a_2, a_3)$ ,  $(b_2, b_3)$  e gli altri con  $(c'_2, c'_3)$ ,  $(c''_2, c''_3)$ ,  $(c'''_2, c'''_3)$  e posto

$$\left| \begin{array}{ccc} a_2 & a_3 & 1 \\ b_2 & b_3 & 1 \\ c'_2 & c'_3 & 1 \end{array} \right| / (a_2 - c'_2)(b_2 - c'_2) = L'$$

e similmente per  $L''$ ,  $L'''$  l'invariante vale

$$\frac{L'' - L'}{L''' - L'}.$$

(4) E. BOMPIANI, *Sulle trasformazioni puntuali e di contatto nel piano*. « Rend. Acc. Lincei », ser. VI, vol. IV, pp. 435-437 (1926).

**Fisica.** — *L'inerzia non appare sempre proporzionale al peso.*  
Nota preliminare (\*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

Per quanto non si sia avuta, in tempi recenti, ragione alcuna per dubitare della perfetta proporzionalità fra inerzia e peso della materia, ho intrapreso, da un paio d'anni, ricerche sperimentali, tendenti a verificare ulteriormente tale principio. Di ciò, ho già avuto occasione di esporre le ragioni, oltre che descriverne il dispositivo ed annunziarne i risultati conseguiti (1).

Ho continuato da allora tale ricerca, perfezionandone il metodo, e modificandolo in parte. Il dispositivo usato è, nel suo insieme, ancora quello descritto nella Nota citata. Esso ha lo scopo di confrontare i periodi di oscillazione di una bilancia di torsione, portante al suo giogo masse metalliche, volta a volta di natura diversa. Principalmente ho preso, in tal senso, in esame il Litio ed il Cromo, che, come ho già ricordato, presentano, fra gli elementi solidi a temperatura ordinaria, la maggior differenza fra i loro *difetti di massa*. A giustificazione di tale criterio, rilevo che il fenomeno del difetto di massa implica uno scarto del peso atomico progressivo, con massimo verso il cromo, nella successione del sistema periodico. Penso inoltre che sia da rifiutarsi (malgrado gli apparenti controlli sperimentali) l'ipotesi della trasformazione della materia in energia e viceversa, voluta da Einstein. Piuttosto è da ritenere che la materia costituente i nuclei di un certo grado di complessità, subisca gli effetti della propria inerzia (come negli spettrografi di massa), in misura alquanto ridotta. Una verifica di tale asserzione costituisce lo scopo della presente ricerca.

Il ricordato principio di proporzionalità fra inerzia e peso, corrisponde, come è noto, ai risultati di esperienze di Newton, Bessel, Eötvös, Pekàr. Di queste, quelle di Newton avevano una piccola approssimazione; circa quelle di Bessel, non si comprende perché egli abbia sperimentato con pesi diversi di vari metalli o sostanze; e inoltre egli non poteva tener conto di una possibile influenza ritardatrice, il campo magnetico terrestre, sulle masse metalliche oscillanti (era stato da poco scoperto il fenomeno dell'induzione elettromagnetica); le esperienze di Eötvös, infine, avevano carattere statico. Ho ciò ricordato, a conferma della opportunità delle mie nuove esperienze.

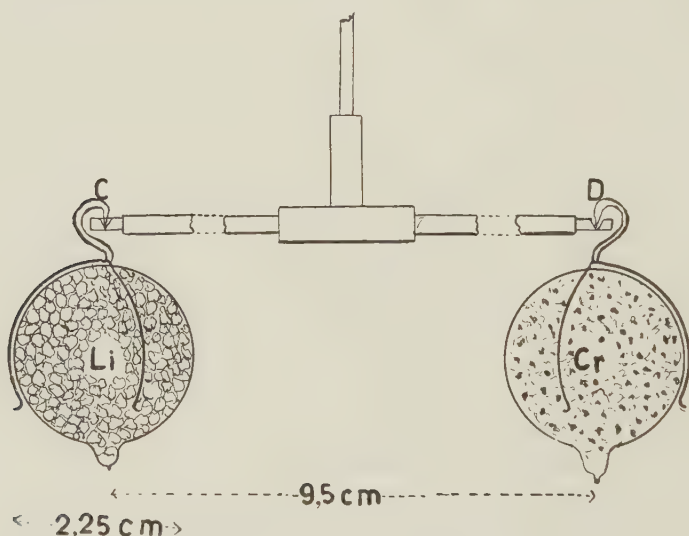
La bilancia di torsione da me usata è ancora quella descritta a p. 735, della Nota citata, con le seguenti modificazioni: il giogo CD è stato portato da 6,5 cm a 9,5 cm di lunghezza; i due recipienti cilindrici,  $R_1$ ,  $R_2$ , sono stati sostituiti da due palloncini di vetro (ved. figura di questa Nota nella

(\*) Presentata nella seduta dell'8 maggio 1954.

(1) Questi « Rendiconti », vol. XIV, pp. 733-740.

quale manca il filo di torsione e la campana pneumatica), del diametro di 2,25 cm e del peso (se vuoti) di 0,9 gr circa <sup>(2)</sup>.

Ciascun palloncino è riempito col metallo da sperimentare, in frammenti. Nel caso del Litio (densità 0,55), tali frammenti, del diametro medio di 2-3 mm, sono addossati strettamente tra loro. Per gli altri metalli (che hanno densità molto maggiore), i frammenti sono assai più piccoli, ma circondati ciascuno da bambagia non molto compressa, sì da riempire ancora tutto il volume dei palloncini. Questi, dopo chiusi alla fiamma, vengono ricoperti con una foglia incollata di alluminio (spessore 20  $\mu$ ); e poi, con opportuna correzione esterna, portati tutti esattamente al peso di 3,765 gr (compreso il gancio di sostegno di cui sarà ora detto, ed un piccolo accrescimento fisso dovuto alla massa del giogo, e calcolato dal momento d'inerzia di questo). L'approssimazione di tali pesate, spesso ricontrollate, è superiore al mg. I due palloncini contenenti lo stesso metallo (la figura, che è solo dimostrativa, indica



due metalli diversi) sono appesi, mediante ganci a tre griffe, forniti ciascuno di punta acuminata di acciaio rivolta in basso, alle estremità del giogo. Lì, si impegnano in due svasature coniche, col vertice acuminato in basso, che hanno, in alto, apertura di 1,5 mm. La distanza dei centri di queste svasature è di 9,5 cm, come si è detto. A causa di questi cambiamenti il periodo completo di oscillazione dell'equipaggio, sostenuto ancora dal filo di tungsteno di 45  $\mu$  di diametro e di 46 cm di lunghezza, risulta di circa 95 secondi; cioè alquanto maggiore, rispetto alle prime esperienze. Della massa totale dei palloncini, determinata con la pesata alla bilancia comune, cioè  $M = 3,765$  gr,

(2) È abbastanza facile ottenere tale palloncini sferici di vetro, soffiandoli da una canna di circa 0,5 cm di diametro e controllandone, in replicate soffiature od aspirazioni, mediante un foro di voluta dimensione, praticato in un foglio di mica il diametro. Si ha così, un'incertezza finale minore di 0,02 cm.

2,25 gr rappresentano quella del metallo contenuto in ciascuno di essi. Questo ultimo valore è dato con minore approssimazione, in causa dell'incertezza dello spessore di parete dei palloncini, non ben conosciuto, per il modo della loro fabbricazione. Ciò non ha alcuna importanza, perché  $M$  è determinata, come si è detto, con gran precisione ed è sempre costante.

Nell'usare il dispositivo, come era descritto nella Nota citata, sono incorso in un errore, al quale avevo accennato in fine della Nota stessa. Non dovevasi, come dissi, tener conto della maggiore spinta dell'aria ambiente, esercitata sul Litio, per la sua piccola densità (0,55), rispetto agli altri metalli, molto più pesanti. Ciò si dice, perché, con tale dispositivo, si sperimentava sempre, con tutto il volume del recipiente contenente ciascun metallo, avente, in ogni caso, eguale forma e valore. Tale errore porta ad una sensibilissima correzione dei risultati. Inoltre, l'uso fatto in quelle esperienze, del volume del recipiente, ora totalmente (per il Litio), ora parzialmente (per gli altri metalli), doveva dar luogo a variazioni del momento di tali masse, rispetto al punto di sospensione di esse, sulle estremità del giogo. A ciò doveva corrispondere qualche variazione nel periodo di oscillazione orizzontale della bilancia di torsione; che, per altro, non ho poi curato di indagare precisamente. Dico ciò perché ho provveduto ad eliminare l'inconveniente, mediante la descritta modificazione, che distribuisce quasi uniformemente la massa di ciascun metallo, in tutto il volume del recipiente sferico, ora usato.

Infine, le nuove misure, di cui dirò più sotto, sono state tutte eseguite a pressione ridotta (di 1 o 2 millesimi di mm di Hg), mediante l'uso di una pompa Leybold, rotativa, ad olio. Con ciò, le perturbazioni termiche, dovute principalmente a correnti di aria intorno al giogo, vengono quasi completamente eliminate. Anche lo smorzamento delle oscillazioni è notevolmente ridotto; ma occorrerà, in future e più precise esperienze, lavorare in vuoto più spinto, come  $10^{-5}$  o  $10^{-6}$  mm di Hg.

Prima di esporre i risultati delle nuove misure, è opportuno esaminare la possibilità o meno, di un altro errore, derivante dalla non perfetta costruzione, dei palloncini di vetro. Possiamo esprimere il valore  $T$ , del periodo di oscillazione della bilancia di torsione (o di un suo multiplo, scelto per maggior precisione; nelle attuali esperienze ho fissato tale multiplo in 12), mediante la formula di Huyghens-Steiner:

$$T = 2 \pi A \sqrt{M \left( \frac{2}{5} r^2 + d^2 \right)};$$

dove  $A$  è una costante, dipendente dalle caratteristiche del filo di torsione, dalla necessaria duplicità dei palloncini, e dal numero 12 fissato, delle oscillazioni lette ogni volta;  $r$  è il raggio dei palloncini;  $d$  la semilunghezza del giogo CD;  $M$  è, come si è detto, la massa totale di ciascun palloncino, contenente il metallo, con accessori. Di queste quattro grandezze  $A$ ,  $r$ ,  $d$ ,  $M$ , la seconda è conosciuta con non grande precisione, in causa dell'imperfetto modo di fabbricare i palloncini. Non importa conoscere precisamente  $A$  e  $d$ ,



perché sono rigorosamente fisse in tutte le esperienze; l'esatto valore di  $M$ , vien controllato ad ogni esperienza, con la massima precisione possibile.

Esaminiamo quali conseguenze può avere l'incertezza del raggio  $r$ . Suppongasì, che nell'eseguire due successive misure, relative a due differenti metalli (naturalmente per far ciò si sono dovute usare due coppie diverse di palloncini di vetro, non potendosi sostituire il solo metallo, e usare la stessa coppia), si siano trovati due differenti valori per  $T$ . Dicendo  $r_1$ ,  $r_2$ , i raggi medi di ciascuna coppia di palloncini usate nelle due misure, i detti valori saranno:

$$(1) \quad T_1 = 2\pi A \sqrt{M \left( \frac{2}{5} r_1^2 + d^2 \right)} \quad ; \quad T_2 = 2\pi A \sqrt{M \left( \frac{2}{5} r_2^2 + d^2 \right)}.$$

Per quanto si è detto, la differenza fra  $T_1$  e  $T_2$  non può dipendere, secondo la teoria classica, che da quella eventuale fra i raggi medi delle due coppie di palloncini,  $r_1$  ed  $r_2$ . Si ammetta che uno di questi sia conosciuto con tutta precisione, per esempio  $r_1$ ; il valore dell'altro sarà dato da:

$$(2) \quad r_2 = \sqrt{\left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2 r_1^2 + \frac{5}{2} d^2 \left[ \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2 - 1 \right]} ;$$

la quale ci dice che, se  $r_2 = r_1$ , sarà anche  $T_1 = T_2$ . Ciò è vero se il principio della proporzionalità fra massa inerte e massa pesante è rispettato. Se, per un'ipotesi, in contrasto con tale principio, le due ultime due eguaglianze non coesistessero, quel principio verrebbe menomato. Possiamo, nel modo seguente, assicurarci di ciò. Il rapporto tra  $T_1$  e  $T_2$ , si ha dalle (1):

$$(3) \quad \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^2 = \frac{\frac{2}{5} r_1^2 + d^2}{\frac{2}{5} r_2^2 + d^2}.$$

Facciamo ora, delle esperienze sussidiarie. Ci si serva per ciò, di una bilancia di torsione un po' diversa da quella sinora usata, o della stessa, nella quale si è abolito il giogo CD. Il filo di torsione può essere lo stesso, o meglio, alquanto più sottile, o lungo. Ad esso, vengano appesi, in successive quattro riprese, i 4 palloncini delle due coppie, i cui raggi medi sono stati chiamati  $r_1$  ed  $r_2$ . Per ciascuna coppia (in due riprese, ogni volta) si trovino i periodi medi, semplici o multipli,  $t_1$ ,  $t_2$ , riferentisi ai raggi medi suddetti. Si avrà, allora:

$$t_1 = 2\pi A \sqrt{\frac{2}{5} r_1^2} \quad ; \quad t_2 = 2\pi A \sqrt{\frac{2}{5} r_2^2} ;$$

dalle quali si ha:

$$(4) \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad ; \quad \text{ossia } r_2 = r_1 \frac{t_2}{t_1}.$$

Sostituiamo questo valore di  $r_2$ , nella (3); si avrà quello di  $T_1/T_2$ , corrispondente alla teoria classica, cioè alla proporzionalità fra inerzia e peso. Ma tale rapporto è anche determinabile con l'esperienza, mediante la bilancia

di torsione con giogo. Se le due determinazioni coincidessero, quella proporzionalità sarebbe verificata. In caso diverso, ciò sarebbe indizio di un nuovo effetto.

Passo ora ad esporre i risultati delle nuove esperienze, che, per le modifiche apportate, sono diversi da quelli già annunciati. Da parecchi mesi ho, come ho detto, sperimentato, quasi esclusivamente, con Litio e Cromo. Altre ricerche con Platino e Piombo, in relazione col Litio, sono, per ora, incomplete. Caricato, con una coppia di uno di quei metalli, il giogo della bilancia di torsione; coperta questa e fatto il vuoto, con la pompa rotativa, questa è lasciata in moto, sino alla lettura di più gruppi di serie di oscillazioni (da 5 a 10, ciascuna). Ciò non incomincia che almeno un'ora dopo la chiusura della bilancia, per evitare perturbazioni termiche. Le oscillazioni iniziali hanno un'ampiezza di 125 mm circa, che dopo la 12<sup>a</sup>, si riduce a circa 80 mm. Esse sono lette su scala ad 1 m di distanza, dalla bilancia. Con un cronografo a decimi di secondo (è leggibile così, quasi, anche il centesimo di secondo) si determina il tempo  $T$ , corrispondente ad una serie di passaggi dell'indice luminoso sullo zero centrale della scala, da destra verso sinistra; al tredicesimo passaggio, quel tempo corrisponde alle 12 oscillazioni complete, stabilite. Tale tempo risulta dell'ordine di 1145 secondi. Tra una serie e l'altra, possono manifestarsi scarti dell'ordine di 2 o 3 decimi di secondo. La media delle centinaia di letture fatte negli ultimi tempi, mi ha dato per  $T_1$ , Litio, e per  $T_2$ , Cromo, i seguenti valori:

$$T_1 = 1146,90 \text{ sec} \quad ; \quad T_2 = 1145,46 \text{ sec} \quad ; \quad \text{per cui: } T_1/T_2 = 1,00126.$$

Ho poi ammesso che il valore  $r_1 = 1,120$  cm, sia ben conosciuto e si riferisca alla media per i due palloncini contenenti Litio. Ciò, per quanto non possa essere molto discosto dal vero, è puramente convenzionale; importerà piuttosto conoscere la differenza di  $r_1$  con  $r_2$ , media dei palloncini con Cromo. Con la bilancia di torsione senza giogo, ho determinato i periodi  $t_1$ ,  $t_2$ , medi, per le due coppie di palloncini, riferentisi, questa volta, ad un maggior numero di oscillazioni (25, perché le oscillazioni stesse sono molto più rapide: cioè ciascuna di circa 15 sec, invece di 95 sec, per la bilancia a giogo). Si fanno così quattro gruppi di singole serie di osservazioni. Le medie, per ciascuna coppia, risultano:

$$t_1 = 679,80 \text{ sec} \quad ; \quad t_2 = 675,65 \text{ sec}.$$

Per la (4), si ha così:

$$r_2 = 1,120 \frac{675,64}{679,80} = 1,113 \text{ cm}.$$

Per cui, i palloncini con Cromo sono alquanto più piccoli di quelli con Litio. La differenza dei diametri risulta così di 0,07 mm, il quale valore è dentro i limiti, fra cui avevo stabilito l'incertezza di quella dimensione. Sostituendo  $r_1$  ed  $r_2$  nella (3) si ha:

$$(T_1/T_2)^2 = 1,00026 \quad ; \quad \text{ossia } T_1/T_2 = 1,00013.$$

Ciò significa che il periodo  $T_2$  (del Cromo) è alquanto più breve di quello del Litio, nella misura di 0,00013 rispetto all'unità. Ora, l'esperienza diretta (con la bilancia di torsione a giogo) ha dato per quel rapporto, come si è detto 1,00126. Questo valore è dello stesso segno di quello trovato per la correzione del raggio dei palloncini; ma è di un ordine di grandezza diverso. Possiamo dunque correggere l'osservazione diretta di  $T_1/T_2$  sottraendo da essa la piccola quantità 0,00013. Si ha infine:  $T_1/T_2 = 1,00113$ .

Dobbiamo così ammettere, che il Litio oscilli più lentamente del Cromo, benché esso abbia lo stesso peso. L'effetto non può attribuirsi ad errore di dimensioni dei recipienti che lo contengono, perché al riguardo, è stata fatta la necessaria piccola correzione.

In conseguenza di ciò, la causa che fa apparire  $T_1 > T_2$  non può ricercarsi che in una variazione di  $M$ , contenuto nelle (1). E cioè, l' $M$  della prima equazione deve essere maggiore dell' $M$  della seconda. Siccome tali espressioni di massa rientrano nelle (1) come masse inerti; si deve dire che la massa inerte del Litio è maggiore di quella del Cromo.

Ora, per analogia a quanto si osserva nella spettrografia di massa, conviene non parlare di maggiorazione del periodo  $T_1$  del Litio, rispetto a  $T_2$  del Cromo, ma di diminuzione di questo rispetto al Litio. È il Cromo, che nella bilancia di torsione, dà luogo ad un periodo più rapido, rivelando che la sua massa inerte è alquanto più piccola di quella del Litio, come avviene nello spettrografo di massa.

Il valore 0,00113 rappresenta, come si è detto, la variazione unitaria in meno, passando dal Litio al Cromo. Per ottenere ora quella subita dalla massa, occorre raddoppiare quel valore, perché  $M$  è sotto il simbolo della radice quadrata. Si ha così, 0,00226. Inoltre, poiché non tutto il valore di  $M$  si riferisce al metallo studiato, ma solo alla quota parte di 2,25 gr, su 3,765 gr, si ha, infine, che il difetto di massa inerte unitario del Cromo rispetto al Litio è dato da:

$$\Delta m = 0,00226 \frac{3,765}{2,25} = 0,00378.$$

Questo valore è abbastanza prossimo a quello che ci fornisce lo spettrografo di massa, e cioè 0,00345. Senza dar per ora troppo peso a questa discreta corrispondenza di cifre, osserviamo la diversità di funzionamento tra quello strumento, e la bilancia di torsione. In quello sono forze elettriche e magnetiche che agiscono sui corpuscoli elettrizzati in moto. Nel secondo caso, si tratta di una forza meccanica (la torsione del filo) che spinge le masse metalliche neutre.

Per ora, è dunque lecito ammettere che la materia in moto, che per la sua inerzia reagisce contro le forze agenti, si appalesa meno inerte nel caso del Cromo che non in quello del Litio. Ciò, ripeto, è dato tanto dal citato classico strumento, quanto dalla mia nuova esperienza. Ma poiché in questa è stato possibile, in precedenza, stabilire quale sia la massa pesante in giuoco (mediante la bilancia comune); la quale cosa non ha l'equivalente nell'uso

dello spettrografo di massa; penso che, cercando di mettere d'accordo i risultati della classica esperienza e della mia, si debba asserire che non di *difetto di massa* si debba trattare, ma piuttosto di *difetto d'inerzia*. Così dico, perché, in sostanza, la mia nuova esperienza mostra che massa (o peso) ed inerzia non siano tra loro esattamente proporzionali.

Ammettendo questo nuovo punto di vista, i due valori 0,00378 e 0,00345, dati da me e dallo spettrografo, rappresenterebbero, nei due diversi metodi, la misura dell'ora definito difetto d'inerzia. Essi, pur essendo abbastanza prossimi, non sono eguali. Potrà riconoscersi, in seguito, se si è trattato di errore sperimentale da mia parte, o se la proposta teoria debba in qualche modo, venire modificata o perfezionata.

Sviluppando la nuova concezione, si può ammettere che la materia, sinché è in riposo, subisce l'azione attrattiva di altra materia, seguendo la legge newtoniana. Tuttavia, come si sa, tale attrazione si accresce enormemente, nel caso di corpuscoli vicinissimi, come quelli costituenti il nucleo atomico; ciò avviene nella misura dell'ordine di grandezza di  $10^{38}$  volte. Ed ora si osserva che la nuova esperienza, da me annunciata, fa vedere che la materia costituita da particolari nuclei atomici (come il Cromo), e che perciò nel suo interno è sede delle dette enormi forze attrattive, ha *proprietà inerti alquanto ridotte*. Nel caso del Cromo, rispetto al Litio, per lo meno, l'ordine di grandezza di questa riduzione è lo stesso, sia usando lo spettrografo di massa (od il metodo della parabola o quello di Dempster), sia la bilancia di torsione. A maggiore conferma di tale vedute, occorrono esperienze con mezzi più perfezionati, estesi a tutti gli altri elementi del sistema periodico, solidi o liquidi a temperatura ambiente.

Come conclusione delle ricerche esposte, va osservato che il descritto fenomeno del difetto di inerzia, costituisce un principio meccanico del tutto nuovo, che getterà molta luce sulla più intima comprensione dell'attrazione newtoniana. La sua portata investe anche la struttura delle teorie relativistiche di Einstein. Infatti, mentre questi ammette che la formazione di un nucleo atomico ha dato luogo a sparizione di materia e a produzione di energia, la mia esperienza fa vedere che il cosiddetto *difetto di massa* va interpretato soltanto come *difetto di inerzia*, perché, come nel caso spiegato, la massa del Cromo intesa come *sostanza della materia* è sempre la stessa, tanto se pesata alla bilancia comune, quanto se oscillante nella bilancia di torsione.

Riconosciuto ciò, viene a confermarsi la erroneità del principio ammesso da Einstein, della trasformabilità della materia in energia e viceversa. In conseguenza, viene a mancare una delle basi fondamentali di entrambe le teorie su ricordate, come da più anni, per semplici ragioni logiche, io sostengo.



**Botanica.** — *La difesa contro il cancro corticale del castagno* («*Endothia parasitica*»). Nota (\*) del Corrisp. ALDO PAVARI.

L'Italia è al primo posto in Europa per l'importanza forestale del castagno. Sebbene, in confronto al secolo scorso, la superficie dei castagneti sia fortemente diminuita, tuttavia essa rimane sempre cospicua, con oltre 450.000 ettari di castagneti da frutto e circa 300.000 ettari di castagneti cedui. Questo patrimonio castanile italiano è prezioso non soltanto dal punto di vista economico (produzione di frutto, legname da opera e da estratti tannici ed altri prodotti secondari), ma anche da quello idrogeologico poiché i castagneti si trovano per buona parte nella zona di montagna e di collina. Sebbene la funzione economica del castagneto da frutto sia oggi molto minore che in passato per l'economia delle popolazioni montane, essa è sempre rilevante d'altra parte, i castagneti cedui forniscono una ingente massa di legname da opera in svariatisimi assortimenti che trovano prevalente sbocco nell'agricoltura.

Si può perciò facilmente comprendere quale allarme abbia suscitato la comparsa in Italia di una gravissima malattia cioè il cancro corticale prodotto dall'Ascomicete *Endothia parasitica*, il quale ha distrutto la quasi totalità dei castagneti negli Stati Uniti d'America. Questo fungo fu osservato per la prima volta nel 1904 presso New York; poi si diffuse rapidamente verso est e verso sud dilagando in quasi tutto l'areale delle specie di castagno americane cioè della *C. dentata* — che è la più importante come albero forestale — e della *C. pumila*. In neppure 40 anni questa diffusione si è estesa su vastissimi territori; nei soli Monti Appalacchiani meridionali ha annientato il castagno su oltre 16 milioni di ettari. Per parecchi anni la comparsa improvvisa di questo parassita rimase inesplicabile fino a che nel 1913 Meyer trovò come *Endothia parasitica* fosse ampiamente diffusa in Cina e Giappone su *Castanea mollissima* e su *Castanea crenata*. Fu ritenuto perciò che il fungo fosse di origine orientale e che fosse stato casualmente introdotto negli Stati Uniti d'America.

L'Italia è il primo Paese europeo dove è stata segnalata questa malattia; precisamente dal Paoli nel 1938 in provincia di Genova e successivamente in provincia di Udine. Fin da queste prime segnalazioni fu compreso chiaramente quale minaccia incombesse sui nostri castagneti e furono perciò immediatamente presi tutti quei provvedimenti amministrativi che si riteneva potessero ostacolare la diffusione della infezione, mentre si iniziarono su larga scala, a titolo sperimentale, prove di bonifica di alcune zone infette. Malgrado ciò la malattia si andò estendendo in Liguria e in Piemonte e vennero scoperti nuovi focolai in provincia di Avellino. Dopo la stasi nella lotta imposta dal periodo bellico, di fronte all'estendersi del flagello il Ministero dell'Agricoltura

(\*) Presentata nella seduta dell'8 maggio 1954.

e delle Foreste incaricò nel 1946 la Stazione Sperimentale di Selvicoltura di Firenze e la Stazione di Patologia Vegetale di Roma di proporre un piano di lotta; nello stesso anno 1946 l'UNRRA inviava in missione lo scrivente negli Stati Uniti d'America per studiare quanto si era fatto in tale settore ed assicurare una efficace collaborazione degli studiosi americani con quelli italiani.

In una lettura all'Accademia dei Georgofili del 1947 lo scrivente espose il programma delle ricerche sulle quali impostare la lotta contro il cancro corticale e che si riassumeva nelle seguenti direttive:

- 1° mezzi preventivi per ostacolare la diffusione della malattia;
- 2° interventi diretti con mezzi curativi;
- 3° ricerca di castagni resistenti nell'ambito della specie europea (*C. sativa*);
- 4° introduzione e sperimentazione di castagni resistenti;
- 5° ottenimento di nuovi castagni resistenti mediante la ibridazione e la selezione.

L'attuazione di tale programma è stata resa possibile su vasta scala grazie ai fondi stanziati dal Governo Italiano e dagli efficaci aiuti finanziari dei fondi UNRRA, ERP, ecc., come pure dalla preziosa collaborazione non solo degli Stati Uniti d'America, ma anche di altri Paesi come la Spagna e la Francia.

Dopo 8 anni dall'inizio dell'attività sperimentale mi sembra opportuno esporre in breve riassunto alla nostra Accademia i primi risultati conseguiti, non solo per le prospettive che essi offrono nel campo pratico applicativo ma anche per la loro importanza dal punto di vista biologico.

**I. MEZZI PREVENTIVI.** — Osservate le prime infezioni in Liguria e in provincia di Udine, vennero presi, come ho già detto, provvedimenti per l'abbattimento e l'abbruciamento dei castagni infetti, interessando non soltanto alberi singoli ma intere zone boschive. Fu disposto anche, con provvedimenti amministrativi, il divieto di esportazione di legname di castagno dalle zone infette. Analoghi provvedimenti erano stati già presi dagli Stati Uniti d'America, ma con risultati praticamente nulli, ciò che fu confermato anche da noi, per cui oggi si può asserire che l'intervento per la distruzione di primi focolai d'infezione può avere una certa efficacia soltanto quando essi siano ai loro inizi e si tratti soltanto di poche piante infette; perciò è stata intensificata la vigilanza non soltanto nelle provincie già dichiarate infette, ma anche in quelle immuni. Nonostante questa severa vigilanza la malattia ormai si è diffusa in quasi tutta l'Italia.

Qualcuno aveva consigliato la trasformazione dei castagneti da frutto in cedui nella speranza che sui polloni del ceduo la virulenza del fungo fosse minore. Ciò però non poteva dare alcun benefico risultato in quanto il parassita attacca con maggior virulenza i polloni giovani ed infatti notevoli estensioni di cedui sono state colpite; tuttavia è proprio nei cedui che recentemente sono stati riscontrati dei fenomeni di resistenza spontanea al parassita, che rappresentano l'aspetto più interessante del problema. Perciò ritornerò sull'argomento fra breve.

2. MEZZI CURATIVI DIRETTI. - Dopo l'esperienza negativa fatta negli Stati Uniti d'America non vi erano molte speranze su tali interventi; ciononostante sono state eseguite metodiche esperienze con trattamenti di soluzioni di solfato di rame (anche con sistemi di imbibizione), somministrazioni di concimi vari, di microelementi al terreno, ecc. tutto ciò con risultato negativo. D'altra parte qui si presenta anche il problema economico poiché non si possono adottare procedimenti troppo costosi.

3. RICERCA DI TIPI RESISTENTI DI *C. sativa*. - Nella citata lettura ai Georgofili ponevo l'interrogativo se il nostro castagno (*C. sativa*) possa essere colpito così generalmente e gravemente come la *C. dentata* in America. Soggiungevo che la rapida diffusione della malattia in Italia in punti geograficamente distanti ed ecologicamente svariati, su gran numero nelle varietà locali da frutto, come pure sul castagno selvatico, non ci lasciava grandi speranze, «Ma noi vogliamo aggrapparci anche ad un filo sottilissimo ed abbiamo affidato al terreno nel vivaio di Masone in provincia di Genova i semi di oltre 120 varietà o per lo meno provenienze affluite da ogni parte d'Italia per poter poi saggiare la eventuale resistenza delle piante ottenute, anche per mezzo dell'inoculazione artificiale». Questa direttiva fu attuata e successivi impianti sperimentali ad Avellino e a Bagni di Lucca permisero di produrre decine di migliaia di piante da seme anche delle provenienze meridionali ed insulari.

Un fatto interessante che giustificava di affidarsi ancora a questo filo di speranza era stato constatato dallo scrivente e dai proff. Biraghi e Morettini in Spagna e precisamente nei dintorni di Bilbao e Santander nel 1947; un'infezione di *Endhotia parasitica* da noi osservata su esemplari di castagno giapponese (*C. crenata*) e risalente ad almeno 20 anni, non si era diffusa nei castagneti delle immediate vicinanze tranne che in una sola pianta che era stata attaccata alla base ma aveva reagito vigorosamente con la formazione di un callo cicatriziale. Ed è interessante notare che a tutt'oggi nessuna nuova infezione di *Endothia parasitica* è stata osservata nei castagneti della Spagna e del Portogallo. Poteva esservi un dubbio sulla identificazione del fungo ma le ricerche di Biraghi hanno accertato che si tratta di *E. parasitica* le cui culture si sono dimostrate tipicamente virulente.

Questi fatti nel loro complesso permettevano di non abbandonare ogni speranza, ma questa oggi sta diventando una certezza. Infatti nel 1951 per la prima volta Biraghi osservava in un castagneto ceduo presso Masone (Genova), cioè in una delle zone di più antica infezione, che l'85 % dei polloni erano infetti, ma che solo in piccolo numero si mostravano sofferenti ed erano periti. Negli altri si era verificato un processo di attiva e rapida cicatrizzazione ed il micelio restava confinato negli strati più esterni della corteccia mercé la formazione di una efficace barriera di tessuto suberoso che arrestava la penetrazione del micelio nello spessore della corteccia. In tutti questi polloni la vegetazione si presentava normale. Non si trattava però di un caso isolato poiché fenomeni analoghi sono stati poi osservati in altri castagneti, tutti

nelle zone di vecchia infezione come in varie località della Liguria, in provincia di Alessandria, Torino ed anche in quella di Treviso, Udine e Avellino. Due ipotesi sono state prospettate da Biraghi: 1° esaltazione di un carattere latente di resistenza; 2° diminuzione della virulenza del parassita. Quest'ultima ipotesi si presenta però poco attendibile in quanto, accanto ad individui resistenti, ve ne sono alcuni che soggiacciono al parassita. Ad ogni modo si può asserire: a) che non si tratta fenomeni legati a particolari condizioni ecologiche; b) che i casi di resistenza non si trovano nei castagneti di recente infezione.

Il fenomeno ha fatto subito pensare alla speranza prospettata in America da Graves, che, per mutazione gemmaria, si potesse verificare l'emissione di polloni resistenti. Questa eventuale interpretazione dei fatti di resistenza che si manifestano nei nostri castagneti non può reggere, poiché i casi di resistenza si riscontrano su tutti i polloni dello stesso ceppo, cioè dello stesso individuo e poi perché è troppo elevato il numero di individui che presentano il nuovo carattere.

D'altra parte nelle piante ottenute da seme di *C. sativa* di varie provenienze coltivate nei citati vivai sperimentali, situati in zone infette, un certo numero di individui è stato colpito ed è perito per infezione spontanea; altra percentuale è perita in seguito ad inoculazione artificiale ma alcuni individui hanno reagito anche a questa e si sono dimostrati resistenti. Ad esempio nel vivaio di Avellino Biraghi ha ottenuto i seguenti risultati:

Varietà o provenienze sperimentate: n. 69 (per un totale di 3988 piante) di cui:

Non resistenti . . . . .	n. 17
Resistenti con percentuali fino al 10 % . . . . .	» 37
Idem oltre il 10 % sino al 20 % . . . . .	» 10
Idem oltre il 20 % . . . . .	» 5

In queste ultime la percentuale di resistenza ha raggiunto il 22-25 % su alcune varietà calabresi.

È noto come la suscettibilità delle varie specie esotiche di *Castanea* all'*Endothia parasitica* sia diversa. Infatti essa presenta il minimo nella *C. mollissima*, è variabile nella *C. crenata* ed è massima nella *C. dentata*. Se però osserviamo le affinità sistematiche delle varie specie di *Castanea*, vediamo che esse sono molto maggiori tra la *C. sativa* e i suddetti castagni orientali che tra essa e la *C. dentata*, per cui potrebbe apparire giustificata l'insorgenza di tipi resistenti anche nell'ambito della nostra specie. Comunque è un fatto accertato che, dove i castagneti parevano completamente distrutti, oggi essi verdeggiano e pertanto è lecito confidare che il prezioso albero potrà essere salvato anche perché è in atto la selezione dei tipi resistenti e la loro propagazione per via agamica. Questo fatto fondamentale diminuisce alquanto l'importanza della ricerca di castagni resistenti, sia nelle specie orientali che nei loro ibridi e la relativa sperimentazione in Italia. Tuttavia si ritiene opportuno dare qualche cenno anche sull'attività svolta in tale settore.



4. INTRODUZIONE E SPERIMENTAZIONE DI CASTAGNI RESISTENTI. - Risultando, come dianzi si è detto, che il grado di resistenza nella specie giapponese *Castanea crenata* è alquanto variabile e spesso nullo ed avendo dimostrato le precedenti esperienze che questa specie raramente trova condizioni favorevoli di ambientazione in Italia, si è preferito basarsi sulla specie più sicuramente resistente cioè il castagno cinese (*C. mollissima*). D'altra parte questa specie era, si può dire, sconosciuta in Italia per cui, d'accordo con gli studiosi americani, si è deciso di sperimentarla sulla più vasta scala possibile sia con piante da seme che per innesto, importando dall'America il materiale occorrente.

In questo settore la collaborazione americana è stata veramente preziosa sia per l'organizzazione della raccolta che per le ingenti quantità inviate e cioè dal 1947 al 1953 quasi 17.000 Kg. di castagne, 22.804 piante ed oltre 4.000 marze per innesto.

Con l'appoggio del Corpo Forestale dello Stato sono state prodotte in numerosi vivai di Italia centinaia di migliaia di piante; la produzione raggiunse nel 1953 la cifra di circa 180.000 piante. Dette piante furono poi collocate a dimora sia in veri e propri castagneti sperimentali sia in impianti pilota costituiti nelle Foreste Demaniali e presso privati.

Alla fine del 1953 tali impianti salivano a 284 per un totale di 66.000 piante per una superficie complessiva di 132 Ha.

Oltre a diversi tipi e varietà di castagni cinesi furono introdotti dagli U.S.A. notevoli quantitativi di ibridi già collaudati come resistenti e ottenuti dall'incrocio di *C. mollissima* con *C. dentata*, *C. crenata*, *C. Seguinii* e *C. sativa*. Il tempo in cui si è svolta tale sperimentazione non è sufficiente per poter trarre da essa risultati conclusivi. Si può tuttavia affermare che è possibile l'acclimatazione in grado più o meno elevato della specie cinese sebbene nel complesso essa si dimostri alquanto più esigente della *C. sativa*.

Quanto alla produzione del frutto, vi sono varietà di *C. mollissima* molto più pregiate di quelle della *C. crenata*, ma che tuttavia non possono competere con le migliori della *C. sativa* per i caratteri organolettici e per la serbevolezza. Comunque la sperimentazione della *C. mollissima*, che sarà ulteriormente ampliata, già allo stato attuale rappresenta uno degli esempi più importanti in Europa di introduzione di una nuova specie su larga scala e di una sua diffusione capillare; infatti essa si stende in tutte le regioni castanicole italiane dalle Alpi al Mezzogiorno.

5. IBRIDAZIONI. - L'esperienza americana ha dimostrato che la maggiore percentuale di ibridi resistenti si ottiene in seguito all'incrocio della *C. mollissima* con le altre specie ma che per conseguire una elevata resistenza è necessaria reincrociare (*backcrossing*) ibridi di prima generazione (F<sub>1</sub>) con poline di *C. mollissima*.

Oltre ad introdurre ibridi creati negli U.S.A. si sono iniziati anche in Italia incroci di *C. mollissima* con *C. sativa* e con varietà di *C. crenata* come pure con ibridi, cosicché si sono ottenuti poli-ibridi che sarà molto interessante seguire nel loro comportamento.

Nel castagneto sperimentale della Lama (Foresta di Vallombrosa) sono stati messi a dimora 107 ibridi creati dalla Stazione Sperimentale di Selvicoltura e 40 ibridi provenienza U.S.A. Già si sono potuti osservare interessanti fenomeni, tra cui la presenza di caratteri completamente nuovi in confronto a quelli di genitori. Pertanto, sia sotto gli aspetti morfologici che sotto quelli biologici, questo lavoro si prospetta molto importante nel campo della genetica.

Concludendo, l'attività sperimentale nella ricerca di tipi di castagni resistenti nell'ambito di specie orientali e dei loro ibridi continua a svilupparsi ma, come si è detto, l'importanza di questa attività si profila minore di quella che sta assumendo tale ricerca nell'ambito della *C. sativa*, cioè della specie indigena. È superfluo rilevare che sarà questa la via più sicura per la ricostituzione e per la salvezza dei nostri castagneti.

**Fisiologia vegetale.** — *Ricerche sull'azione dell'acido indol-3-acetico.* Nota I di SERGIO TONZIG e FEDERICA TREZZI, presentata (\*) dal Socio S. TONZIG.

L'ovvia osservazione che non può aversi accrescimento cellulare permanente senza introduzione d'acqua, e la constatazione — tante volte e da tanti studiosi ripetuta — che le sostanze di crescita stimolano l'assunzione d'acqua da parte della cellula, hanno fatto ritenere che il risultato finale dell'azione auxinica — l'aumento di volume cellulare — sia un fatto secondario rispetto all'assunzione d'acqua, di cui sarebbe solo una conseguenza diretta. Prima ancora che l'accrescimento, le auxine stimolerebbero dunque l'introduzione d'acqua nella cellula e ciò spiega perché, in questi ultimi anni, l'interesse degli studiosi di tali problemi si sia in gran parte accentrato sul meccanismo col quale le sostanze di crescita esercitano siffatta azione.

Il concetto dianzi precisato, dell'azione auxinica, altro non fa, infatti, che spostare e meglio circoscrivere i termini della questione. Ed il problema è ora quello di sapere come l'auxina ottenga di provocare, in cellule la cui tensione d'assorbimento era precedentemente nulla, la cospicua introduzione d'acqua che condiziona l'accrescimento.

Per recente che sia, la letteratura a tale riguardo è già assai ragguardevole né, in una nota a carattere di contributo sperimentale, è il caso di farne la rassegna; tanto più che tutti gli aspetti della fisiologia dell'accrescimento cellulare — incluso quello di cui ci occupiamo — sono stati fatti oggetto, a intervalli abbastanza brevi di tempo, di ampie e documentate pubblicazioni a carattere monografico. Ci limitiamo pertanto ad osservare, in maniera del tutto schematica, che le spiegazioni di volta in volta, e dai vari Autori, sostenute si basano più o meno tutte sulla fondamentale equazione enunciata da Ursprung e dalla quale l'assunzione d'acqua vien regolata. Per essa la tensione d'assorbimento d'una cellula è eguale alla differenza tra l'attività — o pressione — osmotica del succo cellulare e la pressione elastica

(\*) Nella seduta dell'8 maggio 1954.

esercitata dalla membrana (o meglio: tra la differenza della pressione osmotica del succo cellulare e del liquido ambiente, e la pressione della membrana). La tensione d'assorbimento, in altre parole e in una cellula non del tutto turgente, corrisponde alla frazione della pressione osmotica del succo cellulare non bilanciata dalla pressione della membrana. Finché, dunque, tra i due valori  $v$  è una differenza - che, ovviamente, dev'essere positiva - la cellula assorbe acqua; ma non appena la pressione di membrana è divenuta pari alla pressione osmotica, la tensione d'assorbimento diviene nulla e la cellula cessa d'introdurre acqua. Ne viene che, dal momento che le auxine provocano un ulteriore assorbimento d'acqua, in cellule la cui tensione d'assorbimento era già nulla, esse possono pervenire a ciò: *a*) o provocando un aumento della pressione osmotica dei liquidi cellulari, determinando quindi un nuovo squilibrio tra pressione osmotica e pressione di membrana e, in tal modo, conferendo alla cellula una ripresa di tensione d'assorbimento; *b*) o ricorrendo ad una forza diversa dalla pressione osmotica del succo cellulare - in concreto: ad energia d'origine respiratoria - che, soverchiando la pressione di membrana, consenta un'introduzione attiva d'acqua senza alterare le caratteristiche osmotiche della cellula; *c*) oppure alterando in maniera tale la struttura della membrana che la sua pressione elastica sul protoplasto venga ridotta sotto al valore della pressione osmotica del succo cellulare ed ottenendo così che si generi una nuova tensione d'assorbimento. Va ricordata, inoltre, la possibilità da taluni sostenuta che le auxine stimolino la permeabilità plasmatica rispetto all'acqua.

L'idea d'un aumento dell'attività osmotica del succo cellulare per effetto dell'auxina, affacciata prima da Czaja [1], è stata abbandonata dopo una serie di lavori che hanno dimostrato come la pressione osmotica nei tessuti che si accrescono normalmente, o sotto l'influenza di auxine, subisca una caduta o, al massimo, rimanga inalterata [2, 3, 4, 5, 6, 7].

Un'assunzione attiva d'acqua, per azione auxinica, è stata sostenuta per la prima volta da Reinders [8, 9] la quale considera l'assunzione d'acqua non come un fenomeno passivamente determinato da leggi chimico-fisiche ma come una funzione vitale la cui stimolazione per effetto dell'auxina è dovuta ad una incrementata respirazione che, a sua volta, fornisce l'energia necessaria per questo assorbimento vitale. Prima ancora di Reinders, del resto, già altri Autori avevano parlato di assorbimento attivo di natura non osmotica [10, 11, 12, 13, 14]. Si deve peraltro precisare che Reinders [15] non abbandona del tutto la teoria di un assorbimento osmotico e pone anzi la questione se esso si debba considerare come un processo attivo di per sé stesso, oppure come la conseguenza di un altro processo attivo - la respirazione - cui si accompagna una forte demolizione d'amido e la comparsa di sostanze osmoticamente attive quali gli zuccheri, ciò che si risolverebbe in un aumento del valore osmotico. Queste idee di Reinders sono state poi confermate da Commoner e Mazia [16, 17] e da Commoner, Fogel e Muller [18] per i quali l'auxina stimola la respirazione e fornisce così l'energia per un assorbimento attivo di sali con la conseguenza di un incremento del valore osmotico del succo cellulare e di un incrementato assorbimento d'acqua. Successivamente, tuttavia, van Overbeek [19, 20] ritenne doversi porre fuori causa, come cagione dell'assunzione d'acqua indotta da auxina, tanto un aumento di pressione osmotica determinato dall'idrolisi dell'amido, come un aumento conseguente a un'assunzione di sali; egli concluse che l'azione dell'auxina sull'assorbimento d'acqua può essere solo dovuto o ad un'incrementata assunzione di carattere non osmotico, oppure ad una diminuita pressione della membrana; allo stato degli atti van Overbeek non ritenne sia possibile una scelta fra i due fattori che, del resto, potrebbero intervenire entrambi.

A favore di un assorbimento attivo, provocato dall'auxina, c'è poi tutta una folla di lavori (ricordiamo, fra i tanti, quelli che citiamo in nota ai numeri da 21 a 36. Tutti questi lavori, di cui non è possibile - né avrebbe importanza - dar conto particolareggiato, tendono a dimostrare uno stretto legame tra respirazione e incrementata assunzione d'acqua. L'effetto dell'auxina sull'assorbimento avverrebbe in certa maniera eludendo l'equazione di Ursprung. Gli Autori che abbiamo citato non hanno, evidentemente, idee del tutto coincidenti; ma, in generale, essi tendono ad ammettere che l'energia occorrente per l'assorbimento stimolato da auxina sia di natura respiratoria e venga fornita da fosfati ad alto contenuto energetico. Bonner, Bandurski e Millerd [35], per esempio, affermano che l'assunzione d'acqua



stimolata da auxina è potenziata metabolicamente ed è mediata da accettori di energia generata metabolicamente quali i sistemi adenil-polifosfati; cosicché l'assunzione d'acqua può avvenire (ed essi l'avrebbero dimostrato) anche contro gradiente osmotico.

Tali conclusioni sono peraltro avversate, su basi teoriche come anche sperimentali, da Levitt [37, 38] e da Burström [39-43]. Levitt esclude tanto la possibilità di un aumento di pressione osmotica come anche quella di un assorbimento attivo, come conseguenza della azione auxinica; e sostiene l'idea che questa si espliciti attraverso una diminuzione della pressione di membrana che verrebbe in un primo momento tesa elasticamente e, in un secondo momento, deformata plasticamente. Bennet-Clark [44] e Spanner [45] hanno sollevato obiezioni contro le conclusioni di Levitt il quale, peraltro, le ha vigorosamente ribattute [46]. Burström distingue due fasi nell'accrescimento cellulare. La prima è una semplice distensione condizionata da una maggiorata elasticità della membrana, ciò che è consentito dall'allentamento dei punti d'unione delle micelle cellulose; causa di questo sarebbe l'aumentato rigonfiamento dei colloidi intermicellari. Nella seconda fase, durante la quale si realizzano almeno i due terzi dell'ingrandimento totale della cellula, il rigonfiamento dei colloidi intermicellari raggiungerebbe il suo massimo e il conseguente accrescimento in superficie della membrana verrebbe reso definitivo per intussuscezione di nuove micelle cellulose. L'idea che le auxine esercitino la loro azione agendo sulla membrana cellulare è peraltro assai più vecchia e quelli che abbiamo ora ricordato sono semplicemente gli studiosi che l'hanno espressa più di recente. Prima di loro sono peraltro giunti ad analoghe conclusioni, tra i molti altri, gli Autori che citiamo, in nota, ai numeri da 47 a 62 e ai numeri 3 e 5. Si è discusso, fra questi Autori, se l'auxina stimoli l'accrescimento elastico, oppure quello plastico, od ambedue le forme d'accrescimento del reticolo celluloso della membrana; ma d'interesse più determinante è la diversità delle opinioni circa un'azione dell'auxina direttamente sulla membrana oppure attraverso un'influenza esercitata sul plasma. Ruge [56], ad esempio, afferma che un cambiamento delle proprietà della membrana viene provocato, dall'AIA, anche in cellule morte; parimenti Heyn [48, 49] e Heyn e van Overbeek [50] si sono dimostrati inclini ad ammettere un'azione diretta delle sostanze di crescita sulla membrana; ma la maggior parte degli studiosi ritengono che sia impossibile prescindere dal protoplasma vivente quale intermediario dell'azione che le sostanze di crescita esercitano sulla membrana. Le loro idee non sono del tutto sovrapponibili ma concordano — più o meno — nell'ammettere che le auxine determinino una distensione plastica (irreversibile) della membrana, distensione che è preparata da una rottura metabolica dei punti d'attacco delle micelle cellulose; questa rottura potrebbe essere dipendente da un metabolismo ossidativo stimolato dalle sostanze di crescita che pure potrebbero stimolare una biosintesi di sostanze della membrana; quest'ultimo risultato potrebbe essere ottenuto mediante stimolazione fisico-chimica di uno o più sistemi enzimatici (cfr. anche [64]).

Alcuni Autori hanno attribuito l'effetto delle auxine all'aumento, da esse provocato, della permeabilità plasmatica [64, 62, 65, 66, 67, 68]. In generale, tuttavia, le loro idee non sono accolte.

Da ultimo dev'essere ricordata una possibilità accennata, ma peraltro subito scartata, da Levitt [38]: che l'assorbimento d'acqua sotto l'influenza delle sostanze di crescita sia la conseguenza d'una maggior capacità d'idratazione dei materiali protoplasmatici.

Ci sembra che molti dei risultati, su cui si basano le affermazioni dei tanti Autori citati, debbano essere interpretati con grande prudenza. Come già abbiamo fatto osservare in una precedente Nota [69], essi sono stati ottenuti, infatti, su tessuti di riserva quali, per esempio, quelli del tubero di patata le cui cellule, mentre sono piene di carboidrati complessi e prontamente idrolizzabili, sono poverissime di plasma, cosicché non sembrano offrire il materiale più adatto per studiare su fenomeni plasmatici. È questo, del resto, il rilievo fatto anche da Levitt [38] il quale osserva che solo il 2 %



del peso secco del parenchima di patata è rappresentato da proteine plasmatiche. Ma è ovvio che ben diverse sono le condizioni dei tessuti che si avviano ad abbandonare le caratteristiche meristematiche e cominciano la loro differenziazione con l'ingrandimento delle loro cellule. In queste ultime, almeno inizialmente, la cavità cellulare si può dire che non contenga che plasma vivente. Non ci sembra inoltre che l'andamento dell'accrescimento cellulare possa essere studiato, nelle condizioni migliori, in un tessuto le cui cellule non sono destinate ad accrescersi se non in misura limitata e, forse, con un meccanismo non del tutto omologabile a quello delle cellule che si distendono passando dallo stato giovanile allo stato adulto. Anche un seme morto si accresce notevolmente se posto in acqua; o almeno esso aumenta di volume rigonfiandosi. Contemporaneamente anche le sue singole cellule si rigonfiano, ma certo non si tratta dell'accrescimento cellulare in senso corretto. Inoltre i tessuti di riserva, quali quelli del tubero di patata, sono destinati ad una rapida degradazione, ed anche questo può far pensare che il loro accrescimento sia ben diverso da quello dei tessuti che rimangono vivi e funzionanti. Infine va osservato che le conclusioni tratte da esperienze prolungate eccessivamente vanno accolte con certa riserva giacché, durante l'esperienza, vien provocata e, di fatto, si ha, una cospicua proliferazione cellulare, ciò che implica un tipo di accrescimento ed un tipo di fenomeni ben diversi dall'accrescimento e dai fenomeni su cui verte l'indagine. In ogni caso, è chiaro che la comprensione del diretto meccanismo d'azione di una sostanza esige che se ne studino soprattutto gli effetti immediati.

Una serie di osservazioni eseguite nel nostro Istituto ci aveva dimostrato che, nelle cellule che sono in corso d'accrescimento naturale o variamente stimolato, il plasma presenta una modificazione strutturale particolare, che si manifesta con un aumento della sua vischiosità e della sua idrofilia; variazioni analoghe si osservano nelle cellule che, naturalmente o perché variamente stimolate, hanno un'attività particolarmente intensa [70-78]. Successivamente noi abbiamo dimostrato come, sia in condizioni naturali che sperimentali, esista una correlazione tra vischiosità plasmatica, assunzione d'acqua, idrofilia plasmatica e accrescimento cellulare. Tali caratteristiche variano tutte concordemente nel senso d'un aumento nelle cellule che sono in corso d'accrescimento naturale, o per azione dell'AIA o di altre sostanze ad azione auxinica; variano concordemente nel senso d'una diminuzione per effetto dell'AA cui noi abbiamo attribuito il significato di un'antiauxina (più precisamente: di una debole auxina ad azione competitiva rispetto all'AIA) [78, 79, 80, 69, 81]. Tali ricerche hanno costituito la premessa, oppure la conseguenza, di un'interpretazione dell'effetto auxinico che già è stata pubblicata [71, 82, 83] e che qui riassumiamo.

L'azione principale dell'AIA - che consideriamo come più tipico rappresentante delle sostanze ad effetto auxinico - consiste nel determinare una modificazione strutturale siffatta, nel plasma, da provocare una sua maggior capacità d'idratazione. In che cosa precisamente consista questa modificazione, ed in che maniera l'AIA la provochi, noi non siamo in grado

di dirè. Riteniamo peraltro che si tratti d'una modificazione dello stato fisico e chimico dei costituenti colloidali plasmatici, per indicare la quale usiamo – però con un senso non ben determinato né impegnativo – il termine di dissociazione. Potrebbe, per esempio, trattarsi della scissione di fasci molecolari in fascetti più sottili; potrebbe trattarsi della rottura di catene proteiche in frammenti più corti od anche del distacco di gruppi laterali; potrebbe, anche più semplicemente, trattarsi della rottura di ponti intermolecolari od anche del semplice spiegamento di molecole prima in qualche modo ripiegate. Una conseguenza, che tuttavia non ci pare necessaria, sarebbe rappresentata dall'aumento di particelle disperse nei sistemi colloidali plasmatici; in ogni modo si avrebbero due importanti conseguenze: un aumento di gruppi idrofili o ionizzati e, insomma, un aumento di idrofilia dei colloidi plasmatici; inoltre un aumento della superficie reattiva al limite tra la fase dispersa e la fase disperdente e, in certo senso, l'attivazione di gruppi funzionali chimici che, prima coperti e come mascherati, divengono smascherati ed esposti. Una immediata conseguenza è un assorbimento d'acqua da parte delle particelle colloidali disperse, assorbimento che implica una sottrazione d'acqua alla fase disperdente. Una certa quantità d'acqua, quindi, passa dalla fase disperdente a quella dispersa. In definitiva è come se le particelle disperse, o perché aumentate di numero, o semplicemente perché ingrossatesi, si fossero avvicinate, ciò che le rende meno facilmente spostabili l'una rispetto all'altra e rende, di conseguenza, più vischioso il colloide plasmatico. Questo appunto è l'aumento di vischiosità, di cui noi parliamo, come conseguenza dell'azione auxinica; ma sia ben chiaro che ad esso noi non attribuiamo altro significato se non quello di indice dell'avvenuta dissociazione e dell'aumentata idrofilia del plasma. Pure ammesso che, in precedenza, il colloide plasmatico fosse saturo d'acqua, l'avvenuto cambiamento determina, infatti, in esso l'insorgenza di una nuova tensione d'assorbimento. Non si tratta, tuttavia, solo di questo né, genericamente, di una maggior energia superficiale dei colloidi plasmatici: giacché i mutamenti fisici e chimici che sono intervenuti potenziano l'attività biochimica delle proteine. In definitiva – ed in questa maniera – l'AIA si comporta come un attivatore delle proteine. Di proteine – per quanto la distinzione ha significato – sia plasmatiche che enzimatiche.

L'attivazione delle proteine si traduce, ovviamente, in un'attivazione della funzionalità cellulare. Nelle cellule destinate, o atte, ad accrescersi, è appunto l'accrescimento che vien stimolato. Ciò comporta necessariamente una ulteriore introduzione d'acqua; quale sia il meccanismo col quale essa viene introdotta è una questione che noi lasciamo completamente impregiudicata. Noi non abbiamo nessun elemento, se non quelli tratti dalla lettura dei lavori altrui, che ci permetta di giudicare se l'ingresso d'acqua sia reso possibile dalla modificazione della membrana cellulare ottenuta per intervento protoplasmatico, oppure se la modificazione della membrana sia la conseguenza di un assorbimento d'acqua attivamente provocato da un lavoro protoplasmatico. Il problema è, naturalmente, molto interessante;

ci sembra tuttavia di poter prescindere da esso giacché si tratta di fenomeni secondari - nel senso di successivi - rispetto all'azione auxinica la quale consiste essenzialmente nell'attivazione proteica ottenuta con le modificazioni dianzi accennate.

L'ingrandimento della cellula è l'effetto più visibile, tra quelli che sono provocati dall'auxina. Esso non è però il solo e può anche non aversi. Ogni nuovo libro di fisiologia ci dà, comunque, un elenco sempre più lungo di effetti auxinici. Non ci sembra che si possa dunque considerare l'auxina come un diretto stimolante dell'accrescimento. Al contrario essa va considerata come uno stimolante aspecifico che solo indirettamente favorisce determinate funzioni: quelle funzioni appunto di cui la cellula è, almeno potenzialmente, già capace.

Quanto all'aumento di vischiosità plasmatica, da noi considerato come prima manifestazione, per dir così tangibile, dell'azione auxinica, precisiamo ancora una volta (cfr. [71, 83]) che esso permane soltanto se la cellula non sia in grado di rifornirsi d'acqua dall'esterno. Se, per contro, tale possibilità esiste, l'aumento di vischiosità regredisce rapidamente perché la fase disperdente del colloide viene ricostituita e le particelle disperse tendono anzi ad allontanarsi più di quanto lo fossero inizialmente. Dal punto di vista dell'accrescimento cellulare, la cosa più importante ci sembra sia proprio questa: la capacità del colloide di disperdersi - vogliamo dire di aumentare la quantità d'acqua della fase disperdente - assai oltre il valore iniziale. Perché il ristabilimento di equilibri di pressioni osmotiche e di tensione superficiale obbligano il plasma a cedere acqua anche al vacuolo, a mano a mano che acqua entra, dall'esterno, nel plasma e che tali equilibri vengono rotti. E, almeno in senso materiale, è questo appunto il fenomeno che condiziona l'accrescimento.

Del resto, se l'esperienza vien fatta in modo che la cellula possa introdurre acqua sin dall'inizio (ed è questa la più comune condizione sperimentale: tessuti in acqua o in soluzioni d'auxina) l'iniziale aumento di vischiosità è così piccolo e così transitorio, da sfuggire all'osservatore il quale si accorge soltanto della successiva diminuzione di vischiosità. Ciò spiega le contraddizioni fra i reperti ottenuti, con tecniche diverse (applicazione d'AIA in pomata di lanolina oppure per immersione in soluzione acquosa), da noi o da altri Autori (per esempio [84-89]; e ved. ancora [90-96]); contraddizioni che sono però soltanto apparenti e, in realtà, rappresentano due manifestazioni diverse dello stesso fenomeno.

Alcune prove sperimentali, che ci sembrano a favore di questa nostra interpretazione, saranno riportate nella Nota II.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] CZAJA A. TH., « Ber. D. Bt. Ges. », vol. 53, p. 221 (1935).
- [2] RUGE U., « Z. Bt. », vol. 31, p. 1 (1937).
- [3] RUGE U., « Planta », vol. 27, p. 352 (1937).
- [4] BECK W. A., « Plant Physiol. », vol. 16, p. 637 (1941).

- [5] DIEHL J. M., GORTER C. J., VAN ITERSOM G. e KLEINHOONTE A., « Rec. Trav. Bot. Néerl. », vol. 36, p. 709 (1939).
- [6] BURSTRÖM H., « Lantbr. Högskol. Ann. », vol. 10, p. 1 (1942).
- [7] BURSTRÖM H., « Lantbr. Högskol. Ann. », vol. 10, p. 209 (1942).
- [8] REINDERS D. E., « Proc. Sect. Sc. Royal Ac. Amsterdam », vol. 41, p. 820 (1938).
- [9] REINDERS D. E., « Rec. Trav. Bot. Néerl. », vol. 39, p. 1 (1942).
- [10] BENNET-CLARK T. A., GREENWOOD A. D. e BARKER J. W., « New Phytol. », vol. 35, p. 277 (1936).
- [11] BENNET-CLARK T. A. e BEXON D., « New Phytol. », vol. 39, p. 337 (1940).
- [12] MASON T. G. e PHILLIS E., « Ann. Bt. », vol. 3 n. s., p. 531 (1939).
- [13] LYON CH. J., « Plant Physiol. », vol. 17, p. 250 (1942).
- [14] VAN OVERBEEK J., « Am. J. Bt. », vol. 29, p. 677 (1942).
- [15] REINDER D. E., *Diss. Groningen*, 1940.
- [16] COMMONER B. e MAZIA D., « Plant Physiol. », vol. 17, p. 682 (1942).
- [17] COMMONER B. e MAZIA D., « Am. J. Bt. », vol. 31, p. 8 sg. (1944).
- [18] COMMONER B., FOGEL S. e MULLER W. H., « Am. J. Bt. », vol. 30, p. 23 (1943).
- [19] VAN OVERBEEK J., « Am. J. Bt. », vol. 31, p. 265 (1944).
- [20] VAN OVERBEEK J., « Ann. Rev. Biochem. », vol. 13, p. 631 (1944).
- [21] BONNER J., « J. Gen. Physiol. », vol. 17, p. 63 (1933).
- [22] BONNER J., « J. Gen. Physiol. », vol. 20, p. 1 (1936).
- [23] BRAUNER L., BRAUNER M. e HASMAN M., « Rev. Fac. Sc. Istanbul », Sér. B, vol. 5, p. 266 (1940).
- [24] BRAUNER L. e BRAUNER M., « Rev. Fac. Sc. Istanbul », Sér. B, vol. 8, p. 30 (1943).
- [25] COMMONER B. e THIMANN K. V., « J. Gen. Physiol. », vol. 24, p. 279 (1941).
- [26] ALBAUM H. G. e COMMONER B., « Biol. Bull. Woods Hole », vol. 80, p. 314 (1941).
- [27] ALBAUM H. G., KAISER S., GUTTENTAG C. e EICHEL B., « Am. J. Bt. », vol. 28, p. 10 sg. (1941).
- [28] BERGER J., SMITH P. e AVERY G. S. Jr., « Am. J. Bt. », vol. 33, p. 601 (1946).
- [29] KELLY S., « Am. J. Bt. », vol. 34, p. 521 (1947).
- [30] HACKETT D. P. e THIMANN K. V., « Plant Physiol. », vol. 25, p. 648 (1950).
- [31] HACKETT D. P. e THIMANN K. V., « Am. J. Bt. », vol. 39, p. 553 (1952).
- [32] HACKETT D. P. e THIMANN K. V., « Am. J. Bt. », vol. 40, p. 183 (1953).
- [33] THIMANN K. V., « Growth Suppl. », vol. 15, p. 5 (1951).
- [34] HACKETT D. P., « Plant Physiol. », vol. 27, p. 279 (1952).
- [35] BONNER J., BANDURSKI R. S. e MILLER A., « Physiol. Plantarum », vol. 6, p. 511 (1953).
- [36] BONNER J., BANDURSKI R. S., « Ann. Rev. Plant Physiol. », vol. 3, p. 59 (1952).
- [37] LEVITT J., « Plant Physiol. », vol. 22, p. 514 (1947).
- [38] LEVITT J., « Plant Physiol. », vol. 23, p. 505 (1948).
- [39] BURSTRÖM H., « Bot. Notiser », p. 310 (1941).
- [40] BURSTRÖM H., « Physiol. Plantarum », vol. 3, p. 277 (1950).
- [41] BURSTRÖM H., « Physiol. Plantarum », vol. 6, p. 262 (1953).
- [43] BURSTRÖM H., « Physiol. Plantarum », vol. 6, p. 685 (1953).
- [44] BENNET-CLARK T. A., « Discussion of the Faraday Society », vol. 3, p. 134 (1948).
- [45] SPANNER D. C., « Ann. Bt. », n. s., vol. 16, p. 379 (1952).
- [46] LEVITT J., « Physiol. Plantarum », vol. 6, p. 240 (1953).
- [47] HAAS R. H. DE, « Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. », Amsterdam, vol. 32, p. 371 (1929).
- [48] HEYN A. N. J., « Rec. Trav. Bot. Néerl. », vol. 28, p. 113 (1931).
- [49] HEYN A. N. J., « Bot. Rev. », vol. 6, p. 515 (1940).
- [50] HEYN A. N. J. e VAN OVERBEEK J., « Proc. Kon. Akad. Wetensch. », Amsterdam, vol. 34, p. 1190 (1931).
- [51] BONNER J., « Jb. wiss. Bt. », vol. 82, p. 377 (1936).
- [52] SÖDING H., « Jb. wiss. Bt. », vol. 74, p. 127 (1931).



- [53] SÖDING H., « Ber. Deutsch. Bt. Ges. », vol. 50, p. 117 (1932).
- [54] SÖDING H., « Jb. wiss. Bt. », vol. 79, p. 231 (1934).
- [55] SÖDING H., *Die Wuchsstofflehre*, 1952.
- [56] RUGE U., « Planta », vol. 32, p. 571 (1942).
- [57] GESSNER F., « Jb. wiss. Bt. », vol. 82, p. 796 (1936).
- [58] THIMANN K. V. e BONNER J., « Proc. Roy. Soc. », London B, vol. 113, p. 126 (1933).
- [59] FREY-WYSSLING A., « Arch. Klaus Stift ecc. Festband Ernst », p. 381 (1945).
- [60] FREY-WYSSLING A., « Vierteljahrschr. Naturf. Ges. Zurich », vol. 93, p. 24 (1948).
- [61] FREY-WYSSLING A., *Deformation and flow in biological systems*, 1952.
- [62] KONINGSBERGER V. J., « Meded. Kon. Vlaamse Akad. Wetensch. » (Belgie), vol. 9, No. 13 (1947).
- [63] KETELLAPPER H. J., « Acta Bot. Néerl. », vol. 2, p. 387 (1953).
- [64] KONINGSBERGER V. J., « Natuurk. Voordr. "Diligentia" », N. r. vol. 20, p. 13 (1942).
- [65] VELDSTRA H., *Enzymologia*, vol. II, p. 137 (1944).
- [66] VON GUTTENBERG H. e KRÖPELIN L., « Planta », vol. 35, p. 257 (1947).
- [67] POHL R., « Planta », vol. 36, p. 230 (1948).
- [68] BRAUNER L. e HASMAN M., « Bull. Fac. Méd. Istanbul », vol. 12, p. 57 (1949).
- [69] TONZIG S. e TREZZI F., questi « Atti », in corso di stampa.
- [70] TONZIG S., « N. Giorn. Bt. Ital. », n. s. vol. 45, p. 419 (1938).
- [71] TONZIG S., *I muco-proteidi e la vita della cellula vegetale*, 1952.
- [72] TONZIG S. e TRECCANI-POMA C., « N. Giorn. Bt. Ital. », n. s. vol. 53, p. 601 (1946).
- [73] TONZIG S. e MUZIARELLI L., *Lavori di Botanica pubbl. in onore di G. Gola*, p. 353 (1947).
- [74] ARATA M., « N. Giorn. Bt. Ital. », n. s. vol. 51, p. 1 (1944).
- [76] TREZZI F., *Lavori di Botanica pubbl. in onore di G. Gola*, p. 385 (1947).
- [76] TORRIANI CL., *Lavori di Botanica pubbl. in onore di G. Gola*, p. 367 (1947).
- [77] GAGETTI A., *Lavori di Botanica pubbl. in onore di G. Gola*, p. 413 (1947).
- [78] TONZIG S. e TREZZI F., « N. Giorn. Bt. Ital. », n. s. vol. 57, p. 515 (1950).
- [79] TONZIG S. e TREZZI F., « N. giorn. Bt. Ital. », n. s. vol. 57, p. 535 (1950).
- [80] TONZIG S. e TREZZI F., « N. Giorn. Bt. Ital. », n. s. vol. 57, p. 549 (1950).
- [81] TONZIG S., TREZZI F. e NAVA E., « N. Giorn. Bt. Ital. », n. s. vol. 59, p. 171 (1952).
- [82] TONZIG S., « Boll. Soc. Ital. Biol. Sp. », vol. 26, p. 369 (1950).
- [83] TONZIG S., « N. Giorn. Bt. Ital. », n. s. vol. 57, p. 468 (1950).
- [84] THIMANN K. V. e SWEENEY B. M., « J. Gen. Physiol. », vol. 21, p. 123 (1937).
- [85] SWEENEY B. M. e THIMANN K. V., « J. Gen. Physiol. », vol. 21, p. 439 (1938).
- [86] SWEENEY B. M., « Am. J. Bt. », vol. 28, p. 700 (1941).
- [87] SWEENEY B. M., « Am. J. Bt. », vol. 29, p. 793 (1942).
- [88] SWEENEY B. M., « Am. J. Bt. », vol. 31, p. 78 (1944).
- [89] SWEENEY B. M. e THIMANN K. V., « J. Gen. Physiol. », vol. 28, p. 841 (1942).
- [90] STRUGGER S., « Ber. Deut. Bt. Ges. », vol. 51, p. 193 (1933).
- [91] METZNER P., « Ber. Deut. Bt. Ges. », vol. 52, p. 506 (1934).
- [92] KINOSHITA S., « Bot. Mag. Tokyo », vol. 53, p. 175 (1939).
- [93] NORTHEN H. T., « Bt. Gz. », vol. 103, p. 668 (1942).
- [94] NORTHEN H. T., « Plant Physiol. », vol. 21, p. 148 (1946).
- [96] STALFELT M. G., « Proc. 6th Intern. Congr. Exp. Cyt. Stockholm », p. 63 (1947).
- [96] STALFELT M. G., « Physiol. Plantarum », vol. 2, p. 341 (1949).

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi matematica.** — *Una formula di approssimazione asintotica per i polinomi di Tchebychef-Hermite e valutazione numerica del resto.* Nota di LUIGI MERLI, presentata (\*) dal Socio G. SANSONE.

1. Nello studio del comportamento delle serie di polinomi ortogonali, per lo sviluppo di una funzione in un dato intervallo, sono di grande importanza le formule di approssimazione asintotica. Nel caso particolare dei polinomi  $H_n(x)$  di Tchebychef-Hermite <sup>(1)</sup>, utili agli effetti dello sviluppo in intervalli infiniti, è nota la seguente formula asintotica <sup>(2)</sup>:

$$(1) \quad (-1)^n l_n e^{-x^2/2} H_n(x) = \cos [N^{1/2} x - n\pi/2] \sum_{v=0}^{p-1} u_v(x) N^{-v} + \\ + N^{-1/2} \sin [N^{1/2} x - n\pi/2] \sum_{v=0}^{p-1} v_v(x) N^{-v} + R_p(n, x) N^{-p},$$

ove  $u_v(x)$  e  $v_v(x)$  sono dei polinomi, dei quali però non è data l'espressione esplicita, tranne che per  $v=0$ , nel quale caso si ha

$$(2) \quad u_0(x) = 1, \quad v_0(x) = \frac{x^3}{6}.$$

È inoltre  $N = 2n+1$  ed  $l_n = \Gamma(n/2+1)/\Gamma(n+1)$ , se  $n$  è pari;  $l_n = N^{1/2} \Gamma(n/2+3/2)/\Gamma(n+2)$ , se  $n$  è dispari; ed infine  $R_p(n, x) = O(1)$ , rispetto ad  $n$ .

Anche del resto  $R_p(n, x)$  manca una valutazione numerica; di esso G. Sansone <sup>(3)</sup> ha dato recentemente, nel caso  $p=1$ , l'espressione esplicita seguente:

$$(3) \quad |R_1(n, x)| \leq \frac{5}{4} x^2 \left[ 1 + \frac{x^4}{18} \right] + \frac{36}{935 n^{1/4}} x^{17/2}, \quad x > 0.$$

Egli ha ottenuto tale limitazione partendo dalla equazione integrale alla quale soddisfano le funzioni  $f_n(x)$  associate ai polinomi  $H_n(x)$ ,

$$(4) \quad f_n(x) = f_n(0) \cos [N^{1/2} x] + f'_n(0) \frac{\sin N^{1/2} x}{N^{1/2}} - \\ - \frac{1}{N^{1/2}} \int_0^x \alpha^2 f_n(\alpha) \sin [N^{1/2} (\alpha - x)] d\alpha,$$

con

$$f_n(x) = \pi^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2} e^{-(1/2)x^2} H_n(x) \quad (4).$$

(\*) Nella seduta del giorno 8 maggio 1954.

(1) Cfr. G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*. Bologna, 3<sup>a</sup> ed., pp. 330 e seg. (1952).

(2) G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*. «Am. Math. Soc. Colloquium Publ.», p. 194 (1933).

(3) Loc. cit., in <sup>(1)</sup> p. 356.

(4) Loc. cit., in <sup>(1)</sup>, p. 350.

In considerazione di quanto detto sopra, abbiamo ritenuto cosa utile dare l'espressione esplicita della (1) anche nel caso  $p = 2$ . Seguendo il procedimento classico abbiamo determinato  $u_1(x)$  e  $v_1(x)$  e valutato numericamente il resto  $R_2(n, x)$  ed abbiamo provato che si ha:

$$(5) \quad u_1(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{72}, \quad v_1(x) = -\frac{x}{4} + \frac{x^5}{15} - \frac{x^9}{1296},$$

e

$$(6) \quad R_2(n, x) < (1 + x^4 + x^8) x^4 + \frac{x^{25/2}}{n^{1/2}} + (1 + x^4) \frac{x^3}{N^{1/2}} + (1 + x^6) \frac{1}{N}, \quad x > 0.$$

Dimostreremo le (5) e (6) distinguendo per comodità di calcolo i casi  $n$  pari ed  $n$  dispari.

2. Sia  $n$  pari.

Dalla (4), tenuto conto che  $f'_{2n}(0) = 0$ , si ha, sostituendo due volte l'espressione di  $f_{2n}(x)$  sotto il segno di integrale,

$$(7) \quad f_{2n}(x) = f_{2n}(0) \{ \cos [N^{1/2} x] - I_1(n, x) N^{-1/2} + I_2(n, x) N^{-1} - I_3(n, x) N^{-3/2} \} + \bar{R}_2(2n, x) N^{-2},$$

con

$$I_1(n, x) = \int_0^x \alpha^2 \cos [N^{1/2} x] \sin [N^{1/2} (\alpha - x)] d\alpha,$$

$$I_2(n, x) = \int_0^x \alpha^2 I_1(n, x) \sin [N^{1/2} (\alpha - x)] d\alpha,$$

$$I_3(n, x) = \int_0^x \alpha^2 I_2(n, x) \sin [N^{1/2} (\alpha - x)] d\alpha,$$

$$\bar{R}_2(2n, x) = \int_0^x \alpha^2 \left[ \int_0^\alpha t^2 \left[ \int_0^t u^2 \mathfrak{J}_1(u) \sin N^{1/2}(u - t) du \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \sin [N^{1/2}(t - \alpha)] dt \right] \sin [N^{1/2}(\alpha - x)] d\alpha,$$

con

$$\mathfrak{J}_1(u) = \int_0^u v^2 f_{2n}(v) \sin [N^{1/2}(v - u)] dv.$$

Effettuando i calcoli, si trova:

$$I_1(n, x) = -\frac{x^3}{6} \sin [N^{1/2} x] - \frac{x^2}{4 N^{1/2}} \cos [N^{1/2} x] + \frac{x}{4 N} \sin [N^{1/2} x],$$

$$I_2(n, x) = -\frac{x^6}{72} \cos [N^{1/2} x] + \frac{x^5}{15 N^{1/2}} \sin [N^{1/2} x] + g_1(n, x)$$

con

$$|g_1(n, x)| < \frac{x^3}{8 N^{3/2}} + \frac{35 x^4}{96 N}, \quad x > 0.$$

$$I_3(n, x) = \frac{x^9}{1296} \operatorname{sen} [N^{1/2} x] + g_2(n, x),$$

con

$$|g_2(n, x)| < \frac{11 x^8}{720 N^{1/2}} + \frac{5 x^7}{36 N} + \frac{x^6}{48 N^{3/2}}, \quad x > 0.$$

Tenuto conto poi che è

$$|f_{2n}(x)| \leq \frac{I}{\sqrt{\pi} n^{1/4}} + \frac{x^{5/2}}{N^{1/2}}, \quad x > 0^{(5)},$$

si ha:

$$|\bar{R}_2(2n, x)| < \frac{x^{12}}{1824 \sqrt{\pi} n^{1/4}} + \frac{16 x^{25/2}}{43225 N^{1/2}}, \quad x > 0,$$

per cui, sostituendo nella (7),

$$(8) \quad f_{2n}(x) = f_{2n}(0) \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{72} \right) N^{-1} \right] \cos [N^{1/2} x] + \right. \\ \left. + \left[ \frac{x^3}{6} + \left( -\frac{x}{4} + \frac{x^5}{15} - \frac{x^9}{1296} \right) N^{-1} \right] \frac{\operatorname{sen} [N^{1/2} x]}{N^{1/2}} + \frac{R_2(2n, x)}{N^2} \right\},$$

e

$$(9) \quad |R_2(2n, x)| < \left( \frac{35}{96} + \frac{11 x^4}{720} + \frac{x^8}{1824} \right) \frac{x^4}{\sqrt{\pi} n^{1/4}} + \frac{16 x^{25/2}}{43225 N^{1/2}} + \\ + \left( \frac{1}{8} + \frac{5 x^4}{36} \right) \frac{x^3}{\sqrt{\pi} n^{1/4} N^{1/2}} + \frac{x^6}{48 \sqrt{\pi} n^{1/4} N}.$$

3. Sia ora  $n$  dispari.

Dalla (4), essendo  $f_{2n+1}(0) = 0$ , si ha:

$$(10) \quad f_{2n+1}(x) = f'_{2n+1}(0) \{ \operatorname{sen} [N^{1/2} x] \cdot N^{-1/2} - \bar{I}_1(n, x) N^{-1} + \\ + \bar{I}_2(n, x) N^{-3/2} - \bar{I}_3(n, x) N^{-2} \} + \bar{R}_2(2n+1, x) N^{-2},$$

con

$$\bar{I}_1(n, x) = \int_0^x \alpha^2 \operatorname{sen} [N^{1/2} \alpha] \operatorname{sen} [N^{1/2} (\alpha - x)] d\alpha,$$

$$\bar{I}_2(n, x) = \int_0^x \alpha^2 \bar{I}_1(n, \alpha) \operatorname{sen} [N^{1/2} (\alpha - x)] d\alpha,$$

$$\bar{I}_3(n, x) = \int_0^x \alpha^2 \bar{I}_2(n, \alpha) \operatorname{sen} [N^{1/2} (\alpha - x)] d\alpha,$$

(5) Loc. cit., in (1), p. 354.



$$\bar{R}_2(2n+1, x) = \int_0^x \alpha^2 \left[ \int_0^\alpha t^2 \left[ \int_0^t u^2 \bar{g}_1(u) \sin[N^{1/2}(u-t)] du \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \sin N^{1/2}(t-\alpha) dt \right] \sin N^{1/2}(\alpha-x) d\alpha,$$

con

$$\bar{g}_1(u) = \int_0^u v^2 f_{2n+1}(v) \sin[N^{1/2}(v-u)] dv.$$

Effettuati i calcoli, si trova, per  $x > 0$ ,

$$\bar{I}_1(n, x) = \frac{x^3}{6} \cos[N^{1/2}x] - \frac{x^2}{4N^{1/2}} \sin[N^{1/2}x] - \frac{x}{4N} \cos[N^{1/2}x] + \frac{\sin[N^{1/2}x]}{4N^{3/2}},$$

$$\bar{I}_2(n, x) = -\frac{x^6}{72} \sin[N^{1/2}x] - \frac{x^5}{15N^{1/2}} \cos[N^{1/2}x] + \bar{g}_1(n, x),$$

con

$$|\bar{g}_1(n, x)| < \frac{x^3}{12N^{3/2}} + \frac{19x^4}{48N}, \quad x > 0,$$

$$\bar{I}_3(n, x) = -\frac{x^9}{1296} \cos[N^{1/2}x] + \bar{g}_2(n, x),$$

con

$$|\bar{g}_2(n, x)| < \frac{11x^8}{720N^{1/2}} + \frac{19x^7}{326N} + \frac{x^6}{72N^{3/2}}, \quad x > 0.$$

È inoltre:

$$|\bar{R}_2(2n+1, x)| < \frac{x^{12}}{1824\sqrt{\pi}n^{1/4}} + \frac{16x^{25/2}}{43225N^{1/2}}, \quad x > 0.$$

Sostituendo i valori trovati nella (10), si ha:

$$(11) \quad f_{2n+1}(x) = \frac{f'_{2n+1}(0)}{N^{1/2}} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{72} \right) N^{-1} \right] \sin[N^{1/2}x] - \right. \\ \left. - \left[ \frac{x^3}{6} + \left( -\frac{x}{4} + \frac{x^5}{15} - \frac{x^9}{1296} \right) N^{-1} \right] \frac{\cos[N^{1/2}x]}{N^{1/2}} \right\} + \frac{R_2(2n+1, x)}{N^2},$$

e

$$(12) \quad |R_2(2n+1, x)| < \left( \frac{19}{48} + \frac{11}{720}x^4 + \frac{x^8}{1824} \right) \frac{x^4}{\sqrt{\pi}n^{1/4}} + \frac{16x^{25/2}}{43225N^{1/2}} + \\ + \left( \frac{1}{12} + \frac{19}{326}x^4 \right) \frac{x^3}{\sqrt{\pi}n^{1/4}N^{1/2}} + \frac{x^6}{72\sqrt{\pi}n^{1/4}N} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}n^{1/4}N}.$$

4. Tenuto conto che è

$$f_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}} \quad \text{ed} \quad f'_{2n+1}(0) = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{2(2n+1)}}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}},$$

dalle (12), (13), (19) e (20) seguono le (5) e (6).

**Analisi matematica.** — *Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace, in tre variabili indipendenti* (\*). Nota di FERNANDO BERTOLINI, presentata (\*\*) dal Socio M. PICONE.

In una Nota di recente pubblicazione <sup>(1)</sup> ho dato una condizione necessaria e sufficiente, affinché in un dominio (piano) abbia soluzione il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti: l'estensione da due a tre o più variabili indipendenti non è immediata, perché non si potranno più considerare le coppie di funzioni armoniche coniugate. In questa Nota, come premessa allo studio del caso generale, voglio esporre una condizione necessaria e sufficiente, perché in un assegnato dominio  $D$  (dello spazio) abbia soluzione il problema in tre variabili indipendenti, *nella ipotesi particolare che sia piana quella parte  $T$  di  $\mathfrak{F}D$ , che non porta i dati di Cauchy.*

Il procedimento impiegato, nella sostanza, è il seguente: detta  $\varphi(P)$  una eventuale soluzione del problema, s'immagini grad  $\varphi(P)$  sviluppata su  $T$  in serie di Fourier, secondo un sistema opportunamente scelto di vettori armonici in tutto lo spazio; utilizzando il teorema di reciprocità, si possono esprimere i coefficienti di tale serie mediante integrali [operanti sulle funzioni  $\varphi(P)$  e grad  $\varphi(P)$ ] estesi ad  $S = \mathfrak{F}D - T$ , anziché estesi a  $T$ : essi sono dunque determinati dai dati di Cauchy, ed individuano grad  $\varphi(P)$  [e quindi  $\varphi(P)$ ] su  $T$ ; infine, valendosi della formula di Stokes [nella quale figurano  $\varphi(P)$  e grad  $\varphi(P)$  su  $\mathfrak{F}D$ ] si può dimostrare che il problema ammette soluzione, quando la detta serie di Fourier goda di certe proprietà di convergenza su  $T$ .

1. Sia  $D$  un dominio regolare <sup>(2)</sup> dello spazio  $(x, y, z)$ , situato nel semispazio  $z \geq 0$ , ed  $A = D - \mathfrak{F}D$  sia il suo interno;  $\mathfrak{F}D$  si componga di un dominio regolare  $T$  del piano  $(x, y)$  e di una superficie regolare  $S$  (che penseremo riferita a due parametri  $t_1$  e  $t_2$ , e quindi) dotata di base:  $T$  ed  $S$  avranno in comune una curva regolare  $C$ , che sarà ad un tempo il bordo di  $S$  e la frontiera [sul piano  $(x, y)$ ] di  $T$ ; sia  $n_P$  l'asse normale ad  $\mathfrak{F}D$  (dove esiste), nel punto  $P$ , rivolto verso l'interno di  $D$ ; sia  $P$  il punto di coordinate  $(x, y, z)$ .

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Nella seduta dell'8 maggio 1954.

(1) *Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti* in « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, vol. XVI, fasc. 1, pp. 10-17 (1954).

(2) Mi attengo alla nomenclatura usata da M. PICONE nei suoi *Appunti di Analisi Superiore*, ed. Rondinella, Napoli.

2. Siano assegnate su  $S$  due funzioni reali  $\Phi(P)$ ,  $\Psi(P)$ , con le condizioni seguenti:

$\Psi(P)$  è hilbertiana su  $S$ , ossia è superficialmente quasi continua su  $S$  e verifica la relazione  $\int_S \Psi(P)^2 d\sigma < +\infty$ ;

$\Phi(P)$  è continua su  $S$ , assolutamente continua rispetto a  $t_1$  per quasi ogni valore di  $t_2$  e simmetricamente, dotata di derivate, rispetto a  $t_1$  e  $t_2$ , hilbertiane su  $S$ .

Cerchiamo una condizione necessaria e sufficiente perché esista una funzione  $\varphi(P)$  la quale:

1) sia continua in  $D$ , armonica in  $A$ , dotata su quasi tutto  $D$  della derivata normale  $\frac{\partial}{\partial n_P} \varphi(P)$ , hilbertiana su  $\mathcal{F}D$ ;

2) su  $T$  sia assolutamente continua rispetto ad  $x$  per quasi ogni valore di  $y$  e simmetricamente, dotata di derivate, rispetto ad  $x$  e  $y$ , hilbertiane su  $T$ ; su  $S$  sia assolutamente continua rispetto a  $t_1$  per quasi ogni valore di  $t_2$  e simmetricamente, dotata di derivate, rispetto a  $t_1$  e  $t_2$ , hilbertiane su  $S$ ;

3) verifichi la condizione

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \Phi(P) \quad \text{per } P \in S, \\ \frac{\partial}{\partial n_P} \varphi(P) &= \Psi(P) \quad \text{per quasi ogni } P \in S.\end{aligned}$$

La classe delle funzioni verificanti le 1), 2), 3) verrà detta  $\Gamma$ : essa al più contiene una funzione.

3. Per trattare il problema ora posto, ci serviremo di una successione di vettori  $\{\mathcal{B}_k(P)\}_{k=0,1,2,\dots}$  a tre componenti  $\{u_k(P), v_k(P), w_k(P)\}$  così definita. Sia  $\{F_{2k}(x, y)\}_{k=0,1,2,\dots}$  una successione di monomi omogenei nelle variabili  $x, y$  tale, che qualunque polinomio nelle stesse variabili possa esprimersi come combinazione lineare a coefficienti costanti di monomi  $F_{2k}(x, y)$ , e si ponga

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ u_{2k}(x, y, z) &= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h}}{(2h)!} \Delta^h \frac{\partial}{\partial x} F_{2k}(x, y), \\ v_{2k}(x, y, z) &= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h}}{(2h)!} \Delta^h \frac{\partial}{\partial y} F_{2k}(x, y), \\ w_{2k}(x, y, z) &= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h+1}}{(2h+1)!} \Delta^{h+1} F_{2k}(x, y), \\ u_{2k+1}(x, y, z) &= 0, \quad v_{2k+1}(x, y, z) = 0, \\ w_{2k+1}(x, y, z) &= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h}}{(2h)!} \Delta^h F_{2k}(x, y), \\ &(k = 0, 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

Si osservi che le serie definenti  $u_k, v_k, w_k$  in realtà si riducono a polinomi, perché quando  $2h$  supera il grado del monomio  $F_{2k}$  si ha  $\Delta^h F_{2k} \equiv 0$ .

La successione dei vettori  $\{\mathfrak{B}_k(P)\}_{k=0,1,2,\dots}$  gode delle proprietà seguenti:

$$\begin{aligned} 1) \quad u_{2k}(x, y, 0) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{2k}(x, y), v_{2k}(x, y, 0) = \frac{\partial}{\partial y} F_{2k}(x, y), w_{2k}(x, y, 0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} u_{2k}(x, y, 0) &= \frac{\partial}{\partial z} v_{2k}(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} w_{2k}(x, y, 0) = \Delta F_{2k}(x, y), \\ u_{2k+1}(x, y, 0) &= v_{2k+1}(x, y, 0) = 0, \quad w_{2k+1}(x, y, 0) = F_{2k}(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial z} u_{2k+1}(x, y, 0) &= \frac{\partial}{\partial z} v_{2k+1}(x, y, 0) = \frac{\partial}{\partial z} w_{2k+1}(x, y, 0) = 0; \end{aligned}$$

d'immediata verifica.

$$2) \quad \frac{\partial}{\partial x} u_k(x, y, 0) + \frac{\partial}{\partial y} v_k(x, y, 0) - \frac{\partial}{\partial z} w_k(x, y, 0) \equiv 0;$$

conseguenza immediata delle 1).

$$3) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathfrak{B}_k(x, y, z) \equiv 0;$$

difatti abbiamo

$$\begin{aligned} \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_{2k}(x, y, z) &= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h}}{(2h)!} \Delta^{h+1} \frac{\partial}{\partial x} F_{2k}(x, y) \\ &\quad + \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h-2}}{(2h-2)!} \Delta^h \frac{\partial}{\partial x} F_{2k}(x, y) = 0, \\ \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_{2k}(x, y, z) &= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h}}{(2h)!} \Delta^{h+1} \frac{\partial}{\partial y} F_{2k}(x, y) \\ &\quad + \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h-2}}{(2h-2)!} \Delta^h \frac{\partial}{\partial y} F_{2k}(x, y) = 0, \\ \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w_{2k}(x, y, z) &= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h+1}}{(2h+1)!} \Delta^{h+2} F_{2k}(x, y) \\ &\quad + \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h-1}}{(2h-1)!} \Delta^{h+1} F_{2k}(x, y) = 0, \\ \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w_{2k+1}(x, y, z) &= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h}}{(2h)!} \Delta^{h+1} F_{2k}(x, y) \\ &\quad + \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{z^{2h-2}}{(2h-2)!} \Delta^h F_{2k}(x, y) = 0. \end{aligned}$$

4) Il sistema di polinomi armonici  $\{w_k(x, y, z)\}_{k=0,1,2,\dots}$  è completo per l'approssimazione puntuale lineare uniforme del primo ordine delle funzioni armoniche, nell'interno d'una sfera arbitraria, contenente il dominio  $D$ . Per dimostrarlo basta provare che qualunque polinomio armonico è combinazione lineare a coefficienti costanti di alcuni dei polinomi  $w_k(x, y, z)$ . Dato un poli-



nomio armonico  $p(x, y, z)$ , esistono dei coefficienti costanti  $c_0, c_1, \dots, c_n$  tali, che sia

$$(1) \quad p(x, y, 0) = \sum_{k=0}^n c_k F_{2k}(x, y),$$

in base alle ipotesi ammesse sulla successione  $\{F_{2k}(x, y)\}$ ; d'altra parte esistono un polinomio in due variabili  $q(x, y)$ , e delle costanti  $d_0, d_1, \dots, d_m$  tali, da aversi

$$\frac{\partial}{\partial z} p(x, y, 0) = \Delta q(x, y) \quad (3) \quad , \quad q(x, y) = \sum_{k=0}^m d_k F_{2k}(x, y),$$

quindi

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial z} p(x, y, 0) = \sum_{k=0}^m d_k \Delta F_{2k}(x, y);$$

le (1) e (2) - condizioni di Cauchy per il polinomio armonico  $p(x, y, z)$  - individuano  $p(x, y, z)$ , il quale non può esser dato che dalla

$$p(x, y, z) = \sum_{k=0}^n c_k w_{2k+1}(x, y, z) + \sum_{k=0}^m d_k w_{2k}(x, y, z),$$

in virtù della proprietà 1).

5) Sia  $H$  l'insieme delle funzioni hilbertiane in  $T$ ; detto  $L$  l'insieme delle funzioni definite in  $T$ , assolutamente continue rispetto ad  $x$  per quasi ogni valore di  $y$  e simmetricamente, dotate di gradiente hilbertiano su  $T$ , detto  $L'$  l'insieme delle funzioni definite in  $D$ , su  $T$  quasi ovunque derivabili rispetto a  $z$ , con derivata hilbertiana ed (in quanto funzioni delle sole  $x, y$ ) appartenenti alla classe  $L$ , sia  $H_1$  l'insieme dei gradienti delle funzioni della classe  $L$ , sia  $H_2$  l'insieme dei gradienti delle funzioni della classe  $L'$ .

La successione di vettori  $\{B_k(x, y, 0)\}_{k=0,1,2,\dots}$  è hilbertianamente completa su  $T$  rispetto alla classe  $H_2$ .

Infatti, dal teorema di Weierstrass segue che la successione

$$\{F_{2k}(x, y)\}_{k=0,1,2,\dots}$$

è completa hilbertianamente nella classe  $H$ , che la successione di vettori  $\{\text{grad}_{(x,y)} F_{2k}(x, y)\}_{k=0,1,2,\dots}$  lo è nella classe  $H_1$ , sempre su  $T$ : dunque la relazione

$$\int_T B_{2k}(x, y, 0) \times \text{grad}_{(x,y,z)} f(x, y, 0) dx dy = 0 \quad (k=0,1,\dots),$$

(3) Basti dire che, detto  $v$  un numero intero assoluto, detto  $\mu$  un numero intero non minore di due, avremo  $x^{2v} y^{\mu-2} = \Delta \sum_{k=0}^v x^{2(v-k)} y^{\mu+2k} a_k$ , non appena sia  $\mu(\mu-1)a_0 = 1$ ,  $a_k = -(2v-2k+2)(2v-2k+1)a_{k-1}/[(\mu+2k)(\mu+2k-1)]$ ; avremo invece  $x^{2v+1} y^{\mu-2} = \Delta \sum_{k=0}^v x^{2v-2k+1} y^{\mu+2k} a_k$ , non appena sia  $\mu(\mu-1)a_0 = 1$ ,  $a_k = -(2v-2k+3)(2v-2k+2)a_{k-1}/[(\mu+2k)(\mu+2k-1)]$ ;  $k=1,2,\dots,v$ .

equivalente alla

$$\int_{\hat{T}} \text{grad}_{(x,y)} F_{2k}(x,y) \times \text{grad}_{(x,y)} f(x,y,0) dx dy = 0 \quad (k = 0, 1, \dots)$$

implica, se è  $f(x, y, z) \in L'$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, 0) \stackrel{*}{=} 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, 0) \stackrel{*}{=} 0 \quad \text{su } T;$$

mentre la relazione

$$\int_T \mathfrak{B}_{2k+1}(x, y, 0) \times \text{grad}_{(x,y,z)} f(x, y, 0) dx dy = 0 \quad (k = 0, 1, \dots),$$

equivalente alla

$$\int_T F_{2k}(x, y) \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, 0) dx dy = 0 \quad (k = 0, 1, \dots),$$

implica, se è  $f(x, y, z) \in L'$ ,

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, 0) \stackrel{*}{=} 0 \quad \text{su } T.$$

4. Fissato un numero intero assoluto  $n$ , supponiamo di aver determinato i coefficienti  $\alpha_{n0}, \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nn}$  in modo tale da rendere minima l'espressione quadratica

$$\begin{aligned} (I) \quad & \int_T \left| \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mathfrak{B}_k(P) \right|^2 dx dy - 2 \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \left\{ \int_S \left[ \Phi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} w_k(P) - \Psi(P) \cdot w_k(P) \right] d\sigma \right. \\ & \left. + \int_{+C} \Phi(P) \cdot [u_k(P) dy - v_k(P) dx] \right\} = \\ & \sum_{h,k}^{0,n} \alpha_{nh} \alpha_{nk} \int_T [u_h(P) \cdot u_k(P) + v_h(P) \cdot v_k(P) + w_h(P) \cdot w_k(P)] dx dy \\ & - 2 \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \left\{ \int_S \left[ \Phi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} w_k(P) - \Psi(P) \cdot w_k(P) \right] d\sigma \right. \\ & \left. + \int_{+C} \Phi(P) [u_k(P) dy - v_k(P) dx] \right\}, \end{aligned}$$

e consideriamo le successioni

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mathfrak{B}_k(P) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(3) \quad \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} [F_k(P) - F_k(P_0)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$P_0$  essendo un punto fissato su  $C$  ed avendo posto  $F_{2k+1}(P) \equiv 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Ebbene, vogliamo dimostrare che

*Affinché la classe  $\Gamma$  non sia vuota, è necessario e sufficiente che*

1) per ogni  $n$  sia sempre possibile determinare i coefficienti  $\alpha_{n0}, \alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nn}$  in modo da render minimo il primo membro della (1),

2) la successione (2) converga in media su  $T$ ,

3) una successione subordinata alla (3) converga in  $T$  - salvo un insieme di punti le cui proiezioni sugli assi  $x$  ed  $y$  abbiano misura lineare nulla - verso una funzione  $g(P)$  continua in  $T$ ,

4) sia  $g(P) = \Phi(P) - \Phi(P_0)$  per  $P \in C$ .

5. In questo numero dimostriamo la necessità della condizione. Per il teorema di reciprocità, ed applicando successivamente la 3.2 ed una integrazione per parti, si ha

$$\begin{aligned} & \int_S \left[ \Phi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} w_k(P) - \Psi(P) \cdot w_k(P) \right] d\sigma = \\ & - \int_T \left[ \varphi(P) \frac{\partial}{\partial z} w_k(P) - \frac{\partial}{\partial z} \varphi(P) \cdot w_k(P) \right] dx dy = \\ & - \int_T \left[ \varphi(P) \frac{\partial}{\partial x} u_k(P) + \varphi(P) \frac{\partial}{\partial y} v_k(P) - \frac{\partial}{\partial z} \varphi(P) \cdot w_k(P) \right] dx dy = \\ & \int_T \left[ \frac{\partial}{\partial x} \varphi(P) \cdot u_k(P) + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(P) \cdot v_k(P) + \frac{\partial}{\partial z} \varphi(P) \cdot w_k(P) \right] dx dy \\ & - \int_{+C} \varphi(P) [u_k(P) dy - v_k(P) dx], \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} (I) \quad & \int_T |\text{grad}_{(x,y,z)} \varphi(P)|^2 dx dy + \int_T \left| \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mathfrak{B}_k(P) \right|^2 dx dy \\ & - 2 \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \left\{ \int_S \left[ \varphi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} w_k(P) - \frac{\partial}{\partial n_P} \varphi(P) \cdot w_k(P) \right] d\sigma \right. \\ & \quad \left. + \int_{+C} \varphi(P) [u_k(P) dy - v_k(P) dx] \right\} = \\ & = \int_T |\text{grad}_{(x,y,z)} \varphi(P)|^2 dx dy + \int_T \left| \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mathfrak{B}_k(P) \right|^2 dx dy \\ & - 2 \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \int_T \text{grad}_{(x,y,z)} \varphi(P) \times \mathfrak{B}_k(P) dx dy = \\ & \int_T \left| \text{grad}_{(x,y,z)} \varphi(P) - \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mathfrak{B}_k(P) \right|^2 dx dy; \end{aligned}$$

dalla (1) risulta chiaro che è possibile determinare i coefficienti  $\alpha_{n0}, \alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nn}$  in guisa tale, da rendere minimo l'ultimo membro della (1) stessa, e quindi il primo della 4. (1); inoltre, essendo completo il sistema di vettori  $\{\mathfrak{B}_k(P)\}$  nella classe  $H_2$  - cfr. 3.5 -, al divergere di  $n$  deve tender a zero il secondo membro della (1), e quindi la successione 4. (2) converge in media su  $T$ . Per dimostrare le tesi 3) e 4), premettiamo alcuni lemmi.

Diciamo  $a', a'', b', b'', I(x), J(y)$  rispettivamente la minima e la massima ascissa, la minima e la massima ordinata dei punti di  $T$ , l'insieme dei punti di  $T$  d'ascissa  $x$ , l'insieme dei punti di  $T$  d'ordinata  $y$ .

I.  $V'$  è una successione subordinata alla 4. (2),

$$(2) \quad \left\{ \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{m_n, k} \mathfrak{B}_k(P) \right\}_{n=0, 1, 2, \dots},$$

la quale per quasi ogni  $x$  in  $(a', a'')$  converge in media su  $I(x)$  e per quasi ogni  $y$  in  $(b', b'')$  converge in media su  $J(y)$ , verso il limite  $\text{grad } \varphi(P)$ .

Infatti, essendo

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T \left| \text{grad } \varphi(P) - \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mathfrak{B}_k(P) \right|^2 dx dy =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a'}^{a''} dx \int_{I(x)} \left| \text{grad } \varphi(P) - \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mathfrak{B}_k(P) \right|^2 dy,$$

esiste una successione

$$(3) \quad \left\{ \sum_{k=0}^{\mu_n} \alpha_{\mu_n, k} \mathfrak{B}_k(P) \right\}_{n=0, 1, 2, \dots}$$

subordinata alla 4. (2) tale, che sia

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I(x)} \left| \text{grad } \varphi(P) - \sum_{k=0}^{\mu_n} \alpha_{\mu_n, k} \mathfrak{B}_k(P) \right|^2 dy = 0 \text{ per quasi ogni } x \text{ in } (a', a'');$$

essendo anche

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T \left| \text{grad } \varphi(P) - \sum_{k=0}^{\mu_n} \alpha_{\mu_n, k} \mathfrak{B}_k(P) \right|^2 dx dy =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{b'}^{b''} dy \int_{J(y)} \left| \text{grad } \varphi(P) - \sum_{k=0}^{\mu_n} \alpha_{\mu_n, k} \mathfrak{B}_k(P) \right|^2 dx,$$

esiste una successione (2) subordinata alla (3) tale, che sia

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J(y)} \left| \text{grad } \varphi(P) - \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{m_n, k} \mathfrak{B}_k(P) \right|^2 dx = 0 \text{ per quasi ogni } y \text{ in } (b', b'').$$



Le (4) e (5) dimostrano il lemma I.

II.  $V'$  è su  $C$  un punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0, 0)$ , per cui si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{m_n, k} [F_k(x, y, 0) - F_k(x_0, y_0, 0)] = \varphi(x, y, 0) - \varphi(x_0, y_0, 0),$$

per quasi ogni  $x$  in  $(a', a'')$ , su tutto  $I(x)$ ,

per quasi ogni  $y$  in  $(b', b'')$ , su tutto  $J(y)$ .

Si prenda  $P_0$  su  $C$  in modo che la successione (2) converga in media su  $I(x_0)$  e su  $J(y_0)$  verso  $\text{grad } \varphi(P)$ , e vi sia un dominio rettangolare piano  $R$  di punti estremi  $(p', q')$ ,  $(p'', q'')$  - contenuto in  $T$  e contenente  $P_0$ . Per le 3.I, applicando il lemma precedente, avremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{m_n, k} [F_k(x, y_0, 0) - F_k(x_0, y_0, 0)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{m_n, k} \int_{x_0}^x u_k(t, y_0, 0) dt =$$

$$\varphi(x, y_0, 0) - \varphi(x_0, y_0, 0), \text{ uniformemente per } p' \leq x \leq p'';$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{m_n, k} [F_k(x, y, 0) - F_k(x, y_0, 0)] =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{m_n, k} \int_{y_0}^y v_k(x, t, 0) dt = \varphi(x, y, 0) - \varphi(x, y_0, 0),$$

per quasi ogni  $x$  in  $(p', p'')$ , uniformemente per  $q' \leq y \leq q''$ .

Basterà ora scambiare  $x$  con  $y$  nel ragionamento ora fatto, perché, limitatamente al dominio rettangolare  $R$ , il lemma II sia provato: è ovvia poi la estensione a tutto  $T$ .

Con ciò sono dimostrate le tesi 3) e 4) del teorema.

6. In questo numero dimostriamo la sufficienza della condizione enunciata. Poniamo

$$\varphi^0(P) = \Phi(P) \text{ su } S, = g(P) + \Phi(P_0) \text{ su } T,$$

$$\psi^0(P) = \Psi(P) \text{ su } S, = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} w_k(P) \text{ su } T,$$

ed osserviamo che, in base alla ipotesi 4.4, la funzione  $\varphi^0(P)$  è continua in tutto  $\mathfrak{F}D$ . Per un teorema di L. Amerio<sup>(4)</sup> e per la proprietà 3.4 della successione  $\{w_k(P)\}_{k=0,1,2,\dots}$ , basta dimostrare che è

$$(I) \quad \int_{\mathfrak{F}D} \left[ \varphi^0(P) \frac{\partial}{\partial n_P} w_h(P) - \psi^0(P) \cdot w_h(P) \right] d\sigma = 0 \quad \text{per } h = 0, 1, 2, \dots$$

(4) L. AMERIO, *Sulla integrazione della equazione  $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$  in un dominio di connessione qualsiasi*, in « Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », classe di Scienze, vol. LXXVIII, fasc. I (1944-45).

Ora, se poniamo

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} u_k(P) \stackrel{*}{=} g_1(P) \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} v_k(P) \stackrel{*}{=} g_2(P) \text{ su } T,$$

con lo stesso argomento impiegato a dimostrare il lemma II del n. 5 si prova che, preso un punto  $(x_1, y_1, 0)$  ad arbitrio in  $T$  — fuori d'un certo insieme le cui proiezioni sugli assi  $x$  e  $y$  hanno misura lineare nulla —, per ogni valore di  $y$  in un intorno di  $y_1$  e per ogni valore di  $x$  in un intorno di  $x_1$  si ha

$$g(x_1, y) - g(x_1, y_1) = \int_{y_1}^y g_2(x_1, t) dt \quad , \quad g(x, y_1) - g(x_1, y_1) = \int_{x_1}^x g_1(t, y_1) dt;$$

ciò prova che è

$$(3) \quad g_1(x, y) \stackrel{*}{=} \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) \quad , \quad g_2(x, y) \stackrel{*}{=} \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \text{ su } T.$$

Inoltre, siccome i coefficienti  $\alpha_{n0}, \alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nn}$  minimizzano le espressioni quadratiche 4. (I), sussistono le identità

$$(4) \quad \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \int_T [u_k(P) \cdot u_h(P) + v_k(P) \cdot v_h(P) + w_k(P) \cdot w_h(P)] dx dy =$$

$$\int_S \left[ \Phi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} w_h(P) - \Psi(P) \cdot w_h(P) \right] d\sigma + \int_{+C} \Phi(P) [u_h(P) dy - v_h(P) dx],$$

ottenute appunto annullando le derivate del secondo membro della 4. (I). Abbiamo dunque

$$\int_{\mathfrak{S}^D} \left[ \varphi^0(P) \frac{\partial}{\partial n_P} w_h(P) - \psi^0(P) \cdot w_h(P) \right] d\sigma =$$

$$\int_S \left[ \Phi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} w_h(P) - \Psi(P) \cdot w_h(P) \right] d\sigma$$

$$+ \int_T \left[ g(P) \frac{\partial}{\partial z} w_h(P) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{m_n, k} w_k(P) \cdot w_h(P) \right] dx dy$$

$$+ \int_T \Phi(P_0) \frac{\partial}{\partial z} w_h(P) dx dy = (5)$$

(5) Per la (4) e per la ipotesi 4.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{m_n, k} \int_{\bar{T}} [u_k(P) \cdot u_k(P) + v_k(P) \cdot v_k(P)] d\sigma$$

$$- \int_{+C} \Phi(P) [u_h(P) dy - v_h(P) dx]$$

$$+ \int_{\bar{T}} g(P) \frac{\partial}{\partial z} w_h(P) dx dy + \int_{\bar{T}} \Phi(P_0) \frac{\partial}{\partial z} w_h(P) dx dy = (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{m_n, k} \int_{\bar{T}} [u_k(P) \cdot u_k(P) + v_k(P) \cdot v_h(P)] d\sigma$$

$$+ \int_{\bar{T}} g(P) \left[ \frac{\partial}{\partial x} u_h(P) + \frac{\partial}{\partial y} v_h(P) \right] dx dy$$

$$- \int_{+C} [\Phi(P) - \Phi(P_0)] [u_h(P) dy - v_h(P) dx] = (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{m_n, k} \int_{\bar{T}} [u_k(P) \cdot u_h(P) + v_k(P) \cdot v_h(P)] d\sigma$$

$$- \int_{\bar{T}} \left[ u_h(P) \frac{\partial}{\partial x} g(P) + v_h(P) \frac{\partial}{\partial y} g(P) \right] d\sigma = (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{m_n, k} \int_{\bar{T}} [u_k(P) \cdot u_h(P) + v_k(P) \cdot v_h(P)] d\sigma$$

$$- \int_{\bar{T}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n} \alpha_{m_n, k} [u_k(P) \cdot u_h(P) + v_k(P) \cdot v_h(P)] d\sigma = 0 \quad (9).$$

Il teorema è così completamente dimostrato.

(6) Per la 3.2 e per la formola di Green.

(7) Per la ipotesi 4.4 e per la formola di Green.

(8) Per le (2) e (3).

(9) Per la ipotesi 4.1.

**Matematica.** — *Angoli fra due sottospazi di uno spazio sferico od ellittico.* Nota di JACOB SEIDEL, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

Nello spazio sferico ad  $N$  dimensioni  $S_N$  e nello spazio ellittico ad  $N$  dimensioni  $I_N$  la situazione mutua di due sottospazi  $\Gamma$  e  $\Delta$ , rispettivamente di dimensioni  $n$  ed  $m$  ( $n \geq m$ ), si determina compiutamente mediante  $m + 1$  invarianti metrici. Questi possono interpretarsi come i valori stazionari della distanza fra un punto di  $\Gamma$  ed un punto di  $\Delta$ , e si chiameranno gli angoli fra  $\Gamma$  e  $\Delta$ . Qui troveremo inoltre un'equazione, le radici della quale sono i coseni di tali angoli; i coefficienti di quest'equazione dipendono dalle distanze fra gli elementi di due basi in  $\Gamma$  ed in  $\Delta$ , nel modo che mostreremo.

Si può ottenere  $S_N$  od  $I_N$  identificando opportunamente gli elementi di uno spazio  $\Sigma$  ad  $N + 1$  dimensioni dotato di prodotto scalare, ossia uno spazio reale, lineare, in cui sia definito un prodotto scalare simmetrico, bilineare e strettamente positivo. Nel § 1 studiamo anzitutto la geometria in  $\Sigma$  coll'aiuto di matrici di Gram, cioè di matrici costruite coi prodotti scalari di un numero finito di elementi. Introdotte le nozioni di proiezione e di polo in  $\Sigma$ , una semplice forma normale per la matrice di Gram delle basi di due sottospazi vien dedotta nel § 2, il che facilita la dimostrazione della completezza del sistema d'invarianti dei due sottospazi, data poi nel § 3. Infine, nel § 4, vien precisato in qual modo questi invarianti sono legati cogli angoli di due sottospazi in  $S_N$  ed in  $I_N$ .

§ 1. — SPAZI DOTATI DI PRODOTTO SCALARE. — Uno spazio dotato di prodotto scalare (†) è uno spazio reale, lineare, tale che a ciascuna coppia di suoi elementi  $a_i$  e  $a_j$  resti associato un numero reale  $(a_i, a_j) = a_{ij}$ , detto il *prodotto scalare* di questi, soddisfacente alle condizioni:

$$(a_i, a_j) = (a_j, a_i) \quad ; \quad (a_i, a_j + a_k) = (a_i, a_j) + (a_i, a_k);$$

$$(\lambda a_i, a_j) = \lambda (a_i, a_j), \lambda \text{ reale} \quad ; \quad (a, a) \geq 0 \text{ se } a \neq 0 \text{ e } (0, 0) = 0.$$

La matrice, formata dai prodotti scalari degli elementi  $a_1, \dots, a_n$  si chiama la *matrice di Gram* (‡) di questi elementi e verrà designata nel modo seguente

$$(a_{ij}) = A = M(a_1, \dots, a_n).$$

Il rango d'una matrice  $A$  si denoterà con  $\rho(A)$ .

TEOREMA 1. — *La matrice di Gram d'un insieme finito di elementi è (semi)definita-positiva. Essa è singolare se e soltanto se quegli elementi sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. — Gli elementi  $a_1, \dots, a_n$  sono linearmente indipendenti se e soltanto se  $a = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \neq 0$  per ciascun sistema di numeri reali  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (0, \dots, 0)$ .

(\*) Nella seduta dell'8 maggio 1954.

(†) Ved. P. HALMOS, *Finite dimensional vector spaces*, Princeton 1942, pp. 1, 90.

(‡) Ved. R. COURANT-D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, I, Berlin 1931, p. 29.



Questo accade se e soltanto se

$$(a, a) = \sum a_{ij} \xi_i \xi_j > 0$$

per ciascun  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (0, \dots, 0)$ , dunque se la matrice  $M(a_1, \dots, a_n)$  è definita-positiva.

TEOREMA 2. - Sia  $A$  la matrice di Gram degli elementi  $a_1, \dots, a_n$  che sottendono un sottospazio  $\Gamma$ , e siano  $Q$  e  $P$  delle matrici  $(n \times h)$  e  $(h \times h)$  tali che

$$(I) \quad \begin{pmatrix} A & Q \\ Q^T & P \end{pmatrix}$$

(dove  $Q^T$  denota la matrice trasposta di  $Q$ ) abbia lo stesso rango di  $A$ . Allora esistono  $h$  elementi  $p_1, \dots, p_h$  aventi con  $a_1, \dots, a_n$  la matrice di Gram (I); tali elementi sono univocamente determinati ed appartengono a  $\Gamma$ .

Dimostrazione. - Supposto intanto  $A$  non singolare, e posto per abbreviare  $(\sigma_{ij}) = S = A^{-1}Q$ , dall'ipotesi ammessa risulta che è

$$\begin{pmatrix} A & Q \\ Q^T & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AS \\ S^T A & S^T AS \end{pmatrix}.$$

Gli elementi  $p_i = \sum_{k=1}^n a_k \sigma_{ki}$  soddisfanno alle condizioni del precedente enunciato. È poi chiaro che, se gli elementi  $t_i$  soddisfanno alle condizioni medesime, in virtù del teor. I deve essere  $t_i \in \Gamma$ . Gli elementi  $p_i - t_i$  hanno prodotti scalari nulli con  $a_1, \dots, a_n$ , epperò anche con se stessi, sicchè  $p_i - t_i = 0$ , il che dimostra l'univocità dei  $p_i$ . Se  $A$  non è singolare e se  $\rho(A) > 0$ , possiamo operare analogamente con un minore principale massimo non singolare di  $A$ . Quando  $A = 0$ , soltanto  $p_i = 0$  soddisfa al teorema. Questo è così provato in ogni caso.

Consideriamo due sottospazi di dimensioni finite, rispettivamente sottesi dalle basi (costituite ciascuna da elementi linearmente indipendenti)  $a_1, \dots, a_n$  e  $b_1, \dots, b_m$  ( $n \geq m$ ), colla matrice di Gram

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}.$$

Poggiando sull'identità

$$(2) \quad \rho \begin{pmatrix} A & C & C \\ C^T & B & C^T A^{-1} C \\ C^T & C^T A^{-1} C & C^T A^{-1} C \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} A & C & O \\ C^T & B & B - C^T A^{-1} C \\ O & B - C^T A^{-1} C & B - C^T A^{-1} C \end{pmatrix}$$

e sul teorema 2, si vede che nella unione  $\Gamma \cup \Delta$  di  $\Gamma$  e  $\Delta$  sono determinati univocamente  $m$  elementi, che posseggono con  $a_1, \dots, a_n$ , con  $b_1, \dots, b_m$  e con se stessi i prodotti scalari dati dalle matrici  $C$ ,  $C^T A^{-1} C$ , e  $C^T A^{-1} C$ ; tali elementi, situati nel sottospazio  $\Gamma$ , si diranno le proiezioni di  $b_1, \dots, b_m$  su  $\Gamma$ . Il numero

$$q = \rho(B) - \rho(C^T A^{-1} C)$$

si chiamerà il *grado di ortogonalità* <sup>(3)</sup> di  $\Gamma$  e  $\Delta$ . Questi sottospazi si diranno fra loro *ortogonali*, se hanno grado di ortogonalità massimo  $q = m$ , dunque

(3) Ved. P. H. SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie*, I, Leipzig 1902, p. 49.

se  $C = O$ , nel qual caso possiamo scrivere lo spazio  $\Gamma \cup \Delta$ , del pari che la matrice di Gram relativa a  $\Gamma$  e  $\Delta$ , come somma diretta:

$$\Gamma \cup \Delta = \Gamma \oplus \Delta \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = A \oplus B.$$

Dalla (2) segue altresì che esistono determinati in  $\Gamma \cup \Delta$   $m$  elementi aventi rispettivamente con  $a_1, \dots, a_n$ , con  $b_1, \dots, b_m$ , e con se stessi i prodotti scalari  $O$ ,  $B - C^T A^{-1} C$ , e  $B - C^T A^{-1} C$ . Il sottospazio  $\Gamma^*$  sotteso di questi elementi si dirà il *polo* di  $\Gamma$  in  $\Gamma \cup \Delta$ . Ogni sottospazio di  $\Gamma \cup \Delta$ , ortogonale a  $\Gamma$ , è situato per intero in  $\Gamma^*$ .

L'intersezione  $\Gamma \cap \Delta$  di  $\Gamma$  e  $\Delta$  si compone di tutti gli elementi

$$d_k = \sum_{i=1}^n a_i \xi_{ik} = \sum_{j=1}^m b_j \eta_{jk}.$$

Posto  $(\xi_{ik}) = X$  e  $(\eta_{jk}) = Y$ , allora  $AX = CY$  e  $C^T X = BY$ , sicché

$$(B - C^T A^{-1} C) Y = O.$$

Inversamente, ogni matrice  $Y$  di tipo  $(m \times 1)$  soddisfacente a questa equazione dà un elemento di  $\Delta$  situato anche in  $\Gamma$ . L'identità

$$\rho \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1} C \end{pmatrix}$$

porge quindi la ben nota uguaglianza  $\dim \Gamma \cup \Delta = \dim \Gamma + \dim \Delta - \dim \Gamma \cap \Delta$ .

§ 2. — FORMA NORMALE SIMULTANEA DI DUE SOTTOSPAZI. —  $\Gamma$  e  $\Delta$  siano due sottospazi di dimensioni finite con basi costituite ciascuna da elementi linearmente indipendenti, rispettivamente  $a_1, \dots, a_n$  e  $b_1, \dots, b_m$  ( $n \geq m$ ). Se

$$\bar{a}_j = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_{ij} \quad \text{e} \quad \bar{b}_k = \sum_{l=1}^m b_l \tau_{lk} \quad ; \quad j = 1, \dots, n \quad ; \quad k = 1, \dots, m$$

sono due qualsiasi altre basi analoghe, le matrici  $S = (\sigma_{ij})$  e  $T = (\tau_{lk})$  risultano quadrate e non-singolari, e viceversa. Le matrici di Gram di  $a_j$ ,  $b_k$  e di  $\bar{a}_j$ ,  $\bar{b}_k$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} S^T A S & S^T C T \\ T^T C^T S & T^T B T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & O \\ O & T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & O \\ O & T \end{pmatrix}$$

si diranno allora fra loro *semicongruenti*, e la relazione fra esse si esprimerà col simbolo  $\sim$ . La matrice a destra si dirà ottenuta da quella a sinistra per mezzo della *trasformazione semicongruente*

$$\begin{pmatrix} S & O \\ O & T \end{pmatrix} = S \oplus T.$$

Mediante una trasformazione semicongruente opportuna, cioè scegliendo di modo conveniente le basi in  $\Gamma$  e  $\Delta$ , dedurremo una forma normale semplice per la classe delle matrici di Gram  $\sim (3)$ .

Suppongasì dapprima che il grado di ortogonalità  $q$  di  $\Gamma$  e  $\Delta$  soddisfi alle  $0 < q < m$ . Allora possiamo scrivere

$$C^T A^{-1} C = \begin{pmatrix} P & PQ \\ Q^T P & Q^T P Q \end{pmatrix},$$

ove  $P$  denoti un minore principale non singolare di  $C^T A^{-1} C$  d'ordine massimo  $m - q$ . Un'alterazione conveniente della base in  $\Delta$  trasforma la matrice  $B$ , definita-positiva, e la  $C^T A^{-1} C$ , semidefinita-positiva, rispettivamente nelle

$$T^T B T = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^T & B_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T^T C^T A^{-1} C T = \begin{pmatrix} U_{m-q} & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

ove  $U_{m-q}$  rappresenti la matrice-unità di ordine  $m - q$ . Assumiamo entro la base di  $\Gamma$  gli  $m - q$  elementi linearmente indipendenti con matrice di Gram  $U_{m-q}$ , che sottendono la proiezione su  $\Gamma$  della nuova base di  $\Delta$ . Allora la matrice di Gram delle basi di  $\Gamma$  e  $\Delta$  prende la forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_2 & O \\ A_2^T & U_{m-q} & U_{m-q} & O \\ A_2^T & U_{m-q} & B_1 & B_2 \\ O & O & B_2^T & B_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_1 - A_2^T A_2 & O & O & O \\ O & U_{m-q} & U_{m-q} & O \\ O & U_{m-q} & B_1 - B_2^T B_3^{-1} B_2 & O \\ O & O & O & B_3 \end{pmatrix}.$$

$B_3$  e  $A_1 - A_2^T A_2$  possono venire trasformate nelle matrici-unità  $U_q$  ed  $U_{n-m+q}$ , rispettivamente d'ordine  $q$  ed  $n - m + q$ , mentre  $B_1 - B_2^T B_3^{-1} B_2$  si muta per mezzo d'una trasformazione ortogonale in una matrice diagonale  $D$ . Così vediamo che la matrice di Gram (3) è semicongruente colla matrice

$$(4) \quad \left( \begin{array}{cc|cc} U_{n-m+q} & O & O & O \\ O & U_{m-q} & U_{m-q} & O \\ \hline O & U_{m-q} & D & O \\ O & O & O & U_q \end{array} \right).$$

Nei casi  $q = m$  e  $q = 0$  troviamo similmente delle matrici, che si possono riguardare come casi speciali della (4). La matrice (4) si dirà la *matrice normale* dei sottospazi  $\Gamma$  e  $\Delta$ . Dal fatto che la (4) è definita-positiva e dalla relazione

$$\begin{pmatrix} U_{m-q} & O \\ -U_{m-q} & U_{m-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{m-q} & U_{m-q} \\ U_{m-q} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{m-q} & -U_{m-q} \\ O & U_{m-q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{m-q} & O \\ O & D - U_{m-q} \end{pmatrix}$$

risulta che gli elementi nella diagonale di  $D$  sono tutti  $\geq 1$ .

Numeriamo gli elementi delle basi di  $\Gamma$  e  $\Delta$ , dei quali (4) è la matrice di Gram, nel modo seguente. Siano  $\delta_{i,\alpha}$ , ove  $\delta_{i,\alpha} = \delta_{i,\beta}$  e  $\delta_{0,\alpha} = 1$ , ( $\alpha, \beta = 1, \dots, v_i$ ;  $i = 0, \dots, p$ ), gli elementi nella diagonale di  $D$ . Siano  $b_{i,\alpha}$  gli elementi della base di  $\Delta$  appartenenti a  $\delta_{i,\alpha}$ , e sia  $a_{i,\alpha}$  l'elemento della base di  $\Delta$  non ortogonale a  $b_{i,\alpha}$ . Il sottospazio sotteso dagli  $a_{i,\alpha}$  e  $b_{0,\alpha}$ , ( $\alpha = 1, \dots, v_0$ ) è l'intersezione  $\Gamma \cap \Delta$ . Il sottospazio sotteso dagli  $a_{i,\alpha}$  e  $b_{i,\alpha}$  ( $i$  è fisso e  $\neq 0$ ;  $\alpha = 1, \dots, v_i$ ), avente dimensione  $\geq v_i$ , si denominerà lo

spazio di nodi  $i$ -esimo,  $\Pi_i$ , relativo a  $\Gamma$  e  $\Delta$ . I sottospazi sottesi dagli altri elementi delle basi di  $\Gamma$  e  $\Delta$  si dicano rispettivamente  $\Gamma_o$  e  $\Delta_o$ . Allora

$$(5) \quad \Gamma \cup \Delta = \Gamma_o \oplus \Delta_o \oplus (\Gamma \cap \Delta) \oplus \Pi_1 \oplus \dots \oplus \Pi_p$$

è la *decomposizione normale* di  $\Gamma \cup \Delta$  come somma diretta, fornita dalla (4).

TEOREMA 3. — *La suddetta decomposizione normale di  $\Gamma \cup \Delta$  è univoca.*

DIMOSTRAZIONE. — Le trasformazioni semicongruenti che mutano la (4) in se stessa sono della forma  $S_o \oplus R \oplus R' \oplus T_o$ , ove  $S_o, R, T_o$  sono ortogonali ed  $RD = DR$ . Dunque è della forma

$$R = R_o \oplus \dots \oplus R_p, \quad R_i \text{ ortogonali,} \quad (i = 0, \dots, p);$$

sicché le alterazioni corrispondenti nelle basi trasformano i singoli componenti della decomposizione (5) in se stessi.

I sottospazi  $\Pi_{i,\alpha}$  di dimensione 2, sottesi dagli  $a_{i,\alpha}$  e  $b_{i,\alpha}$ , non si trasformano necessariamente in se stessi se  $v_i > 1$ . Chiameremo tali  $\Pi_{i,\alpha}$ , come pure tutti i sottospazi bidimensionali di  $\Pi_i$  generati da  $\Pi_{i,\alpha}$  per mezzo di una trasformazione semicongruente che lasci (4) invariante, le *rette di nodi* situate nello spazio  $i$ -esimo di nodi.

TEOREMA 4. — *I sottospazi bidimensionali aventi con ciascuno dei sottospazi  $\Gamma, \Delta$  e dei rispettivi poli  $\Gamma^*$  e  $\Delta^*$  un'intersezione unidimensionale, sono:*

1° il «cono» formato da tutti i sottospazi bidimensionali congiungenti un elemento di  $\Gamma_o$  con un elemento di  $\Delta_o$ ;

2° il «cono» formato da tutti i sottospazi bidimensionali congiungenti un elemento di  $\Gamma \cap \Delta$  con un elemento di  $\Gamma^* \cap \Delta^*$ ;

3° i  $p$  «regoli» di rette di nodi nei  $p$  spazi di nodi.

DIMOSTRAZIONE. — Dalle forme normali (4) e (5) risulta che i sottospazi nominati sotto 1°, 2° e 3° soddisfano alle condizioni volute dal teor. 4. Inversamente, supposto che gli elementi  $a \in \Gamma, b \in \Delta, a^* \in \Gamma^*, b^* \in \Delta^*$  sottendano un sottospazio bidimensionale  $\Pi$ , assumiamo  $a$  entro la base di  $\Gamma$  e scegliamo gli altri elementi della base di  $\Gamma$  ortogonali ad  $a$ , e quindi anche ortogonali a  $\Pi$ . La base di  $\Delta$  si scelga in modo analogo. Dal teor. 3 segue che, se  $a$  e  $b$  non sono linearmente indipendenti,  $\Pi$  è contenuto in  $\Gamma_o \cup \Delta_o$ , ossia in uno degli spazi di nodi  $\Pi_i$ ; e ciò dimostra l'asserto.

§ 3. INVARIANTI DI DUE SOTTOSPAZI. — Siano ancora  $\Gamma$  e  $\Delta$  due sottospazi sottesi dalle basi consistenti ciascuna di elementi linearmente indipendenti  $a_1, \dots, a_n$  e  $b_1, \dots, b_m$  ( $n \geq m$ ). Una funzione dei prodotti scalari

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

di tali elementi che non dipenda dalla scelta delle basi in  $\Gamma$  e  $\Delta$ , si chiamerà un *invariante* (metrico) di  $\Gamma$  e  $\Delta$ . L'equazione

$$(6) \quad \begin{vmatrix} A & C \\ C^T & \lambda B \end{vmatrix} = 0$$



si denominerà *l'equazione caratteristica* di  $\Gamma$  e  $\Delta$ ; le sue radici si chiameranno gli *autovalori* di  $\Gamma$  e  $\Delta$ .

TEOREMA 5. - *Gli autovalori  $\lambda_i$  di  $\Gamma$  e  $\Delta$  costituiscono un sistema completo d'invarianti, e soddisfano alle  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ . Il numero degli autovalori  $\lambda_i = 1$  è uguale alla dimensione di  $\Gamma \cap \Delta$ , ed il numero dei  $\lambda_i = 0$  uguaglia il grado di ortogonalità di  $\Gamma$  e  $\Delta$ .*

Dimostrazione. - L'invarianza degli autovalori risulta dall'identità

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{C} \\ \bar{C}^T & \lambda \bar{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & O \\ O & T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & \lambda B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & O \\ O & T \end{pmatrix}.$$

Osservato che l'equazione caratteristica si può scrivere nella forma

$$|\lambda B - C^T A^{-1} C| = 0,$$

basta assumere come matrice di Gram delle due basi la matrice normale (4), affinchè questa equazione si riduca alla

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} D & O \\ O & U_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_{m-q} & O \\ O & O \end{pmatrix} \right| = 0.$$

Gli autovalori  $\neq 0$  sono pertanto gl'inversi degli elementi della diagonale di  $D$ . Ne risultano le varie asserzioni sui valori delle  $\lambda_i$ . Infine un qualunque invariante è per definizione una funzione degli elementi della matrice normale (4), e quindi pure degli autovalori in virtù di ciò che precede.

Notiamo che dalla (4) risulta, che *gli autovalori  $\neq 0, 1$  sono precisamente gli autovalori delle intersezioni di  $\Gamma$  e  $\Delta$  con i loro spazi di nodi*; risultato, questo, equivalente ad una proposizione geometrica che mi era stata suggerita dal prof. B. Segre.

TEOREMA 6. - *Gli autovalori di  $\Gamma$  e  $\Delta$  sono i valori stazionari dell'autovalore relativo ad un sottospazio unidimensionale di  $\Gamma$  e da un sottospazio unidimensionale di  $\Delta$ .*

Dimostrazione. - L'autovalore  $\mu$  dei sottospazi sottesi da  $x = \sum a_i \xi_i$  e da  $y = \sum b_j \eta_j$  soddisfa alla

$$\mu \cdot X^T A X \cdot Y^T B Y = (Y^T C^T X)^2.$$

Differenziando rispetto ad  $X$  e  $Y$  troviamo per i valori stazionari di  $\mu$  le condizioni:

$$\mu \cdot Y^T B Y \cdot A X = X^T C Y \cdot C Y \quad \text{e} \quad Y^T C^T X \cdot C^T X = \mu \cdot X^T A X \cdot B Y.$$

Se  $\mu = 0$ , allora  $\rho(C) < m$ . Se  $\mu \neq 0$ , allora

$$A \cdot Y^T C^T X \cdot X = C \cdot X^T A X \cdot Y \quad \text{e} \quad C^T \cdot Y^T C^T X \cdot X = \mu \cdot B \cdot X^T A X \cdot Y.$$

In ambedue i casi  $\mu$  soddisfa all'equazione caratteristica di  $\Gamma$  e  $\Delta$ . Inversamente, ogni autovalore  $\Gamma$  e  $\Delta$  risulta un valore stazionario.

§ 4. - SPAZI SFERICI ED ELLITTICI. — Identificando opportunamente gli elementi di uno spazio  $\Sigma$  dotato di prodotto scalare, di dimensione finita  $N + 1$ , otterremo gli spazi  $S_N$  ed  $I_N$  di cui si è detto al principio del presente lavoro.

*Prima identificazione.* — Diciamo che due elementi  $a_x$  e  $a_y$  di  $\Gamma$ , differenti da 0, sono fra loro equivalenti, in simboli  $a_x \approx a_y$ , se e soltanto se essi sono linearmente dipendenti. Le classi di equivalenza si chiameranno dei *punti*. Più punti si diranno fra loro indipendenti, se tali sono i relativi elementi generatori. L'insieme  $I_N$  di tutti i punti si metrizza per mezzo della seguente definizione della *distanza*  $d_{ij}$  fra due punti  $\{a_i\}$  e  $\{a_j\}$ , rispettivamente generati dagli elementi  $a_i$  ed  $a_j$ :  $d_{ij} = r \arccos \frac{|a_{ij}|}{\sqrt{a_{ii} a_{jj}}}$ , dove  $r$  è un numero positivo comunque fissato. Questa definizione, formata mediante l'invariante dei sottospazi  $\{a_i\}$  e  $\{a_j\}$ , ha significato nel campo reale perché la matrice di Gram  $M(a_i, a_j)$  è definita positiva. Evidentemente  $0 \leq d_{ij} \leq 1/2 \pi r$ ;  $d_{ij} = d_{ji}$ ; e  $d_{ij} = 0$  se e soltanto se  $\{a_i\} = \{a_j\}$ , il che significa che  $I_N$  è un spazio *semimetrico*.

**TEOREMA 7.** — *Lo spazio semimetrico  $I_N$  ha la proprietà che, per ciascun numero naturale  $k$  e per ogni insieme di  $k$  punti, esiste una matrice  $(\epsilon_{ij})$ , ove  $\epsilon_{ii} = 1$ ,  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} = \pm 1$ , tale che la matrice di distanza  $(\epsilon_{ij} \cos r^{-1} d_{ij})$  dei dati punti è (semi) definita-positiva, e singolare se e soltanto se i punti sono dipendenti.*

*Dimostrazione.* — Le matrici

$$(a_{ij}) = (\epsilon_{ij} | a_{ij}) \quad \text{e} \quad \left( \epsilon_{ij} \frac{|a_{ij}|}{\sqrt{a_{ii} a_{jj}}} \right) = \left( \epsilon_{ij} \cos \frac{d_{ij}}{r} \right)$$

hanno la stessa segnatura e lo stesso rango.

*Seconda identificazione.* — Chiamiamo due elementi (non nulli)  $a_x, a_y \in \Sigma$  fra loro equivalenti, in simboli  $a_x \approx a_y$ , se e soltanto se essi sono linearmente dipendenti e hanno prodotto scalare positivo. Questa equivalenza è riflessiva, simmetrica, e anche transitiva perchè da  $a_x \approx a_y$  e  $a_x \approx a_z$  risulta la singolarità di  $M(a_x, a_y, a_z)$ . Le classi di equivalenza si denomineranno dei *punti*. L'insieme  $S_N$  di tutti i punti si metrizza per mezzo della seguente definizione della *distanza*  $d_{ij}$  di due punti  $\{a_i\}$  e  $\{a_j\}$ :

$$d_{ij} = r \arccos \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii} a_{jj}}}; \quad r > 0.$$

Evidentemente  $0 \leq d_{ij} \leq \pi r$ ;  $d_{ij} = d_{ji}$ ; e  $d_{ij} = 0$  se e soltanto se  $\{a_i\} = \{a_j\}$ , sicché  $S_N$  è un spazio semimetrico.

**TEOREMA 8.** — *Lo spazio semimetrico  $S_N$  è diametrico (nel senso precisato più oltre) e ha la proprietà che, per ogni numero naturale  $k$ , la matrice delle distanze  $(\cos r^{-1} d_{ij})$  fra i punti di ciascun insieme di  $k$  punti è (semi) definita-positiva, e singolare se e soltanto se tali punti sono dipendenti.*

*Dimostrazione.* —  $S_N$  è diametrico, con ciò intendendosi che ciascun punto  $\{a_p\}$  ammette un punto diametralmente apposto  $\{-a_p\}$ , univocamente definito dalla proprietà di avere da esso distanza  $\pi r$ . Il teor. 8 risulta dalle precedenti definizioni e dalla segnatura e dal rango delle matrici di Gram.

Dai teoremi 7 e 8, e tenuto conto della serratura e convessità metrica di  $I_N$  e  $S_N$ , segue <sup>(4)</sup> che  $I_N$  e  $S_N$  si possono rispettivamente interpretare come spazi  $N$ -dimensionali ellittici e sferici a curvatura  $r^{-2}$ . I concetti di polo, proiezione, forma normale, spazio di nodi, invarianti, autovalori, ecc., definiti in  $\Sigma$ , danno luogo ad analoghi concetti in  $I_N$  e  $S_N$ .

Considerati due sottospazi di  $I_N$  o di  $S_N$  di dimensione  $n$  e  $m$  ( $n \geq m$ ), rispettivamente sottesi dai punti  $p_1, \dots, p_{n+1}$  e  $q_1, \dots, q_{m+1}$ , i loro  $m+1$  autovalori soddisfanno alle  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ . Chiameremo *angoli* fra i due sottospazi gli  $m+1$  valori  $\varphi_i = \arccos \sqrt{\lambda_i}$ .

In conseguenza del § 3 si ha il

**TEOREMA 9.** - *Gli angoli fra due sottospazi sono i valori stazionari della distanza di un punto dell'uno da un punto dell'altro sottospazio. I quadrati dei coseni di tali angoli sono in  $S_N$  le radici dell'equazione*

$$\begin{vmatrix} \cos d(p_i, p_j) & \cos d(p_i, q_v) \\ \cos d(q_\mu, p_j) & \lambda \cos d(q_\mu, q_v) \end{vmatrix} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n+1; \mu, v = 1, \dots, m+1);$$

*ed in  $I_N$  sono le radici dell'equazione*

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{ij} \cos d(p_i, p_j) & \varepsilon_{iv} \cos d(p_i, q_v) \\ \varepsilon_{\mu i} \cos d(q_\mu, p_j) & \lambda \varepsilon_{\mu v} \cos d(q_\mu, q_v) \end{vmatrix} = 0,$$

ove le  $\varepsilon = \pm 1$  risultano dal teor. 7.

**Teoria dell'erosione.** - *Quelques considérations sur la théorie mathématique des tafoni.* Nota I di M. MATSCHINSKI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio L. ROLLA.

§ 1. - Les tafoni - une sorte de cavités dans les roches massives avec les ouvertures principales toujours tournées vers le bas et le côté, jamais vers le haut - sont connus dans les endroits les plus différents du Globe. Le pays classique de ces formations est la Corse, dont les tafoni sont décrits par plusieurs auteurs (Reusch [1], Günther [2], Penck [3], Kessler [4], Kayser [5], Bourcart [6], Popoff [7], Ligus [8], etc.), mais on a indiqué leur présence: dans le désert Namib, Afrique du Sud (Schultze [9]), Kaiser [10], etc.), sur l'île de Hongkong (Krejci-Graf [11]), sur l'île de Spitzberg (Högbom [12]), au Groenland (Nordenskjöld [13]), dans les « Riesengebirge » (Blanck [14 a] etc.), sur les monuments d'Egypte (Walther [15], Blanck [14 b], etc.), sur les monuments de l'Europe (Fischer [16], Fütterer [17]), sur les côtes britanniques et

(4) Ved. L. M. BLUMENTHAL, *Theory and applications of distance geometry*, Oxford 1953, pp. 163, 208.

(\*) Nella seduta dell'8 maggio 1954.

bretonnes (Guilcher [18]) et même aux environs de Paris-Saint Chéron (Cailleux [19]). Cette petite liste ne prétend pas être complète, il est difficile de donner une liste exhaustive parce que les différents auteurs comprennent sous la rubrique « tafoni » des phénomènes souvent assez différents. Pour fixer les idées nous comprendrons dans ce qui suit sous l'expression « tafoni » les formations alvéolaires dues à l'érosion et caractérisées par: surface d'érosion extrêmement lisse (lisse de façon étonnante, étant donnée la cause — érosion — qui les a provoquées), ouvertures jamais tournées vers le haut et existence d'alvéoles secondaires. On a émis plusieurs hypothèses sur les causes de ces phénomènes de l'érosion alvéolaire. La plupart des auteurs adoptent le point de vue d'après lequel ces formations sont dues, entièrement ou en grande partie, à l'action chimique. Kayser [5], Walther [12], Penck [3], Krejci-Graf [11] pensent que le phénomène des tafoni est lié à la formation de la croûte sur les roches dans les désert: la formation de cette croûte est évidemment due à des facteurs chimiques. Högbom [12], Günther [2] sont enclins à attribuer cette influence chimique aux sels étrangers aux roches. Schultze [9] a été le premier qui a pensé à des causes thermo-mécaniques; mais il a aussi donné le rôle prépondérant à l'action chimique. C'est Popoff [7] qui a proposé la théorie d'après laquelle la formation de tafoni est due principalement aux facteurs thermo-mécaniques et a décrit le processus de cette érosion thermo-mécanique dans tous ses détails. Dans son récent article Cailleux [19] trouve possible d'en rapporter la cause à l'influence éventuelle du gel de la glace, qui, dans certains climats, pourrait se former dans des fissures minuscules. Dans le même sens on a interprété (Cayeux [20], etc.) cette forme d'érosion par l'action mécanique de la cristallisation des sels.

Mais presque tous ces auteurs, si ingénieuses que soient leurs idées, se limitent aux hypothèses. Le seul savant qui a fait des observations qualitatives et des études microscopiques pour prouver sa théorie c'est Popoff [7]; le livre déjà cité [7] de ce savant est un modèle d'exactitude des mesures et de justesse des conclusions. C'est pourquoi toutes les hypothèses, sauf l'hypothèse « thermo-mécanique » sont, au moins pour les tafoni de la Corse, complètement exclues. Cependant ce livre, dans toute sa surabondance d'observations et de mesures, ne contient que le schéma graphique du modèle thermo-mécanique décrivant le processus de la formation des tafoni; il n'y a pas de calculs. Aussi le but de ce petit essai est-il, en se basant sur les résultats acquis par Popoff, d'établir une théorie physico-mathématique de ce type d'érosion alvéolaire.

§ 2. — Considérons une surface, primitivement encore plane, où peu après commenceront à se former les tafoni (fig. 1 a). Il est évident qu'aucun alvéole ne peut se former, à partir d'une surface strictement plane, d'une surface qui n'a aucune inégalité primitive. Si ces conditions au début sont strictement égales partout, les résultats sont aussi égaux: l'érosion sera partout la même. Ainsi on doit supposer l'existence de quelques inégalités pri-



mitives (voir fig. 1 b), inégalités positives ou négatives, convexes ou concaves. Ces inégalités sont supposées d'origine fortuite. Pour simplifier le calcul dé-



Fig. 1 a.

Fig. 1 b.

crivons ces inégalités comme portions de sphères; de plus, supposons que pour calculer les tensions ou les pressions dans ces portions sphériques, il est possible de se borner au cas de la symétrie sphérique. Cependant ce n'est pas juste en général, que les résultats soient d'autant plus exacts, que la partie de la roche est plus voisine de la surface. Etant donné que ce sont les couches superficielles qui sont intéressantes pour nous - c'est là que commence le morcellement - cette approximation (symétrie sphérique) est bien acceptable.

Le problème ainsi posé, est du point de vue mathématique, le même que celui considéré dans notre article [21] sur la fissuration du Globe terrestre. Deux différences capitales apparaissent naturellement: différence d'échelles et différence des causes du changement de volume. La différence d'échelles ne change pas les formules, mais seulement les valeurs numériques. La seconde différence exige quelques explications. Soient:  $X_{rr}$ ,  $X_{\lambda\lambda}$  composantes, radiale et tangentielle, des tensions,  $u$  composante radiale du déplacement,  $r$  rayon-vecteur,  $G$  constante de l'élasticité;  $m$ ,

autre constante, est supposée égale à 4. Les formules de mécanique du milieu continu pour les couches sphériques (supposant la symétrie sphérique) sont:

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 X_{rr}) = 2 r X_{\lambda\lambda}, \\ X_{rr} = 2G \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\theta}{2} \right) ; \quad X_{\lambda\lambda} = X_{\theta\theta} = 2G \left( \frac{u}{r} + \frac{\theta}{2} \right) ; \quad \theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u). \end{cases}$$

Si, comme dans notre cas, il y a un réchauffement ou un refroidissement venant de l'extérieur, la dilatation en volume n'est plus égale seulement à la divergence du vecteur  $u$ , mais égale à la somme de cette divergence et du changement thermique de volume:

$$(2) \quad \theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) + \frac{D}{r^n}.$$

La solution générale est:

$$(3) \quad u = C_1 r + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{3(n-3)r^{n-1}}.$$

Nous n'entrons pas dans le détail du calcul, parce que premièrement il est très simple et deuxièmement on le trouve dans notre article cité [21]. Les constantes arbitraires  $C$  et  $C_1$  ne peuvent différer simultanément de

zéro. Dans le cas de la cavité (voir fig. 2 a), O, origine des coordonnées, se trouvant en dehors de la roche, la constante  $C \neq 0$ , tandis que  $C_1 = 0$ . Pour le cas d'une inégalité convexe (voir fig. 2 b), l'origine O est dans la roche et par conséquent  $C_1 \neq 0$ ,  $C = 0$ .

Il en est de même pour le dernier terme de la formule (2):  $n$  doit être positive dans le cas d'une concavité et négative pour le cas d'une convexité. Posons pour ce dernier cas

$$(4) \quad k = -n > 0.$$

Connaissant les déplacements  $u$ , il est très facile de calculer à l'aide de (1) les tensions. Pour le cas d'une concavité elles sont:

$$(5) \quad X_{rr} = 2G \left( -\frac{2C}{r^3} - \frac{2D}{3(n-3)r^n} \right) ; \quad X_{\lambda\lambda} = 2G \left( \frac{C}{r^3} + \frac{(n-2)D}{3(n-3)r^n} \right).$$

Pour le cas d'une convexité on trouve:

$$(6) \quad X_{rr} = 2G \left( 4C_1 + \frac{2Dr^k}{3(k+3)} \right) ; \quad X_{\lambda\lambda} = 2G \left( 4C_1 + \frac{(k+2)Dr^k}{3(k+3)} \right).$$

La seule constante qui reste dans les formules (5) et (6), doit être déterminée à partir de la condition sur la surface libre de la roche (où, évidemment, les tensions normales n'existent pas):

$$(7) \quad X_{rr} |_{r=R} = 0.$$

Utilisant cette condition, on obtient définitivement pour une concavité

$$(8) \quad X_{rr} = \frac{4GD}{3(n-3)R^n} \left[ \left( \frac{R}{r} \right)^3 - \left( \frac{R}{r} \right)^n \right] ; \quad X_{\lambda\lambda} = \frac{2GD}{3(n-3)R^n} \left[ (n-2) \left( \frac{R}{r} \right)^n - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right]$$

et pour une convexité

$$(9) \quad X_{rr} = -\frac{4GDR^k}{3(k+3)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^k \right] ; \quad X_{\lambda\lambda} = -\frac{2GDR^k}{3(k+3)} \left[ 2 - (k+2) \left( \frac{r}{R} \right)^k \right].$$

Dans toutes les formules il a été supposé que si  $X_{rr}$  et  $X_{\lambda\lambda}$  sont positives, elles sont des tensions et que si  $X_{rr}$  et  $X_{\lambda\lambda}$  sont négatives elles sont des pressions.

Dans la Note II sur le même sujet, qui suivra, les formules (8) et (9) seront appliquées pour obtenir les résultats sur l'existence de pressions ou de tensions dans les quatre cas principaux: cavités en état de refroidissement, cavités en état de réchauffement, convexités en état de refroidissement et, enfin, convexités en état de réchauffement. On appliquera aussi les formules (8) et (9) pour expliquer l'apparition de fissures parallèles et de fissures perpendiculaires à la surface. Pour achever, on traitera la ques-

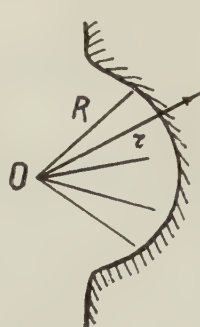


Fig. 2 a.

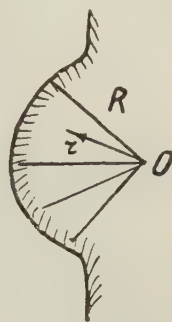


Fig. 2 b.

tion sur les possibilités de morcellement dans les quatre cas mentionnés et les applications de ces résultats aux tafoni.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] REUSCH HANS, *Jayttagelser over isskuret Fjeld og forvitret Fjeld*. « Forhandlingler i Vedenskabs-Selskabet i Christiania », 1878; *Note sur la Géologie de la Corse*. « Bull. de la Soc. Géol. de France », 3-ème série, t. XI, 1882 à 1883.
- [2] GÜNTHER S., *Untersuchungen über Wackelsteine und damit zusammenhängende Denudationerscheinungen*. « Sitzungsberichte der Königl. Bayrischen Akad. der Wissenschaften, Math.-Phys. Kl. », München, 1909, S. 113.
- [3] PENCK A., *Morphologie der Erdoberfläche*. Stuttgart, 1894, S. 214.
- [4] KESSLER P., *Ueber Lochverwitterung und ihre Beziehungen zur Metharmose (Umbildung) der Gesteine*. « Geologische Rundschau », 1921.
- [5] KAYSER EMANUEL, *Lehrbuch der allgemeinen Geologie*. Bd. I, S. 310, Siebente und achte Auflage, Stuttgart 1923.
- [6] BOURCART J., *Le problème des taffoni de Corse et l'érosion alvéolaire*. « Rev. Géogr. phys. Géol. dyn. », III, 1, pp. 1-16.
- [7] POPOFF BORIS, *Die Tafoni – Verwitterungserscheinung*. « Acta Univ. Latviensis, Kim. Fak. », Ser. IV, 6, pp. 129-368, 16 planches, Riga, 1937.
- [8] LIGUS, *Problèmes géomorphologiques corses*. « Rev. Géom. Dyn. », III, n. 4, pp. 157-198, Paris 1952.
- [9] SCHULTZE LEONHARD, *Aus Namaland und Kalahari*. Jena 1907, S. 70.
- [10] KAISER ERICH, *Abhandlungen der Giessener Hochschulgesellschaft*. II. *Bericht über geologische Studien während des Krieges in Südwestafrika*. 1920.
- [11] KREJCI-GRAF K., *Lochverwitterung und Krustenbildung im Granit*. « Natur und Museum », Dezember 1932.
- [12] HÖGBOM BERTIL, *Wüstenerscheinungen auf Spitzbergen*. « Bull. Geol. Inst. », Uppsala, XI, 1911.
- [13] NORDENSKJÖLD O., *Från danska Sydvästrgrönland*. Ymer 1910; *Einige Züge der physikalischen Geographie der Entwicklungsgeschichte Südgrönlands*. « Geogr. Zeitschrift », 1914.
- [14 a] BLANCK E., *Verwitterungskundliche Studien zum Tafoni- und Karrenproblem im Mittelgebirge*. « Intern. Mitt. für Bodenkunde », IX, 1919, S. 233.
- [14 b] BLANCK E. u. PASSARGE S., *Die chemische Verwitterung in der ägyptischen Wüste*. Hamburger Univ. Abhandl. aus dem Gebiet der Auslandkunde, 1925.
- [15] WALTHER JOHANNES, *Das Gesetz der Wüstenbildung in Gegenwart und Vorzeit*. Leipzig, S. 161, 165, 171, 1934.
- [16] FISCHER WALTHER, *Verwitterungserscheinungen am Dresdener Zwinger*. « Natur und Museum », Bd. 57, Frankfurt a/M, November 1927.
- [17] FÜTTERER K., *Ein Beispiel für Winderosion am Heidelberg Schloss*. « Mitt. Gross. Bad. Geol. Landesanst. », III, pp. 473-496, 1897; *Ueber Windkorrosion am Heidelberg Schloss-turm*. « Mitt. Gross. Bad. Geol. Landesanstalt », III, pp. 471-495, 1899.
- [18] GUILCHER A., *Formes de décomposition chimique dans la zone des embruns et des marées sur les côtes britanniques et bretonnes*. Vol. Jubil. 50, Anniv. Lab. Géogr. Rennes, pp. 167-181, 1952.
- [19] CAILLEUX A., *Taffoni et érosion alvéolaire*. In Memoriam B. Popoff. (« Cahiers Géol. de Thoiry »), N. 16-17, 1953, p. 130.
- [20] CAYEUX L., *Description physique de l'île de Délos. Exploration archéologique de Délos*. in-4°, pp. 162-186, Paris 1911.
- [21] MATSCHINSKI M., *Formation des fissures primaires de l'écorce terrestre*. « Annali di Geofisica », vol. VII, 1954.

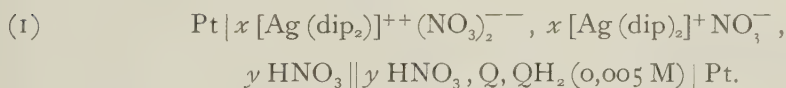
**Chimica.** — *Sul coefficiente di temperatura del potenziale di ossido-riduzione dei complessi dell'argento mono e bivalente con il dipiridile* (\*). Nota di EOLO SCROCCO e GIOVANNA MARMANI, presentata (\*\*) dal Socio G. B. BONINO.

In una Nota precedente <sup>(1)</sup> abbiamo misurato il potenziale di ossido-riduzione del sistema costituito dai due complessi dell'argento mono e bivalente con il dipiridile <sup>(2)</sup> trovando che, come accade di solito per altri ioni metallici, la formazione del complesso fa variare notevolmente il potenziale normale di ossido-riduzione dello ione.

Per una interpretazione completa del meccanismo di questo processo di ossido-riduzione ha importanza notevole, oltre alla conoscenza della variazione di energia libera  $\Delta F_0 = -n E_0 F$ , la conoscenza dell'effetto termico  $\Delta H_0 = \Delta F_0 - T \left( \frac{\partial \Delta F_0}{\partial T} \right)_p$  coinvolto nel cambiamento di valenza dello ione Ag del complesso.

Ci è sembrato pertanto utile ripetere le misure del potenziale di ossido-riduzione di questi complessi a due diverse temperature per ottenere il coefficiente termico della reazione.

Il metodo sperimentale adottato nel presente lavoro è quello di Carpenter <sup>(3)</sup> che, come è noto, permette di effettuare misure di una notevole precisione eliminando le incertezze sui potenziali di giunzione e sui coefficienti di attività. Nel nostro caso veniva fatta, alle due temperature di 25° e 5° rispettivamente, la misura della forza elettromotrice E di una cella del seguente tipo:



In tale cella, come si vede, abbiamo adottato come elettrodo di riferimento un elettrodo a chinidrone il cui potenziale normale è di 0,699 volt a 25° e di 0,714 volt a 5°.

Le due semicelle erano costituite da due recipienti del tipo di quelli di fig. 1 nei quali era fatta passare una corrente di azoto purificato prima attraverso pirogallolo e poi attraverso rame a circa 400° e reso di nuovo umido facendolo gorgogliare in una soluzione di HNO<sub>3</sub> della stessa acidità

(\*) Lavoro eseguito al Centro studi di Chimica fisica del C.N.R. presso l'Istituto chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.

(1) E. SCROCCO, G. MARMANI e P. MIRONE, « Boll. Scient. Facoltà di Chim. Ind. », VIII, 4, 119 (1950) Bologna.

(2) BARBIERI G. A., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16, 44 (1932).

(3) CARPENTER, « J. Am. Chem. Soc. », 56, 1847 (1934).



di quella contenuta nelle due semicelle. Le due semipile erano collegate da un tubo ad U avente le estremità in vetro poroso « Permax » e ripieno della stessa soluzione di acido nitrico contenuta nei due recipienti in modo da eliminare il più possibile i potenziali di giunzione. Il complesso era immerso, poi, in un termostato che stabilizzava la temperatura al valore voluto con una precisione di  $0,1^\circ\text{C}$ .

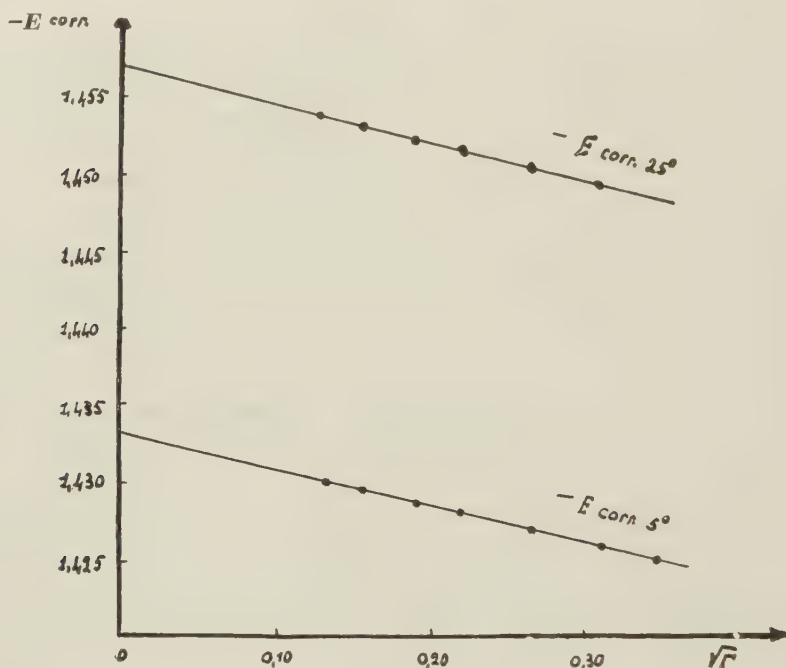


Fig. 1.

La reazione elettrochimica relativa alla (1) si scrive:



in cui, per semplicità di notazione, si è chiamato Q e  $\text{QH}_2$  il chinone e l'idrochinone e si è scritto  $\text{Ag}^+$  e  $\text{Ag}^{++}$  al posto di  $[\text{Ag}(\text{dip})_2]^+$  e  $[\text{Ag}(\text{dip})_2]^{++}$ . Pertanto la forza elettromotrice è:

$$(3) \quad E = E_0 - \frac{RT}{2F} \ln \frac{[\text{Ag}^{++}]^2 f_2^2 a_{\text{QH}_2}}{[\text{Ag}^+]^2 f_1^2 a_{\text{H}}^2 a_{\text{Q}}}$$

in cui  $f_1$ ,  $f_2$  sono i coefficienti di attività dello ione complesso monovalente e di quello bivalente.

Se si ricorda l'espressione limite della teoria di Debye-Huckel per i coefficienti di attività:

$$-\ln f_i = \frac{A}{\sqrt{2}} z_i^2 \sqrt{I}$$

in cui  $\Gamma = \sum_i c_i z_i^2$  è la forza ionica della soluzione, la (3) si può anche scrivere:

$$(4) \quad E - \frac{RT}{F} \ln a_{H^+} = E_o - \frac{RT}{F} \ln \frac{[Ag^{++}]}{[Ag^+]} + 3 \frac{RT}{F} \frac{A}{\sqrt{2}} \sqrt{\Gamma}$$

dove sono stati presi uguali tra loro i coefficienti di attività del Q e del  $QH_2$  0,005 M.

Pertanto, se si opera ad eguale concentrazione di complesso mono e bivalente, il secondo termine al secondo membro si annulla e si può ricavare  $E_o$  ripotando in un grafico il valore del primo membro della (4) in funzione della radice della forza ionica ed estrapolando poi per  $\sqrt{\Gamma} \rightarrow 0$ .

In pratica sono stati misurati, a ciascuna delle due temperature di 5° e 25°, i potenziali di alcune celle del tipo (1) per altrettanti valori della  $\sqrt{\Gamma}$  ottenuti diluendo volta a volta in maniera uguale tutti i componenti della cella. Inoltre il termine correttivo  $\frac{RT}{F} \ln a_{H^+}$  che compare a primo membro della (4) è stato calcolato facendo a parte la misura del potenziale della cella di riferimento a chindrone rispetto ad un elettrodo ad idrogeno.

I risultati delle misure sono riportati nella tabella I e nella fig. 2. Come si vede, dall'andamento pressoché rettilineo dei potenziali in funzione di  $\sqrt{\Gamma}$  l'estrapolazione a forza ionica nulla si presenta sufficientemente precisa e fornisce per il potenziale  $E_o$  i valori di -1,433 volt e -1,457 volt rispettivamente alle due temperature di 5° e 25°. Pertanto il coefficiente di temperatura cercato per la reazione (2) è di 0,0012 volt/grado.

Possiamo notare che il potenziale normale di ossido-riduzione alla temperatura di 25° trovato in questo lavoro per il sistema  $[Ag(dip)_2]NO_3$  e  $[Ag(dip)_2] (NO_3)_2$  differisce di solo 4 millivolt dal valor di -1,453 volt da noi trovato in un lavoro precedente in soluzione solforica confermando l'attendibilità del metodo di misura adottato.

I complessi dell'argento mono e bivalente adoperati per le misure sono stati gentilmente forniti dal prof. G. A. Barbieri che desideriamo ringraziare vivamente.

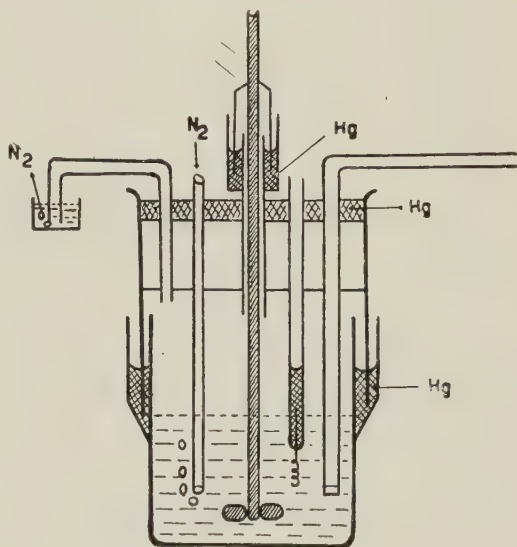


Fig. 2.

TABELLA I.

$y$ Gr. mol/litro sol.	$x$ Gr. mol/litro sol.	$\sqrt{I}$	$\frac{RT}{F} \ln H^+$	E (volt)	$E_{\text{corr.}}$ (volt)
<i>Misure effettuate a 25°.</i>					
0,04	0,002	$31,0 \times 10^{-2}$	— 0,0826	— 1,5324	— 1,4498
0,03	0,0015	26,8	— 0,0900	— 1,5412	— 1,4512
0,02	0,0010	21,9	— 0,1000	— 1,5521	— 1,4521
0,015	0,00075	18,4	— 0,1080	— 1,5611	— 1,4531
0,010	0,00050	15,5	— 0,1180	— 1,5715	— 1,4535
0,0075	0,00037	13,4	— 0,1250	— 1,5789	— 1,4540
<i>Misure effettuate a 5°.</i>					
0,04	0,002	$31,0 \times 10^{-2}$	— 0,0770	— 1,503	— 1,426
0,03	0,0015	26,8	— 0,0840	— 1,511	— 1,427
0,02	0,0010	21,9	— 0,0936	— 1,522	— 1,4284
0,015	0,00075	18,4	— 0,1005	— 1,5295	— 1,429
0,010	0,00050	15,5	— 0,1100	— 1,5395	— 1,4295
0,0075	0,00037	13,4	— 0,1160	— 1,5463	— 1,4303

Questo lavoro è stato eseguito nel Centro Studi di Chimica-fisica del C.N.R. diretto dal prof. G. B. Bonino che ringraziamo vivamente per l'interessamento e gli utili consigli prestati.

**Chimica organica.** - *Sintesi dell'acido  $\beta$  carbossil  $\gamma$  carbossimetilpimelico* (\*). Nota di PIERO PINO, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. NATTA.

Fra i prodotti derivanti dall'ossidazione cromica della «cevina» <sup>(1)</sup> e della «germina» <sup>(1)</sup> è stato isolato da L. C. Craig e W. A. Jacobs <sup>(2)</sup> un acido tetracarbossilico avente formula bruta  $C_{10}H_{14}O_8$  otticamente attivo.

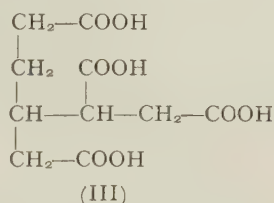
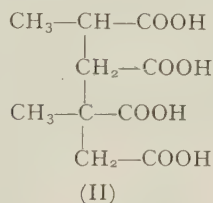
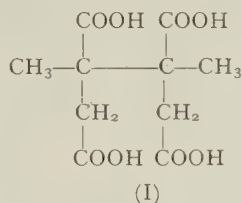
(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.

(1) Per notizie generali sulla «cevina» e sulla «germina» vedi per esempio L. FIESER e M. FIESER, *Natural products related to phenantrene*, New York, p. 600 (1949); H. BOITE, «Fortschritte der Alkalohyd-Chemie», seit 1933; Akademie Verlag, Berlin, p. 315 (1950).

(2) L. C. CRAIG e W. A. JACOBS, «J. Biol. Chem.», 129, 79 (1939).

Per tale acido sono state proposte numerose formule di struttura fra cui la (I) da Jacobs e coll. <sup>(2)</sup>, la (II) da L. Fieser e M. Fieser <sup>(3)</sup> e la (III) da Prelog, Jeger e coll. <sup>(4)</sup>.



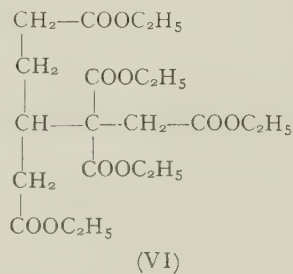
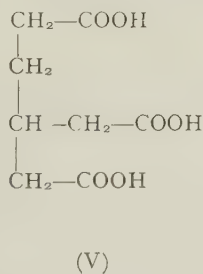
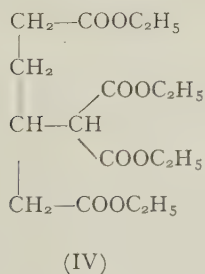
L'acido (I) venne sintetizzato da Huebner e Jacobs <sup>(5)</sup> e risultò diverso dal prodotto proveniente dall'ossidazione della « cevina ».

Nel presente lavoro viene descritta la sintesi dell'acido (III) che è peraltro risultato anch'esso di struttura diversa da quella del prodotto derivante dalla cevina.

I primi tentativi di sintesi furono diretti ad ottenere, per condensazione dell'estere etilico dell'acido buten-1-dicarbossilico 1,4, con malonato d'etile, l'estere etilico dell'acido  $\alpha$  carbossil  $\beta$  carbossimetiladipico (IV) che, condensato a sua volta con cloroacetato d'etile, avrebbe dovuto dar luogo all'estere etilico dell'acido  $\beta\beta$  dicarbossil  $\gamma$  carbossimetilpimelico (VI).

Il primo passaggio venne eseguito con successo operando secondo quanto descritto in un caso analogo da Farmer <sup>(6)</sup>. La struttura dell'estere (IV) ottenuto venne confermata preparando per saponificazione e parziale decarbossilazione l'acido  $\beta$  carbossimetiladipico ben descritto in letteratura <sup>(6)</sup> <sup>(7)</sup>.

Tutti i tentativi diretti a far reagire l'estere (IV) così ottenuto con cloroacetato d'etile in presenza di etilato sodico per ottenere l'estere dell'acido  $\beta\beta$  dicarbossil  $\gamma$  carbossimetilpimelico (V) rimasero invece senza risultato;



(3) L. FIESER e M. FIESER, loc. cit., p. 606.

(4) N. ELMING, Ch. VOGEL, O. JEGER e V. PRELOG, « *Helv. Chim. Acta* », 35, 2541 (1952). Mentre il presente lavoro era in corso gli stessi autori (« *Helv. chim. Acta* », 36, 2022 (1953)) in base a considerazioni sulla reazione di Kuhn-Roth eseguita sull'acido  $\beta$ -metiltricarbalilico e sulla chetoanidride  $\text{C}_9\text{H}_{10}\text{O}_4$  dell'acido esantetracarbossilico proveniente dall'ossidazione della « cevina », affermarono che la formula (III), da essi stessi proposta, era da scartare.

(5) C. F. HUEBNER e W. A. JACOBS, « *J. Biol. Chem.* », 170, 181 (1947).

(6) E. H. FARMER, « *J. Chem. Soc.* », 123, 3329 (1923).

(7) H. KILIANI, « *Ber* », 62, 640 (1929); C. K. INGOLD, « *J. Chem. Soc.* », 127, 1205 (1925); E. H. FARMER e L. A. HUGES, « *J. Chem. Soc.* », (1934), 1938.



infatti in condizioni blande la reazione non avviene ed in condizioni più energiche si sono potuti isolare oltre al prodotto di partenza soltanto prodotti chetonici.

Migliori risultati si sono avuti invece condensando l'estere etilico dell'acido buten-1-dicarbossilico 1,4 con l'etantricarbossilato di etile in presenza di etilato sodico. Venne in tal modo ottenuto, sebbene con basse rese, l'estere etilico (VI) che saponificato con HCl diluito, a 180°, si decarbossila parzialmente dando luogo all'acido (III) a p. f. 159°-160°.

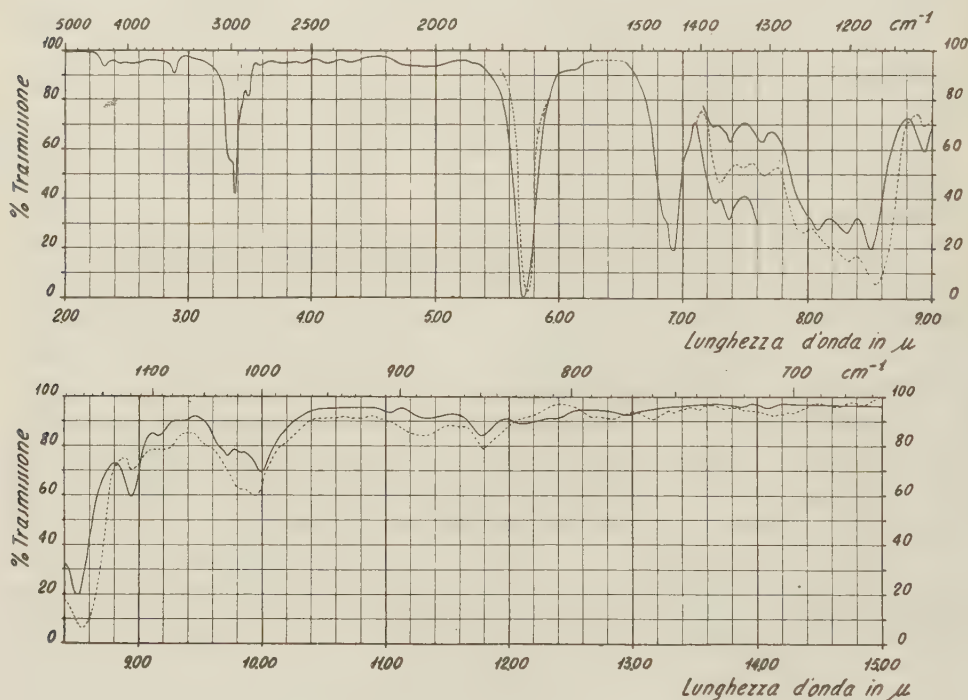


Fig. 1. - Spettro I. R. dell'estere metilico dell'acido  $\beta$  carbossil  $\gamma$  carbossimetilpimelico (---) in soluzione di  $\text{CS}_2$  e dell'estere metilico dell'acido esantetracarbossilico (—) ottenuto per ossidazione della «cevina», in  $\text{CCl}_4$  fra 2 e 7,5  $\mu$  in  $\text{CS}_2$  fra 7,2 e 15  $\mu$ .

Lo spettro I. R. (fig. 1) in soluzione di  $\text{CS}_2$  dell'estere metilico dell'acido (VI) appare molto diverso da quello dell'estere metilico dell'acido otticamente attivo ottenuto per ossidazione della «cevina» al quale compete quindi una formula di struttura diversa dalla (III).

Ringrazio il dott. O. Jeger del Politecnico di Zurigo per la discussione dei risultati e per l'aiuto prestatomi nel corso di questa ricerca.

PARTE SPERIMENTALE. - I punti di fusione non sono corretti; le analisi dei prodotti descritti ai paragrafi 4 e 6 furono eseguite nel Laboratorio microanalitico dell'Istituto di Chimica Organica del Politecnico di Zurigo, le rimanenti analisi vennero eseguite all'Istituto «Donegani» di Novara.

1° Acido buten-1-dicarbossilico 1,4. - g 30 di  $\beta$  formilpropionato di metile (p. eb. 72° a 10 mm Hg) e g 30 di acido malonico vengono sciolti

in 40 g di piridina anidra. Si riscalda a bagno maria finché cessa completamente lo sviluppo di  $\text{CO}_2$ . Si distilla la massima parte della piridina e si saponifica con KOH al 20%, il mono-estere dell'acido diidromuconico ottenuto. Per acidificazione con HCl concentrato si ottiene un precipitato bianco di acido buten-1-dicarbossilico 1,4 e cloruro potassico. Dopo lavaggio con  $\text{H}_2\text{O}$  si ottengono g 10 di acido buten-1-dicarbossilico 1,4. Dopo ripetute cristallizzazioni da  $\text{H}_2\text{O}$  esso ha p. f.  $187^\circ\text{--}190^\circ$ . In letteratura accanto al dato di Carrère<sup>(8)</sup> notevolmente più alto ( $208^\circ\text{--}210^\circ$ ) si hanno dati più recenti<sup>(7)</sup> assai vicini ( $191^\circ$ ) a quello trovato.

Analisi	trov. % :	C 49,53	;	H 5,52
per $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_4$	calc. % :	C 50,0	;	H 5,59.

Peso equivalente per neutralizzazione con NaOH 0,1 N

	trov. :	72,5
per $\frac{\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_4}{2}$	calc. :	72,06.

2° *Estere etilico dell'acido buten-1-dicarbossilico 1, 4.* — 12 g di acido buten-1-dicarbossilico 1,4 vengono sciolti in 40 g di alcool etilico assoluto. Si aggiungono 0,5 cm<sup>3</sup> di HCl conc. e 60 g di benzolo e si rettifica la miscela ottenuta in una colonnina di circa 7 piatti teorici. Si ottengono g 15 di estere etilico dell'acido buten-1-dicarbossilico 1,4 a p. eb.  $139^\circ$  a 21 mm Hg.  $n_D^{20} = 1,4503$ .

Peso equivalente per saponificazione con NaOH 0,1 N

	trov. :	100,2
per $\frac{\text{C}_{10}\text{H}_{16}\text{O}_4}{2}$	calc. :	100,1.

3° *Condensazione dell'estere etilico dell'acido buten-1-dicarbossilico 1,4 con malonato di etile; estere etilico dell'acido  $\alpha$  carbossil  $\beta$  carbossimetiladipico.* — Ad una soluzione di etilato sodico ottenuta sciogliendo g 1,52 di Na in 50 cm<sup>3</sup> di alcool etilico assoluto si aggiungono g 11 di malonato d'etile e quindi a temperatura ambiente g 11,5 dell'estere etilico dell'acido buten-1-dicarbossilico 1,4.

Si lascia riposare due giorni a temperatura ambiente, si svapora a pressione ridotta la maggior parte dell'alcool e si riprende con acqua. Si separa così uno strato oleoso che viene estratto con etere. La soluzione eterea si lava con  $\text{H}_2\text{O}$  fino a scomparsa della reazione alcalina e si secca con  $\text{MgSO}_4$ . Dopo aver svaporato l'etere, il residuo viene distillato a 0.6 mm Hg. Si ottiene una frazione a p. eb.  $159^\circ\text{--}161^\circ$  (6 g) corrispondente all'estere etilico dell'acido  $\alpha$  carbossil  $\beta$  carbossimetiladipico.

Peso equivalente per saponificazione con NaOH 0,1 N

	trov. :	89,7
per $\frac{\text{C}_{17}\text{H}_{28}\text{O}_6}{4}$	calc. :	90,1.

(8) E. CARRÈRE, « Ann. Chim. », 9, 17, 111 (1922).

4° *Acido  $\beta$  carbossimetiladipico*. - g 0,5 dell'estere etilico dell'acido  $\alpha$  carbossil  $\beta$  carbossimetiladipico vengono riscaldati per 8 ore in tubo chiuso con 5 cm<sup>3</sup> di HCl 0, 5 N. Per evaporazione si ottiene un residuo oleoso che viene ripreso con acetone. Dalla soluzione acetonica cristallizza per aggiunta di etere un solido che, ricristallizzato più volte da acetone, fonde a 123°-124° (letteratura 122°-123°<sup>(7)</sup>).

Analisi	trov.°/o :	C	46,78	;	H	5,90
per C <sub>8</sub> H <sub>12</sub> O <sub>6</sub>	calc.°/o :	C	47,06	;	H	5,92.

Peso equivalente determinato per neutralizzazione con NaOH 0,1 N

	trov. :	68,2
per $\frac{C_8H_{12}O_6}{3}$	calc. :	68,05

5° *Condensazione dell'estere etilico dell'acido buten-1-dicarbossilico 1-4 con etantricarbossilato di etile*. *Estere etilico dell'acido  $\beta\beta$  dicarbossil  $\gamma$  carbossimetilpimelico*. - Ad una soluzione di etilato sodico ottenuta sciogliendo g 0,23 di Na in 10 cm<sup>3</sup> di alcool etilico assoluto si aggiungono g 3 di etantricarbossilato di etile e successivamente g 1,7 dell'estere etilico dell'acido buten-1-dicarbossilico 1,4. Si lascia riposare la soluzione per tre giorni; si svapora l'alcool a pressione ridotta e si riprende il residuo con acqua. Si separano delle gocce oleose che vengono estratte con etere e lo strato eterico si secca con MgSO<sub>4</sub>. Si svapora l'etere e, per distillazione del residuo, si ottengono g 1,2 di prodotto e p. eb. 193° a 0,4-0,5 mm. Hg;  $n_D^{20}=1,4559$ .

Analisi	trov.°/o :	C	56,41	;	H	7,18
per C <sub>21</sub> H <sub>34</sub> O <sub>10</sub>	calc.°/o :	C	56,49	;	H	7,67.

Peso equivalente determinato per saponificazione con KOH 0,5 N

	trov. :	89
per $\frac{C_{21}H_{34}O_{10}}{5}$	calc. :	89,29.

6° *Acido  $\beta$  carbossil  $\gamma$  carbossimetilpimelico*. - g 0,5 dell'estere etilico dell'acido  $\beta\beta$  dicarbossil- $\gamma$  carbossimetilpimelico vengono riscaldati per 8 ore a 180° con 10 cm<sup>3</sup> di HCl 0,5 N in tubo chiuso. Dopo raffreddamento la soluzione viene estratta in modo continuo con etere per 4 giorni. L'estratto eterico viene quindi seccato con MgSO<sub>4</sub> e quindi l'etere viene svaporato. Il residuo viene ripreso con poco acetone ed etere. Dopo qualche giorno si formano dei cristallini bianchi (100 mg circa) che ricristallizzati più volte da etere e acetone fondono a 159°-160°.

Analisi	trov.°/o :	C	45,80	;	H	5,38
per C <sub>10</sub> H <sub>14</sub> O <sub>8</sub>	calc.°/o :	C	45,81	;	H	5,38.

Peso equivalente per neutralizzazione con NaOH 0,1 N

	trov. :	66,1
per $\frac{C_{10}H_{14}O_8}{4}$	calc. :	65,5.

Punto di fusione in miscela con l'acido esantetracarbossilico naturale ottenuto (p. f. 158°) per ossidazione della « cevina » secondo Jacobs e Craig: 148°-150°.

7° *Estere metilico dell'acido  $\beta$  carbossil  $\gamma$  carbossimetilpimelico*. — A mg 70 dell'acido  $\beta$  carbossil  $\gamma$  carbossimetilpimelico sciolti in etere si aggiunge una soluzione di diazometano in etere in eccesso. Si svapora il diazometano non reagito e l'etere a pressione ridotta e si distilla l'estere ottenuto. P. eb. 150°-155° a 0.2 mm Hg;  $n_D^{20} = 1.459$ .

Analisi	trov. % :	C	52,72	;	H	7,25
per $C_{14}H_{22}O_8$	calc. % :	C	52,81	;	H	6,96

Lo spettro I. R. venne misurato con uno spettrofotometro Beckmann I. R. Le misure vennero eseguite sull'estere di sintesi sciolto in  $CS_2$  (3.51 % in peso) e sull'estere ottenuto dall'ossidazione della « cevina » (p. f. 64-65) sciolto sia in  $CS_2$  (3.71 % in peso) che in  $CCl_4$  (5% in peso).

Ringrazio l'ing. Mantica e la dott.ssa Bicelli per l'esecuzione delle misure e la discussione dello spettro.

**Citogenetica vegetale.** — *Sull'azione citologica di cumarine sostituite in rapporto alla loro struttura chimica* <sup>(\*)</sup>. Nota di ELDA QUERCIOLI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio A. CHIARUGLI.

Nel quadro degli studi sull'attività mutagenica di alcuni composti chimici e sulla relazione tra la loro struttura e gli effetti citologici, rientrano le ricerche che ho intrapreso da tempo sull'azione di alcune cumarine sostituite, e delle quali riferisco in questa Nota alcune osservazioni preliminari: esse dimostrano quanto ancora interessante e tutt'altro che esaurito sia questo particolare campo di ricerca, che riguarda lo studio del processo mutativo su basi fisiologiche.

Un primo effetto della cumarina è la sua azione c-mitotica, che fu segnalato da Cornman <sup>(1)</sup>, in base a studi fatti su apici radicali di *Allium Cepa* e di *Lilium longiflorum*. Lo studio di questa sostanza fu poi ripreso da Östergren <sup>(2)</sup> che ne mise in rilievo altri effetti ben più importanti, e cioè la sua capacità ad indurre agglutinazioni (effetto stickiness) e mutazioni cromosomiche (effetto mutageno). Significativo tra i tipi di aberrazione cromosomica indotti dalla

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Firenze. Pubblicazione n. 157 del Centro di Studio per la Citogenetica Vegetale del C.N.R., Firenze.

(\*\*) Nella seduta dell'8 maggio 1954.

(1) I. CORNMAN, *The responses of onion and lily mitosis to coumarin and parasorbic acid*. « Journ. Exper. Biol. », 23, 292-297 (1947).

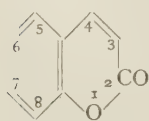
(2) G. ÖSTERGREN, *Chromosome bridges and breaks by coumarin*. « Botaniska Notiser », 4, 376-380 (1948).



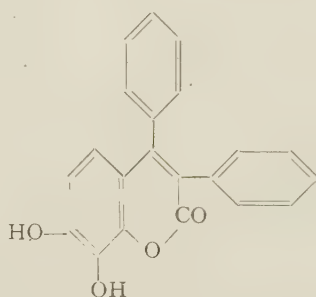
cumarina è decisamente lo pseudochiasma, illustrato da Levan e Tjio <sup>(3)</sup> in seguito all'azione di fenoli e di fenilamine.

Ho sperimentato la cumarina e dieci suoi derivati:

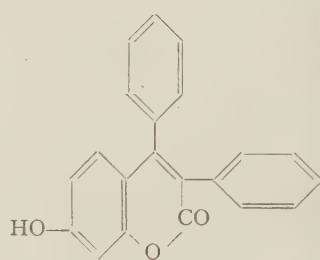
3-4-difenil-7-8-diossicumarina (difenildafnetina); 3-4-difenil-7-ossicumarina (difenilumbelliferone); 3-acetilcumarina; 6-clorocumarina; 4-metilcumarina; 5-metilcumarina; 6-metilcumarina; 7-metilcumarina; 7-metossicumarina; 4-metilumbelliferone (4-metil-7-ossicumarina), fornitemi dal professor Guido Bargellini, che vivamente ringrazio.



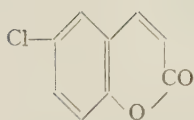
Cumarina



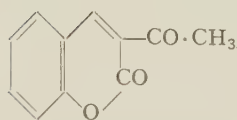
3-4-difenil-7-8-diossi-cumarina  
(Difenildafnetina)



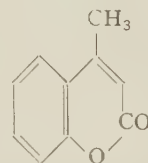
3-4-difenil-7-ossi-cumarina  
(Difenilumbelliferone)



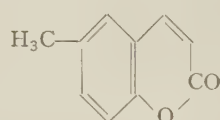
6-cloro-cumarina



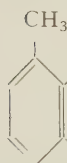
3-acetilcumarina



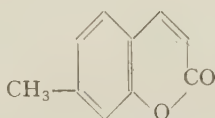
4-metilcumarina



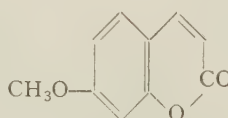
6-metilcumarina



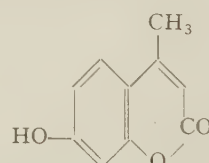
5-metilcumarina



7-metilcumarina



7-metossicumarina



4-metilumbelliferone

Il testo biologico usato è il medesimo adoperato da tutti gli Autori in tali esperimenti di citogenetica: radici di bulbi di *Allium Cepa* L. in cultura acquosa di 2-3 cm. di lunghezza. Per alcune cumarine sostituite, insolubili o quasi in acqua, le soluzioni sono state preparate secondo il metodo di Patton e Nebel <sup>(4)</sup> versando goccia a goccia in una quantità di acqua mantenuta in agitazione una soluzione alcoolica concentrata della sostanza fino ad otte-

(3) A. LEVAN e H. J. TJIO, *Induction of chromosome fragmentation by phenols*. « Hereditas », 34, 453-484 (1948).

(4) R. L. PATTON e B. R. NEBEL, *Preliminary observations on physiological effects of certain hydrocarbons on plant tissues*. « Amer. Journ. Bot. », 27, 609-613 (1940).

nere un precipitato. Dopo 24 ore la soluzione filtrata è stata usata per le successive diluizioni. Questo metodo è stato usato per il difenilumbelliferone, la difenildafnetina, e la 6-clorocumarina. Per i composti solubili sono state usate le concentrazioni molecolari. Le esperienze sono state condotte nell'inverno e nella primavera del 1954. I controlli citologici sono stati eseguiti su materiale preparato secondo la tecnica dello striscio al Feulgen.

Gli effetti provocati dalle cumarine sostituite da me studiate sono sostanzialmente rappresentati, per ciò che riguarda l'azione mutagenica, dalla formazione di ponti cromosomici e cromatidici, da frammentazione — frequenti i « rings » — e soprattutto dagli pseudochiasmi. Frequenti sono anche nei cromosomi i fenomeni di erosione parziale, che può arrivare a far loro assumere una tipica struttura a perla, come hanno osservato Levan e Tjio <sup>(5)</sup> in seguito all'azione di fenoli e D'Amato in seguito all'azione di alcune acridine <sup>(6)</sup>.

Si nota inoltre un effetto di agglutinazione cromosomica (« stickiness ») rilevabile durante tutto il corso delle mitosi e che spesso si manifesta anche con la formazione di uno o di moltissimi ponti (« sticky »). Fenomeni generali sono la induzione di c-mitosi, e, durante la ripresa in acqua dopo circa due giorni di trattamento, anche la formazione di c-tumori.

I risultati sopra esposti sono essenzialmente analoghi a quelli già descritti da Östergren <sup>(7)</sup> per la cumarina, purché la molecola non sia appesantita sul suo anello lattonico dalla presenza di due gruppi fenilici, come ho notato per il Difenilumbelliferone e per la Difenildafnetina, che hanno dato praticamente solo un leggerissimo effetto c-mitotico.

Per la Difenildafnetina sono state provate le concentrazioni satura, mezza satura, e 1/4 satura: si notano un leggero effetto c-mitotico ed uno scarsissimo effetto di agglutinazione dopo 24 ore fino al 3° giorno di trattamento, nel quale si osserva l'arresto completo delle mitosi.

Per il Difenilumbelliferone sono state provate le concentrazioni satura e mezza satura con induzioni di c-mitosi soltanto dopo 4 e 8 ore di trattamento. Nella ripresa in acqua di questi due composti non ho mai osservato la formazione di c-tumori.

Anche la presenza di un radicale acetilico (3-acetilcumarina) in posizione 3 annulla l'attività mutagenica della cumarina conferendo al composto un'azione esclusivamente tossica, come si può notare dopo 24 ore di trattamento per la soluzione satura e dopo 2 giorni per la mezza satura. La ripresa in acqua è possibile in tutti e due i casi: nessun segno di effetto mutageno.

Altra connessione tra attività mutagenica e struttura molecolare è rappresentata dalla introduzione di un atomo di cloro nella molecola, come se la presenza dell'alogeno agisse da inattivante affievolendo sensibilmente l'attività mutagenica della cumarina: questo reperto è evidentemente in rapporto

(5) LEVAN e TJIO, op. cit.

(6) F. D'AMATO, *Studio statistico dell'attività mutagenica dell'acridina e derivati*. « Caryologia », II, 229-297 (1950).

(7) G. ÖSTERGREN, op. cit.

col fatto messo in luce da Mayer ed Evenari<sup>(8)</sup> che la capacità di inibizione della germinazione dei semi, caratteristica delle cumarine, è distrutta dalla introduzione dell'atomo di cloro sia nel nucleo benzenico sia nell'anello lattonico. Anche nelle acridine l'introduzione del cloro abolisce l'attività mutagena<sup>(9)</sup>.

Per la 6-clorocumarina è stata provata la seguente scala di concentrazioni: 1; 0,5; 0,25; 0,125 mM/l, delle quali soltanto la prima ha provocato un leggero effetto mutageno sia dopo 4 sia dopo 8 ore; dopo 24 ore di esposizione si osserva l'arresto delle mitosi seguito da normale ripresa in acqua: l'effetto frammentatore è scarsissimo. Le altre concentrazioni hanno provocato soltanto una inibizione della mitosi.

L'introduzione del radicale metilico in posizione 4; 5; 6 e 7 nella molecola della cumarina porta invece un'accentuazione dell'« effetto fisiologico » e dell'effetto mutageno rispetto alla cumarina, indipendentemente dalla posizione da esso occupata.

Per la 4-metilcumarina la concentrazione 1 mM/l ha provocato soprattutto un effetto tossico più che mutageno: infatti dopo 8 ore si è avuto quasi il completo arresto di mitosi; nella ripresa in acqua si formano c-tumori dopo 2 giorni e si verifica una intensa azione frammentatrice (sono state notate metafasi con più di 40 frammenti) che si prolunga per circa 5 giorni. L'effetto mutageno e l'effetto fisiologico più forti sono stati ottenuti con la concentrazione di 0,5 mM/l dopo 4-8 ore, e così pure l'azione frammentatrice che segue la ripresa in acqua è stata in questo caso più intensa che per la concentrazione satura.

Intendo come effetto forte la presenza di circa il 90 % di mitosi in vario modo aberranti; come effetto medio quello del 50 %, come effetto debole quella del 20 %.

Per la 5-metilcumarina è stato riscontrato un effetto fisiologico e mutageno di entità maggiore che per tutte le altre metilderivate. Le concentrazioni che hanno indotto dopo 4 e 8 ore di trattamento gli effetti più intensi sono la 1 mM/l e la 0,5 mM/l. Nella ripresa in acqua si è avuto per ambedue i casi la formazione di c-tumori ed una intensissima frammentazione, come per la 4-metilcumarina. La concentrazione di 0,125 mM/l segna il valore limite dell'attività mutagena.

Per la 6-metilcumarina è da notare nella soluzione di 1 mM/l dopo 4 ore un arresto delle profasi e delle metafasi; non molto rilevante è l'effetto stickiness e quasi assenti sono gli pseudochiasmi. Nella soluzione seguente (0,5 mM/l) numerosissimi ponti da « sticky »; più intensa è anche l'attività mutagena della concentrazione satura. Nella ripresa in acqua dopo 2 giorni di trattamento si osservano c-tumori e scarso effetto frammentatore. Il valore limite dell'attività mutagena per questo composto è di 0,125 mM/l.

(8) A. M. MAYER e M. EVENARI, *The Relation between the Structure of Coumarin and its Derivatives, and their Activity as Germinations Inhibitors*. « Journ. Experim. Botany », 3, 246-252 (1952).

(9) F. D'AMATO, *The chromosome breaking activity of chemical as studied by the « Allium Cepa. » Test*. « Pubbl. della Staz. Zool. di Napoli », 22 (Suppl.): 158-170 (1950).

Anche per la 7-metilcumarina le soluzioni efficaci sono la 1 mM/l e la 0,5 mM/l, delle quali tanto l'attività mutagena quanto l'effetto fisiologico sono stati di media entità. Dopo 2 giorni di trattamento, la ripresa in acqua dà c-tumori ed effetto frammentatore. Il valore limite dell'attività mutagena da me riscontrato è di 0,0625 mM/l.

Il comportamento della 7-metossicumarina della quale sono state sperimentate le soluzioni 1; 0,5; 0,25 mM/l è pressoché analogo a quello della 7-metilcumarina, probabilmente per la medesima posizione occupata dai radicali  $-\text{CH}_3$  e  $-\text{O}-\text{CH}_3$ , anche se di natura diversa.

Per il 4-metilumbelliferone ho notato un parallelismo con la 4-metilcumarina nell'intensità degli effetti ottenuti nella soluzione 1 mM/l. Gli effetti citologici sono analoghi a quelli delle metil-derivate sopra descritte. Il valore limite dell'attività mutagena di questo composto è di 0,0313 mM/l.

Come conclusioni generali preliminarmente tratte dal comportamento dei composti da me sperimentati, si può notare che durante il trattamento si ha soprattutto, a parte la c-mitosi, la formazione di pseudochiasmi, mentre nella ripresa in acqua l'effetto mutageno è essenzialmente rappresentato da frammentazione.

Infine non ho mai notato rotture nella ripresa in acqua, se già precedentemente, durante le ore di esposizione, il composto sperimentato non aveva indotto minimamente né un effetto di agglutinazione né un effetto mutageno.

**Fisiologia vegetale.** — *Trasporto di idrogeno all'ossigeno per la via ossidoriduttiva: trifosfopiridinnucleotide-glutatione-ascorbico in estratti di « Pisum sativum »*<sup>(\*)</sup>. Nota di ERASMO MARRÈ e GIANNINO LAUDI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio S. TONZIG.

L'esistenza nelle piante superiori di sistemi deidrogenasici a trifosfopiridinnucleotide (TPN) è stata dimostrata da diversi autori (Anderson et al. <sup>(1)</sup>; Axelrod e Bandurski <sup>(2)</sup>; Arnon <sup>(3)</sup>, ecc.). In particolare, la caratteristica ricchezza in deidrogenasi a TPN nei tessuti in attiva crescita di pisello (*Pisum sativum*) è stata documentata da Marrè e Servetaz <sup>(4)</sup>. Conn e Vennesland <sup>(5)</sup> hanno recentemente dimostrato la comune presenza, negli organismi vegetali, oltre che di diversi enzimi a TPN, dell'enzima che tra-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta dell'8 maggio 1954.

(1) D. G. ANDERSON, H. A. STAFFORD, E. E. CONN, B. VENNESLAND, « Plant. Physiol. », 27, p. 675 (1952).

(2) B. AXELROD e A. S. BANDURSKI A. S., « Fed. Proc. », 11, p. 182 (1952).

(3) D. I. ARNON, « Science », 116, p. 635 (1952).

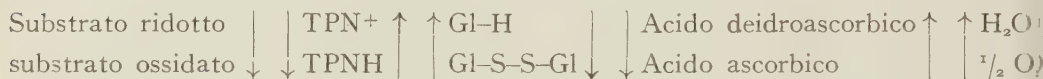
(4) E. MARRE e M. SERVETTAZ, « Rend. Acc. Lincei » 1954 in corso di stampa.

(5) E. E. CONN e VENNESLAND B., « Journ. Biol. Chem. », 192, p. 17 (1951).



sporta l'idrogeno dal TPN al glutatione ossidato. Yamaguchi e Joslin<sup>(6)</sup> hanno rilevato l'abbondanza, negli apici caulinari di pisello, dell'ascorbico riduttasi, enzima che catalizza la riduzione dell'ascorbico ossidato a spese del glutatione ridotto. Infine, la generale diffusione dell'ascorbico ossidasi, nei più diversi tessuti vegetali, è un fatto da tempo noto.

Questo complesso di dati suggerisce che una parte di non secondaria importanza possa spettare, nel metabolismo respiratorio della pianta superiore, ad una via ossidoriduttiva che medi il trasporto dell'idrogeno da diversi substrati respiratori all'ossigeno attraverso la catena:



Catena ossidoriduttiva la cui esistenza, specie per quanto riguarda glutatione e ascorbico, era stata intuita già da Szent Gyorgy, ma la cui reale esistenza e importanza metabolica è stata, da allora, oggetto di numerose controversie, tuttora in atto.

Nelle esperienze qui riferite abbiamo tentato di dimostrare l'esistenza di questa via ossidoriduttiva in tessuti di una pianta superiore, studiando questa serie di reazioni sia nel suo aspetto globale, per cui, in un sistema in cui tutti i vari anelli siano simultaneamente operanti, l'idrogeno staccato dai diversi substrati attaccabili da deidrogenasi a TPN viene trasferito sull'ossigeno, o, in assenza di questo, sull'acido deidroascorbico, sia decomponendo detta catena di reazioni nei suoi singoli anelli.

I risultati raggiunti sono decisamente positivi per la presenza, nella pianta, della catena di reazioni sopra menzionate; anzi ci sembra ne sottolineino la particolare efficienza e suggeriscano problemi di notevole interesse circa il suo possibile significato funzionale.

#### MATERIALE E METODI.

Come sorgente di enzimi abbiamo utilizzato la porzione apicale (gemma, foglioline e tratto apicale del fusticino) di piantine eziolate di pisello coltivate in vermiculite e all'oscurità, a 25 gradi C., per un periodo di 6-10 giorni. I tessuti, appena raccolti, venivano tritati in mortaio con sabbia di quarzo, in presenza di 4 volumi di tampone ai fosfati, 0,05 M, pH 6,8; quindi filtrati su garza e centrifugati a circa 800×g., onde eliminare il residuo costituito da amido, membrane, cellule integre; e l'estratto grezzo così ottenuto veniva, a seconda dei casi, e come indicato per le diverse esperienze, usato talora senza ulteriore purificazione, talora centrifugato, in centrifuga refrigerata, per 15 minuti primi a 20.000×g., allo scopo di eliminare la porzione mitocondriale del plasma, talora, infine, dializzato per 48 ore in camera fredda contro tampone ai fosfati frequentemente rinnovato.

(6) YAMAGUCHI e M. A. JOSLIN, « Plant. Physiol. », 26, p. 757 (1951).

L'attività delle diverse deidrogenasi a TPN è stata determinata mediante la tecnica colorimetrica al cloruro di trifenil tetrazolio (TTC), nelle condizioni prospettate da Marrè e Servettaz <sup>(7)</sup>. Il contenuto in acido ascorbico nei tessuti come negli estratti è stato determinato secondo Tillmans e Hirsh <sup>(8)</sup>.

Nelle esperienze condotte in assenza di ossigeno, le provette contenenti l'incubato venivano disposte in un essiccatore che veniva evacuato mediante un'efficiente pompa ad olio. Al termine della reazione la riossidazione dell'acido ascorbico ridotto veniva bloccata da immediata aggiunta di un volume di acido metafosforico 5 %.

Come reagenti abbiamo usato: acido malico «CIBA», acido isocitrico e piruvato di sodio «Bios», glucosio-6-fosfato, TPN e difosfopiridinnucleotide (DPN) «Sigma», acido ascorbico «Roche» e cloruro di trifeniltetrazolio (TTC) Merck. Tutte le soluzioni venivano portate al pH voluto subito prima dell'uso. Il glucosio-6-fosfato, fornito come sale di bario, veniva trasformato in sale sodico mediante aggiunta di solfato di sodio in lieve eccesso, ed allontanamento del solfato di bario per centrifugazione. L'acido deidroascorbico è stato da noi preparato dall'acido ascorbico (in soluzione 2 %) per ossidazione mediante la quantità richiesta di bromo, allontanamento mediante lavaggio con aria della piccola quantità di bromo in eccesso, e neutralizzazione con NaOH fino a pH 6.

#### ESPERIENZE E RISULTATI.

##### A) *Presenza nel materiale usato dei diversi componenti il sistema in esame.*

Il materiale usato, e cioè la porzione apicale di piantine di pisello, era stata scelta per la sua ricchezza in enzimi a TPN (Marrè e Servettaz) e in ascorbico riduttasi (Yamaguchi e Joslin). Degli altri componenti il sistema, l'alto tenore in TPN è risultato dall'efficacia con cui estratti grezzi di questo materiale, bolliti per un minuto, attivano l'ossidazione del glucosio-6-fosfato o dell'isocitrato da parte di estratti dializzati; quello in glutatione è facilmente dimostrabile, su filtrato, mediante la reazione al nitroprussiato o al ferricianuro (Mirsky A. E. e Anson M. L. <sup>(9)</sup>).

Il contenuto in acido ascorbico nei tessuti considerati è risultato di circa il 0,5 %.

Per quanto riguarda la presenza dell'ultimo degli enzimi coinvolti nella serie di reazioni qui studiate e cioè l'ascorbico ossidasi, la sua elevata attività in questo materiale risulta dai dati della tabella I.

(7) E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, «Giorn. di Biochimica», 1954, in corso di stampa.

(8) J. TILLMANS, P. HIRSCH, und W. HIRSCH, «Z. Untersuch. Lebensm.», 63, p. 1 (1932).

(9) A. E. MIRSKY e M. L. ANSON, «J. Gen. Physiol.», 19, p. 429 (1935).

TABELLA I.

*Ossidazione enzimatica dell'acido ascorbico in estratti grezzi e dializzati di apici caulinari di pisello.*

Composizione dell'incubato: tessuto 40 % (dializzato) e 20 % (grezzo); tampone ai fosfati 0,05 M, pH 6,0; acido ascorbico 200  $\gamma$  per cc. temperatura 18 gradi C.

Tempi	$\gamma$ acido ascorbico ritrovato	
	Estratto dializzato	Estratto grezzo
0. . . . .	185	216
dopo 20 min. primi. . . . .	160	130
dopo 40 min. primi. . . . .	94	92
dopo 60 min. primi. . . . .	14	80
dopo 90 min. primi. . . . .	8	36
dopo 180 min. primi. . . . .	3	6
0 (estratto bollito) . . . . .	205	204
dopo 180 min. primi (estratto bollito). . . . .	170	170

B) *Riduzione dell'acido deidroascorbico mediante idrogeno proveniente da substrati respiratori.*

I dati della tabella II, rappresentativi dei risultati di numerose serie di esperienze, dimostrano che:

1° in presenza di piccole quantità di glutatione una limitata frazione di deidroascorbico viene ridotta ad opera, secondo ogni evidenza, della ascorbico riduttasi. Quest'effetto non è sensibilmente variato dall'aggiunta di TPN.

2° l'aggiunta al sistema di substrati attaccabili da deidrogenasi a TPN (malato, glucosio-6-fosfato, isocitrato) determina un'ingente riduzione di deidroascorbico, notevolmente maggiore di quella stechiometricamente consentita da una ossidazione, anche totale, del glutatione presente. Quest'effetto si osserva esclusivamente in presenza di TPN;

3° l'aggiunta di glutatione, mentre aumenta in misura molto ridotta la riduzione del deidroascorbico in estratti non dializzati (in presenza di substrati di deidrogenasi a TPN), per contro si rivela altamente efficace in estratti dializzati; ciò che sembra doversi interpretare nel senso che tale composto, negli estratti grezzi, si trova già originariamente in tenore vicino a quello ottimale, per quanto riguarda la serie di reazioni qui considerate;

4° l'aggiunta di substrati di deidrogenasi a DPN, come il piruvato, pure facilmente ossidabile da parte di questi estratti, non determina alcuna riduzione dell'acido deidroascorbico;

5° in nessun caso estratti bolliti, e addizionati dei diversi fattori, riducono l'acido deidroascorbico.

TABELLA II.

*Riduzione dell'acido deidroascorbico da parte di estratti, grezzi e dializzati, addizionati di tutti o parte dei fattori della via ossidoriduttiva: TPN-glutatione-ascorbico.*

Composizione dell'incubato: tessuto, 20 % (estratto grezzo) o 40 % (estratto dializzato); acido deidroascorbico  $\gamma$  500; tampone ai fosfati pH 6,8. Altri componenti, quando presenti: glucosio-6-fosfato (Gl-6-P) 2 mg/cc, isocitrato, malato e piruvato 0,02 M; TPN 20  $\gamma$ /cc; DPN 250  $\gamma$ /cc; glutatione 100  $\gamma$ /cc. Volume finale 1,5 cc. Temperatura 18 gradi C. Incubazione sotto vuoto.

Addenda	Incremento in acido ascorbico in $\gamma$ in 2 ore	
	estratti grezzi	estratti dializzati
Nessuno. . . . .	6-5	0-0
Glutatione. . . . .	34-36	3-4
TPN . . . . .	—	2-4
Glutatione, TPN . . . . .	36-40	6-9
Gl.6-P, . . . . .	98-94	0-0
Gl.6-P, TPN . . . . .	104-110	9-6
Gl.6-P, Glutatione . . . . .	54-57	2-2
Gl.6-P, TPN, Glutatione . . . . .	164-172	108-114
Isocitrato, TPN, Glutatione . . . . .	127-135	—
Malato, TPN, Glutatione . . . . .	107-110	—
DPN, Glutatione. . . . .	36-39	—
Piruvato, DPN, Glutatione . . . . .	37-37	—
Estratto bollito, Gl. 6-P, TPN Glutatione . . . . .	5-7	0-0

In base a tali risultati si può concludere che i fattori essenziali per la riduzione dell'acido deidroascorbico, nelle nostre condizioni sperimentali sono i seguenti: *a*) un substrato di deidrogenasi a TPN; *b*) la relativa deidrogenasi; *c*) quantità catalitiche di TPN; *d*) quantità catalitiche di glutatione. L'assenza di uno qualsiasi di questi fattori porta a drastica diminuzione o all'annullamento della reazione di riduzione del deidroascorbico.



C) *Azione di accettori di fosforo sulla riduzione dell'acido deidroascorbico in presenza di substrati respiratori.*

I dati sopra riportati dimostrano, nei nostri estratti, l'attività del sistema di trasporto di idrogeno lungo la catena substrato  $\rightarrow$  TPN  $\rightarrow$  glutatione  $\rightarrow$   $\rightarrow$  acido ascorbico  $\rightarrow$  ossigeno.

TABELLA III.

*Azione dell'acido adenilico sulla riduzione dell'acido deidroascorbico e del TTC in estratti dializzati.*

Condizioni sperimentali come alla tabella II, salvo che per l'assenza di glutatione e acido deidroascorbico nelle prove in cui si è misurata la riduzione del TTC. Nelle prove di riduzione del deidroascorbico, tutti i fattori essenziali per la reazione presenti alle concentrazioni già indicate.

Addenda	$\gamma$ acido deidro- ascorbico ri- dotto in 2 ore	$\gamma$ TTC ridotto in 2 ore
Estratto bollito . . . . .	0	0
Gl-6-P, TPN, Glutatione. . . . .	144-146	—
*Gl-6-P, TPN, Glutatione, Adenilico $10^{-3}$ M. . . . .	166-170	—
Gl-6-P, TPN, TTC 1 % . . . . .	—	29-30,6
Gl-6-P, TPN, TTC 1 %: Adenilico $10^{-3}$ M. . . . .	—	33-39

Sarebbe di fondamentale importanza conoscere se lungo questa via compaiano fenomeni di fosforilazione accoppiata a reazioni ossidative, come è noto avvenire, ad esempio, lungo sistemi del tipo substrato  $\rightarrow$  TPN  $\rightarrow$  flavo-proteine  $\rightarrow$  citocromi  $\rightarrow$  ossigeno, o altri simili. In via preliminare, abbiamo tentato di ricavare un'indicazione a questo proposito, studiando l'azione di accettori di fosforo, come l'acido adenilico (vedi Laties<sup>(10)</sup>) sulla serie di reazioni che conducono alla riduzione dell'acido deidroascorbico. Dalla tabella III risulta che, mentre una certa attivazione è esplicativa da tale composto, questa è però nettamente inferiore a quella osservata, per la riduzione del TTC, in un sistema contenente glucosio-6-fosfato e TPN. Il dato, pur con tutte le dovute riserve, sembra sfavorevole all'idea dell'intervento di sistemi di immagazzinamento dell'energia liberata dai processi ossidativi, del tipo di quello degli adenilpolifosfati, nelle tappe tra TPN e ascorbico, nella catena di reazioni da noi studiata.

(10) G. C. LATIES, « *Physiol. Plantarum* », 6, p. 215 (1953).

D) *Efficienza dell'acido deidroascorbico come accettore di idrogeno dal TPN.*

Dai dati della tabella IV risulta come, per un dato tempo e in comparabili condizioni sperimentali, la quantità (in micromoli) di deidroascorbico ridotto ad ascorbico in estratti addizionati di adeguato substrato, TPN e glutatione, sia di gran lunga maggiore della quantità in cui viene ridotto un altro accettore di idrogeno, il TTC, il quale riceve presumibilmente l'idrogeno dai piridinnucleotidi attraverso un enzima flavoproteico (Smith<sup>(11)</sup>). D'altro lato, quando in uno stesso estratto TTC e deidroascorbico fungano contemporaneamente da accettori di idrogeno, la quantità di TTC ridotto appare di circa il 50% inferiore a quella ridotta in assenza di deidroascorbico. I due dati sembrano sottolineare l'efficacia con cui il sistema glutatione-deidroascorbico è capace di competere con altri accettori per l'idrogeno che al TPN giunge dai diversi substrati respiratori.

TABELLA IV.

*Riduzione dell'acido deidroascorbico e del TTC in estratti in cui i due accettori di idrogeno siano presenti, separatamente e contemporaneamente.*

Condizioni sperimentali come alla tabella III. Estratti dializzati, centrifugati a 20.000 × g.

Addenda	γ accettore ridotto per ora	
	deidroascorbico	TTC
Gl-6-P, TPN, Glutazione Deidroascorbico 500 γ . . .	77-81	—
Gl-6-P, TPN, TTC . . . . .	—	15-17
Gl-6-P, TPN, Glutazione, TTC, Deidroascorbico 500 γ	—	8-8
Estratto bollito, Gl-6-P, TPN, Glutazione e TTC . . .	0-3	1-2

CONCLUSIONI. — Dai risultati della presente ricerca ci sembra si possa concludere che:

I. — Nei tessuti della porzione apicale di piantine di pisello sono presenti, in misura particolarmente elevata, tutti i fattori che catalizzano il trasporto dell'idrogeno da diversi substrati respiratori all'ossigeno, attraverso il sistema TPN-glutazione-acido ascorbico; e cioè: deidrogenasi a TPN, glutatione riduttasi, ascorbico riduttasi, ascorbico ossidasi, da un lato, TPN, glutatione e acido ascorbico, dall'altro.

II. — In assenza di ossigeno, e a pH 6,8, estratti dializzati dei medesimi tessuti riducono attivamente l'acido deidroascorbico ad acido ascorbico, se addizionati di un substrato di deidrogenasi a TPN e di quantità catalitiche di TPN e glutatione. In assenza di uno qualsiasi di questi fattori, la riduzione dell'ascorbico non avviene, o avviene in misura di gran lunga minore.

(11) F. G. SMITH, « Plant. Physiol. », 27, p. 445 (1952).

III. - L'aggiunta di accettori di fosforo, come l'acido adenilico, sembra senza effetto sulle reazioni che, attraverso questo sistema, trasportano l'idrogeno dal TPN all'ossigeno.

IV. - L'efficienza del sistema di trasporto dell'idrogeno dal TPN ridotto all'ascorbico ossidato appare dimostrata dal fatto che, in comparabili condizioni sperimentali, la quantità in deidroascorbico ridotta da un dato estratto è diverse volte maggiore a quelle in altri accettori di idrogeno, come il tetrazolio, e che il deidroascorbico sembra competere vittoriosamente con il tetrazolio per l'idrogeno del TPN.

V. - Da un punto di vista fisiologico, e poiché non v'è motivo di credere che la serie di reazioni qui studiate su estratti non debba essere attiva anche nei tessuti integri, i presenti risultati prospettano la possibilità di una competizione per l'idrogeno, nella stessa cellula, tra sistema glutatione-ascorbico, sistema flavoproteine-citocromi (o altri simili), e insieme dei processi di carbossilazione riduttiva (condizionati dalla disponibilità in TPN ridotto, Vishniac e Ochoa <sup>(12)</sup>): competizione il cui interesse appare evidente, quando si riflette sulle caratteristiche così profondamente diverse, da un punto di vista sia metabolico che funzionale, dei tre sistemi di reazioni sopra menzionati.

**Istologia.** — *Sulla presenza e sul comportamento del glicogeno nelle cellule del grasso bruno interscapolare di «Mus musculus»* <sup>(\*)</sup>.  
Nota di ARMANDO GOBETTO, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. LEVI.

La presenza di glicogeno, istologicamente dimostrabile, fu segnalata da vari Autori, i quali usarono i metodi classici di Best e Vastarini-Cresi, sia nel tessuto adiposo fetale (vedi v. Gierke, Patzelt, Arndt, Aloisi, Preto Parvis, ecc.) che in quello maturo (vedi v. Gierke, Arndt) di diverse sedi nell'uomo ed in vari animali; Richter invece non rinvenne tale sostanza nelle cellule adipose di feti di ratto.

Altri Autori con metodi chimici confermarono la presenza di glicogeno nel grasso di animali adulti e constatarono che la sua quantità può variare considerevolmente in condizioni fisiologiche e sperimentali sotto l'azione di fattori diversi. In particolare la dieta sembra avere a tal riguardo una notevole importanza; negli animali tenuti a digiuno il glicogeno scompare dopo breve tempo dalle cellule adipose (Scoz, Hoffmann e Wertheimer, Wertheimer, Tuerkischer e Wertheimer, Hausberger, ecc.).

(12) W. VISHNIAC e S. OCHOA, *Phosphorus metabolism*, Mc Elroy and Glass, J. Hopkins Press, Baltimora (1952).

(\*) Ricerche compiute presso il Centro di Studi sull'accrescimento e presso l'Istituto di Anatomia degli animali domestici dell'Università di Torino.

(\*\*) Nella seduta del 13 marzo 1954.

A parte alcune precisazioni di Aloisi sul comportamento del glicogeno nel tessuto adiposo dei feti di cavia, non mi risulta che finora siano state eseguite ricerche sistematiche sul comportamento di tale sostanza nelle cellule adipose durante lo sviluppo e mi sono perciò proposto di studiare tale argomento.

Ho scelto come materiale d'indagine il grasso bruno interscapolare di *Mus musculus*, il quale, com'è noto, è costituito da cellule che conservano per tutta la vita caratteri propri, differenti da quelli del comune grasso; in questa particolare varietà di tessuto adiposo è sempre presente, secondo Kayser, anche durante la vita postnatale, una certa quantità di glicogeno.

Ho esaminato l'abbozzo interscapolare di vari feti da 14 mm. fino al termine di gravidanza e di topini dalla nascita a 9 giorni di vita; inoltre il grasso della stessa regione di qualche topo adulto.

Il materiale venne in parte fissato in liquido di Rossmann e colorato col metodo di Hotchkiss e di Bauer; questi metodi istochimici mi diedero ottimi risultati, superiori a quelli che si ottengono con il classico metodo di Best. Venne sempre eseguito il controllo con la saliva e la diastasi (sec. Lillie).

È noto che il glicogeno, il quale si trova nel citoplasma delle cellule allo stato colloidale, in forma diffusa, precipita sotto l'azione dei fissatori in granuli ed in masserelle irregolari di vario volume; l'aspetto pertanto che tale sostanza presenta nei preparati fissati è artificioso.

Per la dimostrazione dei grassi ho eseguito la colorazione con Sudan nero e Sudan III<sup>o</sup> su materiale fissato in bicromato-formolo.

Per quanto riguarda i caratteri istologici delle cellule del grasso primario, rimando ai lavori di Toldt, di Hammar, di G. C. Dogliotti ed alle ricerche più recenti di Godina.

In embrioni di 14 mm. l'organo interscapolare risulta di nidi cellulari compatti, di forma ovoidale, riccamente vascolarizzati, separati da abbondante mesenchima. Le cellule di forma tondeggianti od ovalare sono ancora relativamente piccole, hanno un grosso nucleo e citoplasma non molto abbondante; le mitosi sono numerose. A tale epoca nella maggior parte degli elementi non vi è traccia di lipidi, mentre è già presente glicogeno. Questa sostanza non è ancora molto abbondante, quantunque in certe cellule più voluminose se ne riscontri già una considerevole quantità.

Col progredire dello sviluppo, l'aumento di volume dell'abbozzo interscapolare è accompagnato da profonde trasformazioni. Nei feti di 16-18 mm. le cellule continuano a moltiplicarsi attivamente ed aumentano considerevolmente di grandezza acquistando un evidente aspetto epitelioidale. L'incremento della grandezza cellulare è dovuto particolarmente ad aumento del citoplasma, mentre le dimensioni del nucleo non si modificano in maniera evidente; perciò l'indice nucleo-plasmatico si sposta a favore del citoplasma (fig. 1).

In quasi tutte le cellule incomincia a deporsi grasso, in forma di minute goccioline di varia grandezza; vi sono variazioni quantitative nel contenuto in grasso delle varie cellule, però nel complesso i lipidi sono ancora scarsi



ed in singoli elementi mancano del tutto. Ciò che caratterizza le cellule a questi stadi di sviluppo è invece il rilevante, rapidissimo aumento del glicogeno; nelle cellule di un feto di 18 mm. (fig. 1) esso si presenta nei preparati fissati sotto forma di granuli e masserelle di vario volume, molto fitti, che infarciscono tutto il citoplasma, ad eccezione delle zone in cui hanno sede le goccioline lipidiche.

Successivamente, fino alla nascita, il grasso aumenta rapidamente; goccioline lipidiche più minute confluiscono in sferule di maggior volume; ma solo raramente il citoplasma contiene un'unica grossa goccia di grasso.

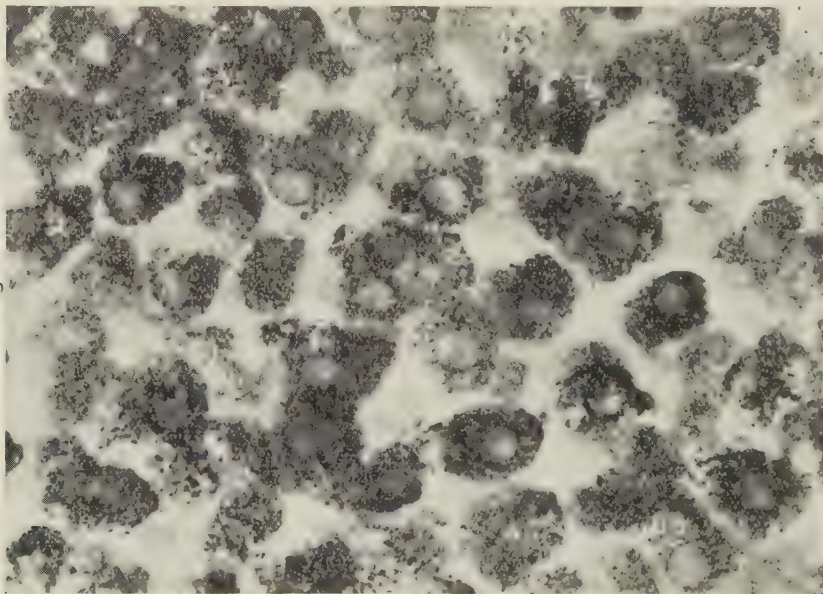


Fig. 1. - Grasso bruno interscapolare di feto di *Mus musculus* di 18 mm. di lunghezza. Cellule di aspetto epitelioido con citoplasma abbondante infarcito di granuli di glicogeno. Reazione all'acido periodico-Schiff secondo Hotchkiss.

Ingrand. 1100  $\times$ .

Per il depositarsi in quantità sempre maggiore di tale materiale paraplasmatico la grandezza cellulare continua ad aumentare. Il glicogeno è tuttora abbondante in seno al citoplasma che separa le goccioline lipidiche, quantunque in varie cellule se ne noti già una minor quantità rispetto agli stadi antecedenti.

Dopo la nascita il grasso aumenta ancora e le cellule acquistano il caratteristico aspetto plurivacuolare che manterranno anche nell'adulto; il glicogeno che, nel neonato, era presente ancora in notevole quantità, scompare rapidamente già nel corso delle prime 36 ore di vita postnatale.

Nel feto di 12 ore soltanto singole cellule sparse irregolarmente contengono ancora notevoli quantità di glicogeno; mentre la maggior parte degli elementi ne sono del tutto privi o ne contengono soltanto una scar-

sissima quantità (fig. 2). Dopo 36 ore nelle cellule adipose non vi è più traccia di glicogeno.

CONCLUSIONI. — Durante lo sviluppo dei lobuli del grasso bruno interscapolare il glicogeno compare nelle cellule, già in fasi precoci, molto prima che inizi la deposizione dei lipidi. Via via che col progredire dello sviluppo le cellule divengono più voluminose ed acquistano l'aspetto di elementi epitelioidi, a citoplasma abbondante, il glicogeno aumenta rapidamente ed in breve tempo il citoplasma ne è completamente infarcito; soltanto allora incominciano a depositarsi le prime goccioline lipidiche.

Negli ultimi periodi di vita fetale e durante il primo giorno dopo la nascita si ha un notevole, rapido incremento dei lipidi che si depongono

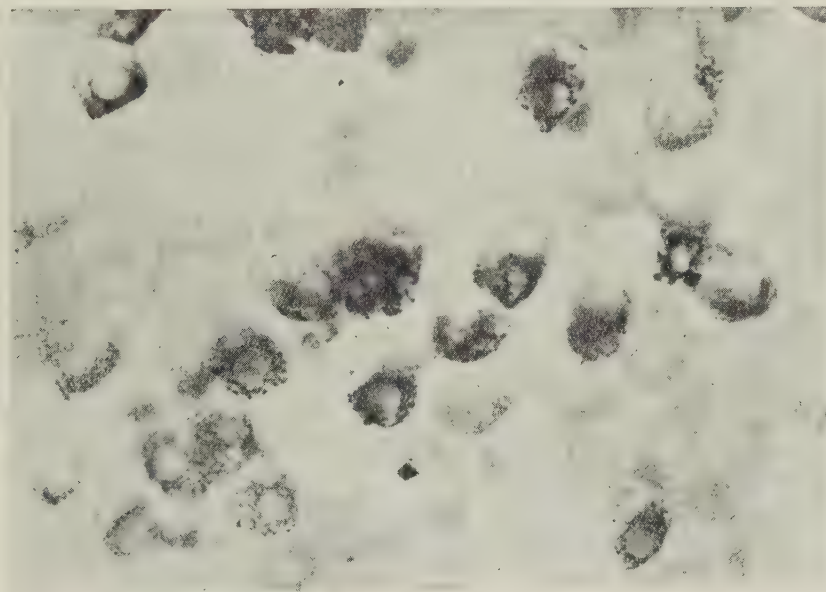


Fig. 2. — Grasso bruno interscapolare di topino di 12 ore. Glicogeno è ancora presente soltanto in singoli elementi; la maggior parte delle cellule ne sono prive. Colorazione ed ingrand. come nella fig. 1.

in forma di goccioline di vario volume in tutto il citoplasma. Il glicogeno in questa fase diminuisce rapidamente per scomparire del tutto durante il secondo giorno di vita postnatale.

Da lungo tempo i biochimici hanno prospettato l'ipotesi che il glicogeno possa esser utilizzato per la sintesi dei lipidi della cellula adiposa. Scoz, Wertheimer, Hausberger e Jachtowicz, ecc. hanno dimostrato con diverse esperienze, in varie specie animali, che il tasso glicogenico del grasso aumenta, rialimentando con diete ricche di carboidrati animali precedentemente tenuti a digiuno; il quoziente respiratorio in questi casi si eleva notevolmente; il che rappresenta per Quagliariello e Scoz, una prova evidente della penetrazione degli zuccheri nella cellula adiposa e della loro utilizzazione per la sintesi del grasso.

Anche Policard sostiene che in vari tessuti esiste un rapporto stretto tra glicogeno e metabolismo dei grassi, sia in condizioni normali che patologiche e gli stessi fatti vennero osservati da Pardi nella formazione dei corpi adiposi di un insetto (*Polistes gallicus*).

Ma una così chiara dimostrazione morfologica dello stretto parallelismo esistente tra scomparsa del glicogeno e deposizione del grasso, come quello da me osservato nelle cellule dell'organo interscapolare di *Mus musculus* durante lo sviluppo, non mi risulta esser stata finora data; il che mi sembra dimostrare in maniera sicura, in accordo con le vedute di Aloisi, che durante l'istogenesi del tessuto adiposo, il glicogeno viene utilizzato per la sintesi dei lipidi.

**Istofisiologia.** — *Dimostrazione sperimentale dell'origine delle fibre sensitive viscerali da neuroni dei gangli spinali toracici*<sup>(\*)</sup>. Nota di GUIDO FILOGAMO e FELICE VIGLIONE, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. LEVI.

L'ipotesi di Dogiel<sup>(1)</sup> che le cellule dei gangli viscerali della catena e del metasimpatico, dette comunemente del secondo tipo (a dendriti lunghi e sottili), fossero destinate alla funzione sensitiva viscerale, fu sin dall'inizio del secolo, riconosciuta infondata. Langley<sup>(2)</sup>, Kölliker<sup>(3)</sup> e vari altri dimostrarono che tutte le cellule dei gangli simpatici sono neuroni post-gangliari effettori. Poiché d'altra parte tutti i nervi viscerali contengono certamente fibre destinate all'innervazione sensitiva dei visceri, varie ricerche furono rivolte a rintracciare l'origine di queste fibre. Langley<sup>(4)</sup> ritenne originassero da neuroni dei gangli spinali e che fossero identiche morfologicamente a quelle provenienti da neuroni sensitivi somatici. D'altra parte Schwartz<sup>(5)</sup> e Kuntz<sup>(6)</sup> hanno, in un periodo recente, cercato di dimostrare che una parte almeno delle fibre sensitive viscerali si originano da neuroni situati nei gangli viscerali.

Però Warrington e Griffith<sup>(7)</sup> e Hirt<sup>(8)</sup> avevano visto, con il metodo della reazione cromatolitica di Nissl che in seguito a recisione di rami comunicanti, i neuroni sensitivi viscerali risiedono realmente nei gangli spinali,

(\*) Ricerche compiute nell'Istituto Anatomico e nell'Istituto di Patologia Chirurgica di Torino e presso il Centro di Studi sull'accrescimento alle dipendenze del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta dell'8 maggio 1954.

(1) A. S. DOGIEL, « Arch. f. mikr. Anat. », 46, 305 (1895).

(2) J. N. LANGLEY, *The autonome nervous system*, Cambridge, 1921.

(3) KÖLLIKER, *Der feinere Bau u. die Functionen des sympathischen Nervensystems*, Würzburg, 1894.

(4) J. N. LANGLEY, « J. Physiol. », 33, XVII-XVIII (1905).

(5) H. G. SCHWARTZ, « Amer. J. Physiol. », 109, 593 (1934).

(6) A. KUNTZ, *Le système nerveux autonome*, 2 Ed. Philadelphia (1934).

(7) W. B. WARRINGTON, F. GRIFFITH, « Brain », 27, 297 (1904).

(8) A. HIRT, « Zeitschrift f. Anat. u. Entwickl. », 87, 275 (1928).



ma il loro numero sarebbe estremamente scarso (dal 3 al 5 ‰); apparterebbero al tipo delle cellule di media grandezza e piccole.

Con le nostre ricerche ci siamo proposti di ritornare su questo antico problema, con lo stesso metodo della reazione cromatolitica scoperto da Nissl

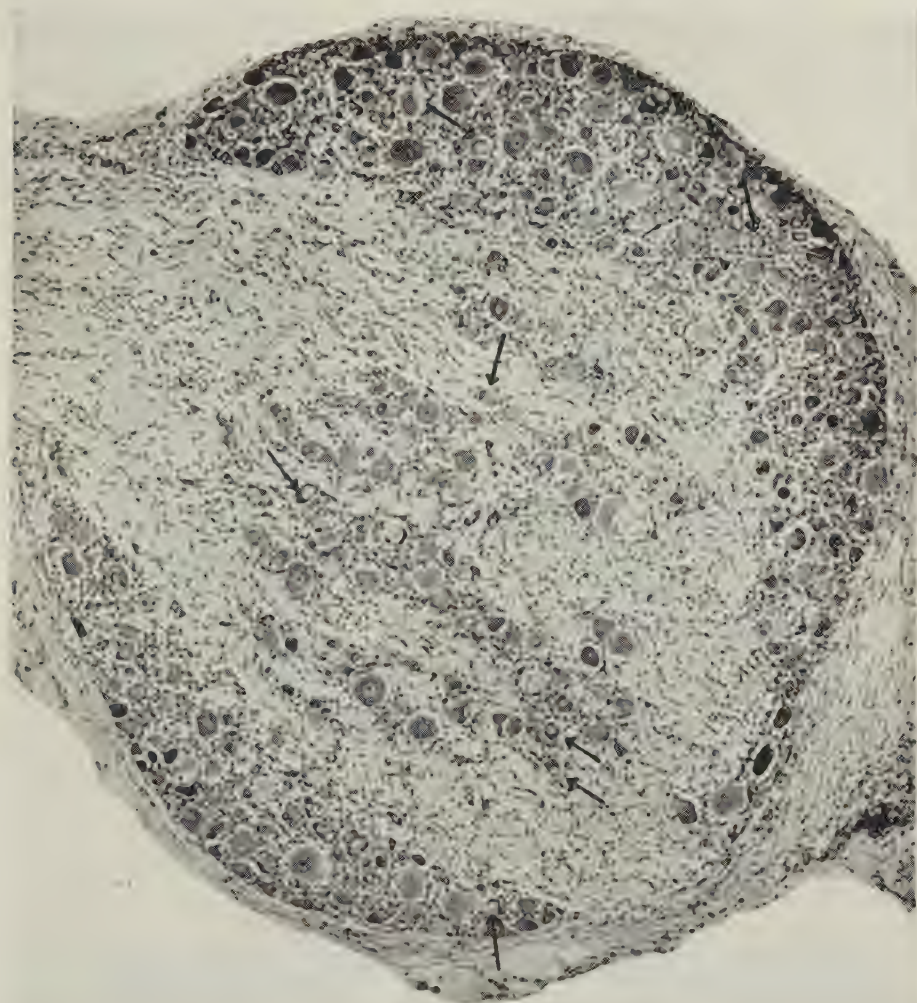


Fig. 1. — Sezione dell'VIII ganglio spinale toracico di un cane sacrificato al 15° giorno dopo la recisione del ramo comunicante del segmento corrispondente. Le cellule in cromatolisi sono indicate con frecce. Metodo Nissl. Ingrandimento 100  $\times$ .

e di stabilire il numero dei neuroni che presentano questa reazione, il loro volume e la loro distribuzione nei gangli spinali.

**MATERIALE E TECNICA.** — In 8 cani adulti di media e grossa taglia, scoperta la catena del simpatico con l'apertura del cavo pleurico, sono stati resecati a destra i rami comunicanti da  $T_4$  a  $T_{10}$ . Sei di questi animali sono stati



sacrificati dopo 15 giorni, 2 dopo 21. In tutti furono prelevati i gangli spinali sia dal lato operato che dal lato opposto, il quale serviva di controllo. Il materiale fu fissato in sublimato (soluzione satura in acqua) e colorato con il bleu di toluidina, differenziando in alcool a 95°.

In tutti i casi sacrificati dopo 15 giorni sono state facilmente rintracciate cellule dei gangli del segmento corrispondente al ramo comunicante reciso con

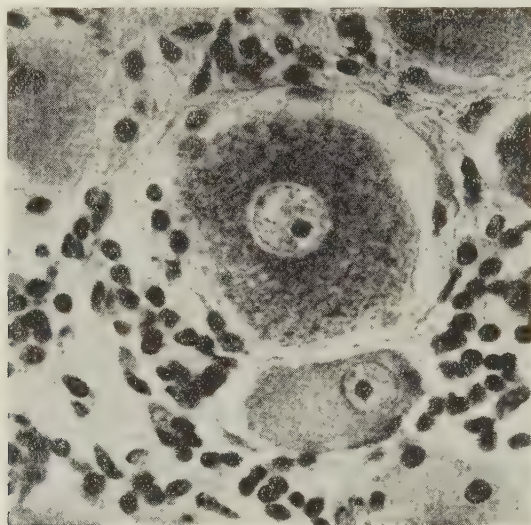


Fig. 2. - Sezione del IX ganglio spirale toracico di un cane al 15° giorno dopo la recisione del ramo comunicante del segmento corrispondente. In alto una cellula integra, in basso una piccola cellula con nucleo eccentrico e sostanza cromofila quasi del tutto scomparsa al di fuori di un sottile alone periferico. Metodo Nissl. Ingrandimento 600  $\times$ .

evidente cromatolisi ed il quadro ottenuto era talmente chiaro da non lasciare adito a dubbi.

All'opposto negli animali sacrificati dopo 21 giorno cellule in cromatolisi non erano rintracciabili con sicurezza.

**RISULTATI DELLE OSSERVAZIONI.** - I risultati ottenuti nei sei casi uccisi al 15° giorno dall'operazione furono quanto mai concordanti. In tutti abbiamo osservato che la reazione cromatolitica è limitata alle cellule di media grandezza; poche sono le cellule piccole, le quali reagiscono. In nessun caso abbiamo visto una reazione nelle cellule grandi e piccolissime. La reazione presenta i caratteri ben noti, posti in luce da Nissl e magistralmente descritti da Lugaro<sup>(9)</sup> nelle sue classiche pubblicazioni di mezzo secolo fa, soltanto per i neuroni sensitivi somatici. Il nucleo è eccentrico, la sostanza cromofila ha in tutto il citoplasma un aspetto pulverulento, i minuti granuli sono fitti in un ristretto alone periferico: in tutto il rimanente la sostanza cromofila è rappresentata da granuli pure minuti e per di più scarsissimi, di modo che la

(9) E. LUGARO, « Riv. di Patol. Nerv. e Ment. », I, 1896; 5, 6, 7, 8.

più grande parte del citoplasma interposta tra il nucleo ed il polo opposto della cellula è quasi del tutto scolorato.

Negli animali sacrificati dopo 21 giorni dall'operazione, la reazione cromatolitica era poco evidente, il che sta ad indicare che l'acme del processo cromatolitico è raggiunto dopo 2 settimane, e che a partire dall'inizio della terza settimana incomincia il processo di restituzione, e ciò in accordo con i dati antichi e recenti sui neuroni somatici (vedi tra i più recenti quelli di Bodian) <sup>(10)</sup>.

Ci siamo proposti di stabilire il numero dei neuroni che reagiscono alla sezione del ramo comunicante e la loro distribuzione. Diremo subito che la loro distribuzione è irregolare: in nessun caso erano raccolte in gruppi. Ripor-

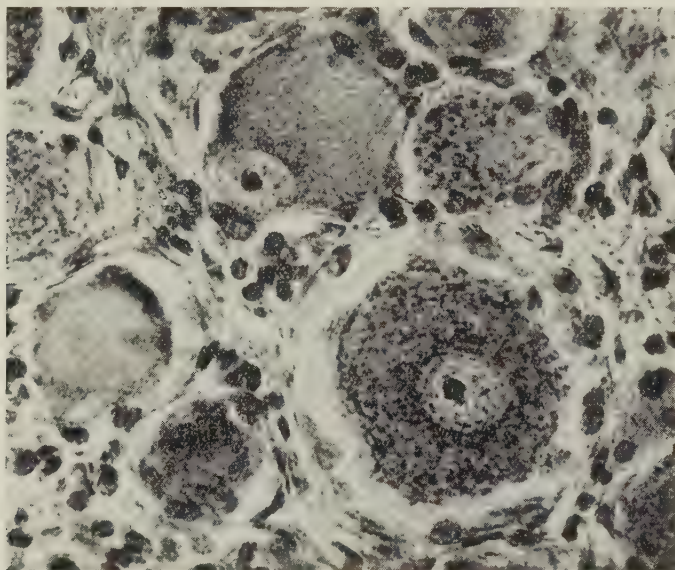


Fig. 3. — Due cellule di media grandezza del IX ganglio spinale toracico con evidente reazione cromatolitica. In una di queste si vede il nucleo eccentrico. Nella cellula più piccola il nucleo non appare. Metodo Nissl. Ingrandimento 600  $\times$ .

tiamo in tabella il numero complessivo dei neuroni nei sei gangli spinali di sei animali diversi da noi studiati ed il numero delle cellule in cromatolisi.

Animale	Ganglio spinale	N. totale delle cellule nervose gangliari	N. delle cellule % in cromatolisi
n. 1	T 8	6631	417-6,4 %
n. 2	T 8	6255	380-6 %
n. 3	T 9	7330	513-7 %
n. 4	T 7	5932	320-5,6 %
n. 5	T 9	6721	436-6,4 %
n. 6	T 8	5850	448-7,6 %

(10) D. BODIAN, «S.E.B. Symposia», n. 1, Cambridge, 163 (1947).

Dalle nostre osservazioni risulta adunque che solamente il 5-7% dei neuroni dei gangli sensitivi spinali sono destinati all'innervazione viscerale. Hinsey <sup>(11)</sup> ritiene invero che un certo numero di fibre, e più precisamente quelle destinate all'innervazione sensitiva dei vasi sanguigni decorrono nel nervo misto. Poiché nelle nostre esperienze il nervo misto era lasciato integro, se veramente esistono fibre afferenti viscerali con il centro trofico nei gangli spinali destinate all'innervazione dei vasi e che non percorrono la via del ramo comunicante, queste erano rimaste integre nelle nostre esperienze.

RIASSUNTO. - 1° Per effetto della recisione dei rami comunicanti corrispondenti a sei segmenti toracici (dal 4° al 10°) furono riconosciuti evidenti processi di reazione cromatolitica nei neuroni dei gangli spinali dei segmenti corrispondenti e più precisamente nel 5-7% sul numero complessivo.

2° I neuroni che presentano una reazione e perciò verosimilmente sono destinati all'innervazione sensitiva viscerale, appartengono in prevalenza a quelli di media grandezza; pochi i piccoli. Essi non hanno localizzazione caratteristica.

3° Al 21° giorno dopo l'operazione non furono trovati segni evidenti di reazione cromatolitica nei neuroni dei gangli, il che indica che già in questo periodo è iniziato il processo di restituzione, analogamente a quello che avviene nei neuroni somatici.

**Biologia.** — *Caratteri dell'epitelio dell'« amnios » espiantato « in vitro »* <sup>(\*)</sup>. Nota di MARIO FRANCESCHINI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. LEVI.

Nella pleiade di ricerche sopra i caratteri morfologici e sulle proprietà biologiche dei tessuti e delle cellule espiantate *in vitro*, apparse durante i 45 anni trascorsi dalla scoperta del metodo dell'espianazione ad oggi, il destino degli epiteli fu relativamente meno studiato di quello di altri tessuti, forse per le difficoltà che s'incontrano a separarli dai tessuti circostanti. Furono bensì talora ottenute colture pure di epitelio a vita permanente e ad accrescimento indefinito, ma soltanto in particolari condizioni di esperienza, nelle quali si poterono separare le cellule epiteliali da quelle contigue di altra natura; a ciò meglio di qualsiasi altro epitelio si presta, come è noto, quello dell'iride dell'embrione di pollo. Negli espianti di altri epiteli (dell'intestino, del tegumento, ecc.), si accrescono, assieme alle cellule epiteliali, fibrociti e cellule muscolari. Si cercò di ottenere per lo meno una prevalenza nell'accrescimento

(11) C. HINSEY, « J. Comp. Neurol. », 47, 23-65 (1928).

(\*) Ricerche compiute nel « Centro studi sull'accrescimento », con sede presso l'Istituto anatomico dell'Università di Torino, diretto dal prof. F. Loreti.

(\*\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.



delle cellule epiteliali con mezzi che abbassano la tensione superficiale (Katzenstein e Knake), ma i risultati furono soddisfacenti solamente in casi singoli.

Però l'epitelio conserva *in vitro* caratteri particolari, per cui si distingue facilmente da elementi di altra origine. Nel materiale da me studiato, l'*amnios* di embrione di pollo, dal 3° al 13° giorno d'incubazione, si produsse spontaneamente una separazione materiale tra l'epitelio da un lato ed i fibrociti e le cellule muscolari dall'altra, e mi fu possibile rintracciare i caratteri citologici delle cellule epiteliali, le relazioni vicendevoli tra di esse e le modalità con cui esse emigrano.

L'*amnios* fu coltivato, in goccia pendente, in plasma e succo di embrioni diluito con soluzioni saline; il mezzo fu sempre disteso in uno strato sottile.

L'epitelio per lo più si presenta quale tenue lamina aderente al vetrino, e per la sua trasparenza può essere studiata al microscopio con i più forti ingrandimenti, tanto, *in vivo*, quando nel preparato conservato. Le colture sono state fissate nella miscela osmio-bicromica di Bensley e colorate, dopo ossidazione, con ematossilina ferrica.

È di dominio comune che nei tessuti espianati *in vitro*, le cellule, per effetto degli stimoli a cui sono soggette nelle nuove condizioni, si spostano rapidamente verso la periferia della coltura: le ragioni per cui la migrazione delle cellule avviene sempre in una sola direzione, non sono sino ad oggi del tutto chiarite e non è questa la sede adatta per discutere tale problema.

Lo spostamento delle cellule negli espianati *in vitro* si produce per movimento individuale o per movimento collettivo (detto anche «movimento di massa»). Se prevale il movimento individuale, le cellule emettono propaggini; la loro forma si modifica di continuo ed emigrano isolate oppure lassamente unite, verso la periferia. È quanto si verifica nelle comuni colture di elementi detti di «tipo fibrocitario». Nel «movimento di massa» invece, le cellule rimangono in contatto reciproco lungo i margini e si spostano verso la periferia, rimanendo aderenti l'una all'altra: in tal caso il movimento è più lento di quello degli elementi liberi e la forma delle cellule si modifica molto meno, in confronto a quelle di tipo fibrocitario.

Negli epiteli espianati si manifesta sempre un movimento collettivo, e questo è molto lento. Inoltre, mentre nella migrazione a forma di membrana dei mioblasti e delle cellule endoteliali, il movimento individuale ha la prevalenza su quello collettivo, dimodoché, specialmente alla periferia della coltura, le cellule tendono a divenire libere e sono separate da fessure più o meno ampie, negli epiteli persiste, anche dopo alcuni giorni di sopravvivenza *in vitro*, il carattere che è più nettamente specifico di questo tessuto: il contatto vicendevole tra i margini delle cellule. Soltanto alla periferia della membrana epiteliale poche cellule assumono forma irregolare, emettono propaggini e spesso divengono libere, assumendo caratteri simili a quelle di tipo fibrocitario.

In questa comunicazione mi propongo di discutere due problemi che ho avuto l'opportunità di studiare più da vicino nel materiale da me prescelto: l'espansione in superficie delle cellule ed i rapporti d'interdipendenza tra di esse.



1° *Espansione in superficie delle cellule.* - Si tratta di un fenomeno interessante che si verifica sovente nelle cellule in coltura: fu posto in luce già nelle antiche ricerche sulla citologia delle cellule *in vitro* di W. ed M. Lewis e di G. Levi, in quelle di Policard sui macrofagi, di Fauré-Fremiet negli amebociti degli invertebrati. Però l'essenza del fenomeno ed i fattori che lo determinano sono imperfettamente conosciuti. Non si osserva mai nelle cellule che emigrano in seno al coagulo di plasma, ma a preferenza in quelle che emigrano in contatto col vetrino (se si tratta di colture in goccia pendente), oppure sul fondo di una bottiglia di Carrel. Si manifesta di preferenza in colture in mezzo liquido (secondo la tecnica di W. Lewis), oppure in plasma molto diluito disteso in uno strato sottile sopra una superficie del tutto priva di impurità (quale si può ottenere coll'espore per lungo tempo il vetrino ad alta temperatura). Qual'è lo spessore minimo che la cellula raggiunge in queste condizioni? I dati ottenuti da Policard nei veli ialini dei macrofagi, da Fauré-Fremiet negli amebociti degli invertebrati sono abbastanza concordanti: sarebbe di 1100 Å.; K. Porter, Claude e Fullam, in cellule in coltura espanse alla superficie del vetrino, avrebbero ottenuto invece, all'esame con il microscopio elettronico, valori molto più bassi, da 300 a 600 Å. <sup>(1)</sup>.

Un alto grado di espansione in superficie fu visto da G. Levi in molti elementi: cellule del miocardio, di muscoli scheletrici, dell'entoderma vitellino; ma non fu finora istituito un confronto fra cellule del tessuto e cellule in coltura, in modo da poter stabilire l'entità dell'espansione di una cellula determinata, dopo qualche tempo di sopravvivenza *in vitro*. L'*amnios* rappresenta, da questo punto di vista, un materiale favorevole, perché si può calcolare facilmente la superficie di cellule dell'*amnios* integro e dopo un certo periodo di vita *in vitro*. Dalle determinazioni intraprese col planimetro polare, sia sopra l'epitelio dell'*amnios* prelevato dall'embrione e colorato *in toto* con il metodo al nitrato d'argento, sia sopra l'epitelio fissato dopo 48 ore di sopravvivenza *in vitro* (nel quale si distinguono molto bene dopo colorazione con l'ematossilina ferrica i contorni delle cellule), risulta che in tutte le colture si manifesta un rilevante incremento della superficie occupata dalla cellula.

Fu eseguito un gran numero di determinazioni sopra colture ottenute da embrioni a vario stadio di sviluppo; mi limito a riferire qui alcuni valori massimi e minimi per dare un'idea del grado di espansione in superficie che le cellule in singoli casi possono raggiungere.

Superficie di cellule dell'*amnios* prelevate direttamente dall'embrione:

valore minimo	100 $\mu^2$
» massimo	600 $\mu^2$

Superficie di cellule dell'*amnios* in embrione di tre giorni dopo due giorni di cultura:

(1) Per la bibliografia ved.: G. LEVI, *Explantation*. « *Ergebn. Anat. u. Enwick.* », 31, 125 (1935); K. R. PORTER, A. CLAUDE ed E. C. FULLAM, « *J. exp. ed.* », 81, 235 (1945).

valore minimo. 200  $\mu^2$

» massimo 10.210  $\mu^2$

Idem di embrione di quattro giorni:

valore minimo 200  $\mu^2$

» massimo 5380  $\mu^2$

Idem di embrione di cinque giorni:

valore minimo 200  $\mu^2$

» massimo 4400  $\mu^2$

Idem di embrione di sei giorni:

valore minimo 200  $\mu^2$

» massimo 12.000  $\mu^2$

Idem di embrione di undici giorni:

valore minimo 300  $\mu^2$

» massimo 16.240  $\mu^2$

Da quanto ho visto, si può arguire che nelle cellule dell'*amnios* espiantato si ha sempre, in confronto con l'*amnios* dell'embrione, un certo grado di espansione in superficie, la quale è in molte cellule relevantissima. Non sussiste rapporto evidente tra l'età dell'embrione dal quale fu ottenuto l'espianto ed il grado di espansione delle cellule.

A conferma di quanto fu osservato da W. M. Lewis e da G. Levi in altro materiale, nonostante un assottigliamento tanto considerevole, le cellule dell'epitelio dell'*amnios* si mantengono in istato di sopravvivenza. Infatti i condriosomi, i quali sono, come è noto, gli indicatori più sensibili della vitalità cellulare, rimangono integri (figg. 1 e 2). Non ho mai visto mitosi, ma queste furono osservate da G. Levi in cellule molto assottigliate di altro materiale. I condriosomi

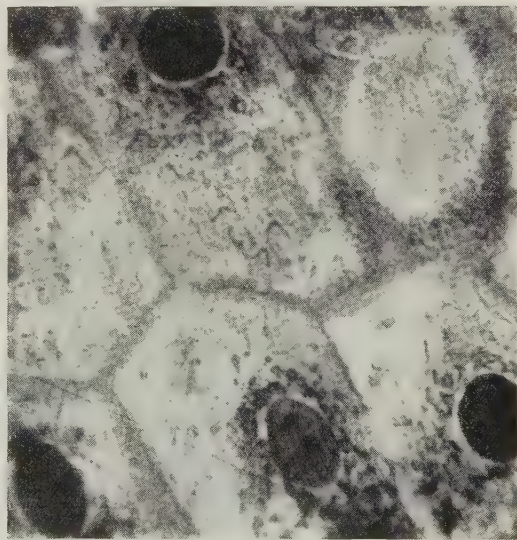


Fig. 1. - Coltura n. 537. Espianto di *amnios* di embrione di pollo all'11° giorno di incubazione e dopo 48 ore di sopravvivenza *in vitro*. Strie di sostanza cementante tra le cellule; condriosomi molto radi. Ingr. 700  $\times$ .

sono in forma di filamenti tortuosi, tanto più radi quanto più elevata è l'espansione della cellula. Ciò fa pensare che, nelle cellule che si trovano in queste condizioni, non si abbia un vero e proprio accrescimento, ma soltanto una assunzione di acqua da parte dell'ialoplasma (G. Levi <sup>(2)</sup>).

(2) G. LEVI, «Acta Anatomica», 4, 146 (1947); e id., «Rendic. Ac. Lincei», classe Sc. fis., ser. VIII, 267 (1946).

Solamente quando l'assottigliamento dell'ialoplasma raggiunge un grado estremo, i condrioconti si frammentano, perdono la colorabilità e si dileguano



Fig. 2. - Coltura n. 601. Espianto di *amnios* di embrione di pollo al 7° giorno di incubazione. Cellule molto espanse in superficie; strie di sostanza cementante; condrioconti radi. Ingr. 1080  $\times$ .



Fig. 3. - Coltura n. 333. Espianto di *amnios* di embrione di pollo all'11° giorno di incubazione. Cellula epiteliale dell'*amnios* notevolmente espansa ( $13.600 \mu^2$ ). Condrioconti poco colorati. Ingr. 720  $\times$ .

(fig. 3). L'ialoplasma nelle cellule molto espanse, per la scarsa rifrangenza, è a fresco molto trasparente (anche all'esame con il microscopio a contrasto



di fase), e non si colora nei preparati istologici. Il nucleo si espande in misura molto minore del citoplasma (figg. 1-3), per cui l'indice nucleo-plasmatico si sposta a favore del citoplasma.

Non vi può esser dubbio, ripeto, che questo mutamento tanto profondo nei caratteri delle cellule sia in relazione con una considerevole idratazione del ialoplasma: senza di questa, l'espansione in superficie della cellula non sarebbe possibile. I fattori che determinano questo processo non sono ben chiariti, ma certamente sono in gioco forze di energia capillare. Le ragioni per cui le cellule in coltura, che emigrano a contatto con una superficie consistente e liscia, sono oggetto di una diminuzione tanto rilevante della tensione superficiale, non sono ben conosciute. La questione è stata discussa più ampiamente di quanto si possa fare qui, da G. Levi<sup>(2, 3)</sup>.

Talora nell'epitelio amniotico, come in altri epiteli, si può determinare, per mutamento delle condizioni che mantengono espanse le cellule sulla superficie del vetrino (verosimilmente dovuto all'aumento della tensione superficiale), una retrazione di una parte del citoplasma o della sua totalità. Nel primo caso soltanto una parte della cellula rimane trasparente, un'altra parte si prolunga in un sottile filamento (fig. 4), oppure tutta la cellula si trasforma in un lunghissimo filamento che nel preparato si colora intensamente.

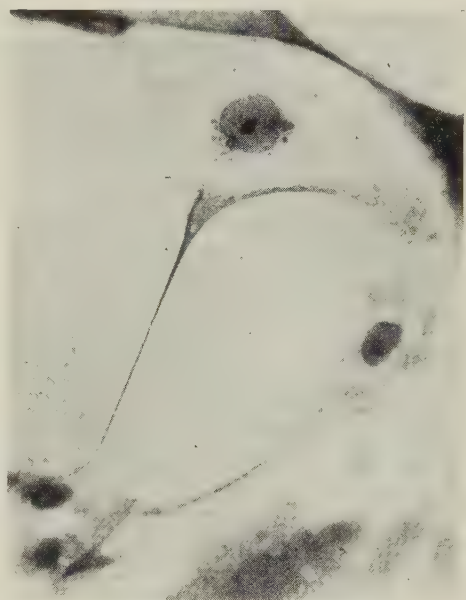


Fig. 4. — Coltura n. 731. Espianto di *amnios* di embrione di pollo al 5° giorno di incubazione. In una cellula epiteliale è intervenuta una retrazione parziale del citoplasma il quale, ridotto a filamento, collega tra loro due cellule vicine.

## 2° Rapporti d'interdipendenza tra le cellule dell'epitelio. — Il secondo

particolare che mi propongo di discutere riguarda i rapporti che intercorrono tra le cellule dell'epitelio. L'an-

tica interpretazione, secondo la quale la migrazione degli epiteli sarebbe un processo prevalentemente passivo, non determinato cioè dall'attività ameboide delle cellule periferiche, le quali trascinano dietro di sé gli elementi retrostanti, non è sostenibile. Certamente lo scivolamento dell'epitelio sulla superficie del vetrino è, negli espianti di *amnios*, come in quelli di tutti gli epiteli, la risultante di un'attività ameboide di lieve entità, e perciò non sempre apprezzabile all'osservazione diretta, da parte delle singole

(3) G. LEVI, *Trattato di Istologia*, Ed. 3ª U.T.E.T., 1946.



cellule. Di solito il mutamento di forma di queste è tanto lieve e lento che, ripeto, sfugge all'osservazione diretta *in vivo* e nel preparato istologico esse sembrano aderenti l'una all'altra. Ma nelle cinematografie di colture di epitelio Albert Fischer ha potuto dimostrare che si producono mutamenti di forma lievi delle singole cellule, i quali determinano lo scivolamento di tutta la membrana.

D'altronde, mentre in molte colture le cellule rimangono in contatto vicendevole, separate da sottili strie le quali trattengono il colore, costituendo complessivamente un mosaico regolare (figg. 1 e 2), in varie aree di una coltura si è manifestata un'attività individuale di maggiore entità da parte di singole cellule, per cui queste si discostano le une dalle altre, oppure si sovrappongono ad embrice per un tratto più o meno esteso.

Ma da che dipende l'intima aderenza tra le cellule dell'epitelio, carattere tanto costante nell'organismo e che si mantiene anche *in vitro*? Secondo l'antica interpretazione, le cellule epiteliali, come quelle dell'endotelio vascolare, sono mantenute unite da una sostanza cementante contenente calcio; secondo Chambers questa sostanza, la quale, come è noto, riduce il nitrato d'argento, contiene pure acido ialuronico. W. Lewis ritiene invece che non vi sia sostanza interposta tra le cellule, ma che queste rimangano unite perché i margini sono imbevuti da sostanza adesiva. Quanto ho visto nel mio materiale mi fa propendere per la prima interpretazione. Infatti non di rado, ove i margini delle cellule contigue si discostano, è interposta tra i bordi frastagliati una sostanza la quale trattiene il colore, a differenza del citoplasma cellulare che appare incolore. Questa sostanza mi sembra estranea all'ialoplasma e suppongo si tratti di sostanza cementante.

**Citologia.** — *Citologia e citochimica della spermatogenesi atipica in « Murex trunculus »* (\*). Nota di BRUNO BATTAGLIA, presentata (\*\*) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

I risultati di mie precedenti ricerche sulla spermatogenesi di due Gasteropodi Prosobranchi, *Columbella rustica* L. e *Littorina neritoides* L. <sup>(1,2)</sup>, hanno tra l'altro messo in luce la presenza, negli spermatozoi atipici della prima specie e nelle cellule nutrici della seconda – formazioni di cui ho potuto stabilire l'omologia – di sostanze fortemente positive alle reazioni citochimiche dei polisaccaridi. Questo reperto, confermato anche per il Prosobranco *Vivi-*

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Zoologia e Anat. Comp. dell'Università di Padova e la Stazione Idrobiologica di Chioggia, con contributi del Centro di Studi Talassografici del C. N. R.

(\*\*) Nella seduta del 10 aprile 1954.

(1) B. BATTAGLIA, « Bollet. di Zool. », 18, 41 (1951).

(2) B. BATTAGLIA. « Bollet. di Zool. », 19, 195 (1952).

*parus viviparus* da Hanson, Randall & Bayley <sup>(3)</sup> e le osservazioni di alcuni autori secondo cui è da presumersi che tra i due tipi di cellule si stabiliscano rapporti chimici con eventuale cessione da parte degli spermatozoi atipici ai tipici di sostanze a funzione trofica, mi hanno indotto ad estendere le ricerche ad altri Prosobranchi che meglio si prestassero a saggiare l'ipotesi di un preciso significato funzionale degli elementi atipici.

Il *Murex trunculus* L. è particolarmente favorevole a questo tipo di ricerche, in primo luogo per le dimensioni considerevoli dei suoi gameti maschili, in secondo luogo per il fatto che gli spermatozoi tipici, completato il loro sviluppo, si attaccano numerosi agli spermatozoi atipici <sup>(4)</sup>, fenomeno analogo a quello riscontrato in *Littorina*.

Nella presente Nota vengono descritte alcune caratteristiche citologiche e citochimiche degli elementi spermatogenetici aberranti, limitatamente al periodo che precede lo stabilirsi di rapporti di contatto tra spermatozoi tipici e atipici; particolare attenzione è stata rivolta alla questione dell'origine e della natura dei granuli e di altre formazioni che si rinvenivano nel citoplasma dello spermio atipico a sviluppo ultimato. I risultati delle osservazioni citochimiche sugli elementi della linea spermatogenetica tipica sono stati riferiti in altra Nota <sup>(5)</sup> cui rimando anche per quanto concerne i dettagli delle tecniche adoperate e per le notizie riguardanti la struttura della gonade di *Murex* e il problema dell'origine delle due linee in questa specie.

Gli spermatogoni atipici, che si distinguono da quelli tipici per le dimensioni citoplasmatiche e nucleari maggiori, sono anche caratterizzati da un successivo forte accrescimento del citoplasma alla fine del quale, più raramente durante, il nucleo si frammenta in vescicole numerose. Alla fine del processo spermioistogenetico i granuli di cromatina residui sono scomparsi del tutto, sicché lo spermatozoo atipico 'maturo' <sup>(6)</sup> di *Murex trunculus* è completamente anucleato.

Un fenomeno che era sfuggito agli altri Autori che si sono occupati dell'argomento è dato dalle particolari variazioni del diametro del nucleo precedenti la disintegrazione dello stesso. Il diametro del nucleo aumenta sensibilmente (sino a 5,5 micron) prima ancora che nel citoplasma si instauri il processo di accrescimento alla fine del quale il citoplasma stesso avrà raggiunto dimensioni diametrali di 20-25 micron. A mano che questo cospicuo accrescimento ha luogo il diametro del nucleo subisce un ulteriore lieve aumento (sino a 7,5 micr.). Di conseguenza la cromatina diviene meno compatta e colora-

(3) J. HANSON, J. T. RANDALL, S. T. BAYLEY, « Exp. Cell Res. », 3, 65 (1952).

(4) G. FADDA, « Mem. Comit. Talass. Ital. », Mem. II2 (1924).

(5) B. BATTAGLIA, « Rend. Accad. Naz. Linc. », in corso di stampa.

(6) Questo termine è improprio, data l'assenza di divisioni maturative durante la spermatogenesi atipica di *Murex*. Con esso intendo riferirmi soltanto alla condizione terminale dell'elemento atipico. Per lo stesso motivo è insostenibile la distinzione dello Schitz <sup>(7)</sup> in spermatogoni, spermatociti e spermatidi atipici, non trovando gli ultimi termini alcun riscontro in corrispondenti condizioni nucleari.

(7) V. SCHITZ, « Arch. Zool. Exp. et Génér. », 59, 477 (1920).

bile e il nucleo intero assume l'aspetto di una grossa pallida vescicola. Questa condizione ha breve durata come si può arguire dal rinvenimento di uno scarso numero di cellule atipiche con nucleo a dimensioni massime. Mentre il processo di auxocitosi è ancora in atto il nucleo va incontro a un processo di contrazione, raggiungendo un diametro di 4-4,2 micr., e di successiva picnosi. La contrazione prelude alla fase di frammentazione.

L'osservazione delle modifiche che il nucleo subisce prima di disintegrarsi è importante in quanto ci fornisce un nuovo elemento di confronto tra le spermatogenesi aberranti dei diversi Prosobranchi, permettendo di confermare certe omologie sostenute sulla base di altre osservazioni <sup>(2)</sup>.

Contemporanea al processo di frammentazione del nucleo è la moltiplicazione dei centrioli <sup>(8)</sup>, altro fenomeno caratteristico della spermatogenesi atipica nei Prosobranchi, e la formazione in dipendenza dei centrioli stessi, di un fascio di filamenti fibrillari che nello spermio maturo decorrono longitudinalmente occupandone gran parte del volume.

Le modificazioni del nucleo durante la spermatogenesi atipica di *Murex* permettono di distinguere le diverse tappe del fenomeno nei quattro stadi seguenti: I) stadio di accrescimento; II) stadio di contrazione; III) stadio di frammentazione. Il quarto stadio è rappresentato dallo spermio definitivo che si presenta affusolato, appiattito, completamente anucleato e lungo circa 200 micron.

Interessante notare che il nucleolo è visibile solo nel I) stadio. Durante tutta la fase di accrescimento esso rimane piuttosto piccolo e debolmente colorabile; non è più rintracciabile dallo stadio di contrazione in poi.

Durante la spermatogenesi atipica di *Murex trunculus*, gli acidi nucleici si comportano non dissimilmente da quanto precedentemente osservato in *Columbella* e in *Littorina*. Il citoplasma dello spermatogonio atipico presenta lo stesso grado di pironinofilia ribonucleasi-labile che il citoplasma dello spermatogonio tipico. La pironinofilia decresce sino a quasi scomparire poco dopo l'inizio del grande accrescimento citoplasmatico. In tutti gli stadi successivi l'acido ribonucleico è praticamente assente; il reperto è confermato dall'osservazione in luce ultravioletta. L'assorbimento è limitato al nucleo e ai frammenti di esso, quando ha inizio lo stadio di frammentazione, mentre lo spermatozoo maturo è privo di sostanze Feulgen-positive o assorbenti la luce ultravioletta a 2650 Å. La scomparsa dai frammenti di nucleo della Feulgen-positività e della capacità di assorbimento è graduale. Lo spermio atipico definitivo è dunque caratterizzato dall'assenza totale di acidi nucleici (di tipo RNA e DNA) rivelabili con i mezzi citochimici a disposizione <sup>(9)</sup>.

La fosfatasi alcalina è presente nello spermatogonio in corrispondenza del citoplasma e del nucleolo. Negli stadi successivi la reazione di Gomori si fa sempre più flebile sino a diventare del tutto negativa nello spermatozoo atipico maturo.

(8) P. STEPHAN, «C. R. Soc. de Biol.», 55, Paris (1903).

(9) A conclusioni analoghe era pervenuta la dott.ssa R. Oselladore, di questo Istituto, nel 1951. Le sue osservazioni sulla spermatogenesi di *M. trunculus* sono state oggetto di una tesi di laurea rimasta inedita.

In nessuno stadio sono presenti sostanze che diano colorazioni metacromatiche. Come negli spermatogoni tipici <sup>(5)</sup> così anche in quelli atipici l'eosinofilia citoplasmatica è uniforme. Con l'inizio dell'auxocitosi l'eosinofilia viene a localizzarsi in modo particolarmente evidente in corrispondenza di una zona citoplasmatica paranucleare. Il grado di eosinofilia di questa regione è simile a quello che si è osservato nell'idiosoma degli spermatidi tipici <sup>(5)</sup>. È chiaro, come anche altre considerazioni suggeriscono, che si tratta di una formazione idiosomica. Nel rimanente citoplasma l'eosinofilia è meno intensa. In stadi più avanzati, quando ha già avuto inizio la frammentazione del nucleo, l'eosinofilia dell'idiosoma persiste; altrettanto eosinofili appaiono i filamenti originatisi in corrispondenza dell'idiosoma. È interessante notare che nello spermatozoo atipico maturo l'eosinofilia non è mai legata ad elementi granulari o globulari compresi entro i limiti della visibilità microscopica, ma pare piuttosto localizzata nel fascio di fibrille e diffusa nel citoplasma interposto tra le fibrille stesse.

Degno di rilievo è il comportamento della reazione di Hotchkiss (acido periodico-Schiff, PAS) nel corso della spermatogenesi atipica.

La reazione è negativa negli stadi I) e II). Nello stadio III), durante la frammentazione nucleare, si ha una forte reazione positiva al livello dei granuli di cromatina derivati dalla frammentazione stessa. Non è stato possibile decidere se la PAS-positività insorga solo dopo la scomparsa della Feulgen-positività, o se piuttosto vi sia un certo lasso di tempo in cui entrambe le reazioni siano positive in corrispondenza dello stesso granulo.

Sempre allo stadio III) la PAS oltre che nei granuli diviene positiva anche nel rimanente citoplasma. L'unica regione che rimane PAS-negativa è l'idiosoma. Quando poi si costituisce il fascio di filamenti anche questo è perfettamente PAS-negativo; ciò è evidente in stadi più avanzati in cui il fascio di filamenti, che attraversa tutto il corpo cellulare, spesso presentando una o più anse, appare come una striscia incolore separante due campi fortemente PAS-positivi.

Col procedere della fase di allungamento dello spermatozoo, le formazioni globulari PAS-positive si distribuiscono lungo lo spermio stesso, contemporaneamente diminuendo di diametro, sicché lo spermio maturo non presenta più globuli PAS-positivi ma granuli assai piccoli e numerosi che con difficoltà si distinguono nella compagine dell'interposto citoplasma anch'esso lievemente positivo alla reazione di Hotchkiss. La regione terminale anteriore dello spermio, corrispondente all'acrosoma dello spermatozoo tipico, è PAS-negativa.

La PAS-positività degli elementi atipici, immaturi e maturi è soppressa quando la reazione di Hotchkiss si faccia precedere da un trattamento con anidride acetica-piridina della durata di 45'. L'acetilazione seguita da trattamento con KOH reintegra la PAS-positività. L'estrazione dei glicolipidi con metanolo-cloroformio a caldo per 24 h non altera la PAS-positività.

Queste esperienze dimostrano che la positività della reazione di Hotchkiss è da attribuirsi ai risultati dell'ossidazione dei gruppi glicolici in posizione 1,2 di un polisaccaride.



L'ossidazione con acido periodico è indispensabile per ottenere colorazione col reattivo di Schiff. È comunque sufficiente un tempo di ossidazione molto ridotto (1').

L'incubazione in saliva concentrata a 37° per 30' elimina la PAS-positività dello stroma citoplasmatico mentre non altera la PAS-positività dei granuli e dei globuli. Lo spermio maturo, dopo digestione amilasica appare di conseguenza più pallido rispetto allo spermio che non sia stato sottoposto all'azione dell'enzima.

Dai dati su esposti si possono trarre le conclusioni seguenti:

1° Il nucleo, durante la spermatogenesi atipica di *Murex*, subisce modifiche le quali sotto certi aspetti ricordano quelle riscontrate in *Columbella*, sotto altri aspetti quelle descritte in *Littorina*. Come infatti avviene nella spermatogenesi atipica di *Columbella*, anche in *Murex* il nucleo subisce un processo di frammentazione che è però preceduto da una fase di contrazione simile a quella descritta per le cellule nutrici di *Littorina* <sup>(2)</sup> e assente in *Columbella*.

2° Per quanto riguarda la citochimica degli acidi nucleici, la spermatogenesi atipica di *Murex trunculus* si svolge con le stesse modalità che in *Columbella*, *Littorina*, *Viviparus*. Pertanto valgono anche per questa specie quelle considerazioni fatte nei lavori precedenti <sup>(1, 2, 10)</sup> circa la diminuzione e la successiva scomparsa dallo spermatozoo maturo di acido timonucleico e ribonucleico citochimicamente rivelabili.

3° Anche in *Murex* la frammentazione del nucleo e il corrispondente rarefarsi di sostanze Feulgen-positivo, è in chiaro rapporto con la comparsa di granuli Hotchkiss positivi. Questo reperto conferma la possibilità di una origine nucleare del polisaccaride, prospettata da Schrader e Leuchtenberger in *Helix* <sup>(11)</sup>, da me in *Columbella*, e già precedentemente discussa <sup>(10)</sup>. In *Murex*, tuttavia, come messo in evidenza dai risultati della reazione di Hotchkiss previa digestione amilasica, e a differenza di quanto si è visto in *Columbella*, parte del polisaccaride è eliminata dal trattamento enzimatico. La frazione amilasi-labile non è però quella di origine nucleare, dato che i granuli derivati dalla frammentazione del nucleo sono amilasi resistenti. È pertanto presumibile che negli spermatozoi atipici di *Murex*, a differenza di quanto osservato in *Columbella*, anche elementi citoplasmatici possano partecipare alla formazione del polisaccaride. Analogo fenomeno è stato osservato nella regione caudale degli spermatozoi tipici <sup>(5)</sup>.

4° Sia l'idiosoma che i flagelli citoplasmatici non contengono acido ribonucleico né polisaccaridi. L'elevata acidofilia di queste formazioni potrebbe essere indice della loro costituzione essenzialmente proteica (prot. basiche). La natura del fascio di filamenti che attraversano lo spermio atipico è simile a quella del filamento intranucleare dello spermatozoo tipico, anche esso di probabile origine centriolare <sup>(5)</sup>. Il fenomeno è esagerato nello spermio atipico dove, essendo avvenuta una moltiplicazione dei centrioli, quello che nello

(10) B. BATTAGLIA, «Suppl. Ricerca Scient.», Anno 23°, 125 (1953).

(11) F. SCHRADER e C. LEUCHTENBERGER, «Proc. Nat. Acad. Sci.», 38, 99 (1952).

spermatozoo normale è un tenue filamento appena percettibile, nello spermatozoo apirenico diventa un fascio fibrillare cospicuo che pertanto meglio si presta ad osservazioni citochimiche.

Le reazioni citochimiche dell'idiosoma e del fascio di filamenti, l'assenza di acido ribonucleico, la presenza di un polisaccaride amilasi labile di origine citoplasmatica, la PAS-negatività dell'acrosoma e, infine, la graduale scomparsa della fosfatasi alcalina nel corso della spermatogenesi atipica, sono reperti che rendono evidente l'omologia tra gli elementi aberranti e gli spermatozoi tipici funzionali. Un carattere citochimico differenziale è dato dalla presenza, nello spermio atipico, del polisaccaride amilasi-resistente, il quale però deriva dalla degradazione dei materiali nucleari.

In definitiva il nucleo e i suoi derivati determinano l'insorgenza di differenze citochimiche tra le due linee. È verosimile che il nucleo stesso sia il responsabile del cospicuo accrescimento del citoplasma e delle relative notevoli trasformazioni che tanto fanno differire, dal punto di vista morfologico, lo spermatozoo atipico da quello tipico. Un elemento a favore di questa ipotesi, secondo cui la causa di un decorso abnorme della spermioistogenesi sia da ricercarsi nell'effetto perturbatore di alterate condizioni nucleari, è dato dal fatto che l'anormale auxocitosi dei gonociti atipici di *Murex* ha luogo *soltanto dopo* che il nucleo ha raggiunto un volume assai più elevato che nei normali spermatogoni.

Per concludere, un accurato studio morfologico e citochimico comparato dei fenomeni di spermatogenesi aberrante è probabilmente il solo mezzo che possa fornire elementi utili per chiarire il significato della spermatogenesi atipica dei Prosobranchi. L'estensione delle indagini ai fenomeni analoghi che non poco numerosi si riscontrano in vari gruppi animali può inoltre costituire un mezzo di ricerca atto a rivelare, in via indiretta, le precise competenze dei costituenti nucleari e citoplasmatici nel fenomeno spermioistogenetico normale.

**Fisiologia.** — *Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili.* — IV. *Sul comportamento di una reazione colorata*<sup>(\*)</sup>. Nota di AMALIA AMICI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. G. AMANTEA.

Ricerche precedenti<sup>(1)</sup> avevano permesso di mettere in evidenza che alcune sostanze adrenalinosimili, associate a dosi letali di stricnina, ed iniettate contemporaneamente nella stessa sede a *Mus musculus*, si rivelavano capaci di evitarne la morte non solo, ma anche l'insorgere delle convulsioni stricniche.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Perugia.

(\*\*) Nella seduta del 13 febbraio 1954.

(1) A. AMICI, *Sul comportamento di Mus musculus trattati con iniezione contemporanea di dosi letali di stricnina e varie sostanze adrenalinosimili.* In corso di stampa in « Rivista di Biologia ».

Esclusa, per le ragioni precedentemente esposte, la possibilità che ciò fosse dovuto al fattore vasocostrizione, e quindi a modificazioni della velocità di assorbimento dell'alcaloide; escluso anche <sup>(2-3)</sup> l'intervento di meccanismi nervosi di origine encefalica, ci siamo orientati verso l'unica e più possibile ipotesi di lavoro che ci potesse permettere di renderci conto dell'intimo perché dei fatti osservati: la formazione, cioè, nelle nostre condizioni di esperimento, di composti di addizione tra la stricnina e alcune delle sostanze ad essa associate.

Un incoraggiante, anche se indiretto, appoggio a tale nostra ipotesi, è stato dato dai risultati di prime ricerche istituite al riguardo. L'iniezione, infatti, di stricnina, in dose letale, e di un simpaticomimetico, la simpamina, eseguita sì nello stesso momento, ma in sede diversa a *Mus musculus*, ha permesso alla stricnina di svolgere la sua normale, classica azione senza che la sostanza associata glielo impedisse; non solo, ma in qualche caso è apparsa da questa addirittura favorita <sup>(4)</sup>.

Prima ancora di procedere nell'analisi sperimentale del problema, abbiamo voluto vedere, se ci fosse stato possibile dare alla nostra ipotesi una ulteriore conferma, di natura diversa, ma più diretta di quella precedente.

Ed abbiamo sfruttato, al riguardo, la nota, caratteristica reazione che col bicromato di potassio dà la stricnina disciolta in acido solforico concentrato.

Non poteva rispondere al nostro scopo la tecnica abitualmente seguita: sciogliere cioè un granellino di stricnina in  $H_2SO_4$ , e, strisciando nell'acido un cristallo di bicromato, provocare la caratteristica colorazione azzurro-violetta.

Ci siamo dovuti proporre, pertanto, di realizzare condizioni più adeguate alla necessità di servirci *in vitro* delle stesse soluzioni e delle stesse dosi adoperate *in vivo* per i *Mus musculus* e le rane.

Ed abbiamo pensato di sfruttare in provetta la reazione accennata, utilizzando le eventuali variazioni cromatiche della zona di contatto tra acido e bicromato.

Aggiunto il nitrato di stricnina all' $H_2SO_4$  concentrato, si agita per circa 30'', indi a che si stratifica sull'acido la soluzione di bicromato potassico: compare subito, in corrispondenza della interfaccia, un anello di colore bleu violetto, che aumenta man mano di spessore - mentre contempora-

(2) A. AMICI, *Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e varie sostanze adrenalinomimetiche*. - I. Qualche rilievo a giustificazione di una ipotesi di lavoro. « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XVI, fasc. 2, pp. 257-263 (1954).

(3) A. AMICI, *Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e varie sostanze adrenalinomimetiche*. - II. Azione della iniezione associata di stricnina e simpamina sulla rana spinale. « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XVI, fasc. 3, pp. 379-384 (1954).

(4) A. AMICI, *Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e varie sostanze adrenalinomimetiche*. - III. Azione della associazione stricnina-simpamina iniettate contemporaneamente ma in sede diversa. « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XVI, fasc. 4, pp. 499-503 (1954).

neamente si intensifica la colorazione – fino a raggiungere entro pochi minuti l'aspetto definitivo.

Avuta, così, a disposizione una reazione utilizzabile allo scopo, abbiamo cimentato con essa sia la stricnina, sia l'associazione simpamina–stricnina, esattamente nelle medesime condizioni di esperimento.

Orbene, mentre la stricnina ha dato risposta pronta e chiarissima, nel caso del miscuglio stricnina–simpamina, la comparsa dell'anello caratteristico si è avuta solo dopo la terza ora, non solo, ma per raggiungere il suo aspetto definitivo, di spessore ed intensità di tinta, l'anello bleu–viola ha impiegato un tempo notevolissimo.

Ciò in tutte le numerose prove all'uopo istituite.

Accertato così il fatto, abbiamo voluto cimentare *in vitro* le stesse dosi adoperate *pro chilo in vivo*. Ed abbiamo eseguito una prova usando, accanto al controllo con sola stricnina, nella dose di mg 0,07, la stessa quantità di stricnina associata alle medesime dosi scalari di simpamina *in vivo* adoperate, cioè mg 1 o 2 o 3.

Disposti vari ordini di provette in serie scalare, ed immerse in esse la stricnina o la stessa più le varie dosi di simpamina accennate, si è visto che, conforme a quanto notato nelle prime prove, mentre nelle provette di controllo la comparsa dell'anello era immediata e la sua evoluzione si compiva entro i pochi minuti accennati, e nelle provette che contenevano l'associazione di mg 1 di simpamina alla stricnina l'anello compariva dopo la terza ora, evolvendo lentamente, esso compariva invece solo dopo 6 ore circa nelle provette che contenevano l'aggiunta di mg 2 di simpamina e solo dopo 14 in quelle che ne contenevano mg 3.

Ritardo direttamente proporzionale, in senso lato, alla quantità di simpamina presente nelle provette. E che ci invogliò a ripetere l'esperimento usando, accanto alle precedenti, dosi maggiori di simpamina.

Ripetuta la prova, aumentando di due provette ogni serie scalare, in queste ultime furono aggiunti alla stricnina 4 o 5 mg di simpamina.

La prova confermò i risultati ottenuti in precedenza fino alle provette contenenti 1 o 2 o 3 mg di simpamina; nelle provette invece contenenti 4 mg di simpamina l'anello comparve nel termine di mezz'ora, e solo qualche minuto dopo che nelle provette di controllo, in quelle che di simpamina contenevano mg 5.

Reazione paradossa, dunque, ma che non ci meraviglia, in quanto le forti quantità di simpamina avrebbero potuto disturbare o comunque modificare la cinetica della reazione.

E qui ci fermiamo nella esposizione dei nostri risultati. In realtà noi abbiamo seguito le variazioni cromatiche delle provette per numerosi giorni consecutivi. Ma riteniamo prematuro parlarne qui, in quanto consideriamo la tecnica ora da noi seguita ancora imperfetta, sebbene sufficiente allo scopo per il momento prefissoci. E la utilizzazione della modificazione cromatica alla interfacie  $H_2SO_4$  concentrato/bicromato in soluzione è tuttora oggetto di studio da parte nostra.



Ci limitiamo qui a fare presente che non possono essere ovviamente considerate ottimali, per la cinetica della reazione stessa, le condizioni di esperimento da noi necessariamente dovute realizzare, sia per ciò che riguarda i rapporti quantitativi tra stricnina e simpamina (mancanza di equimolecolarità) - ma abbiamo detto in precedenza che si voleva adoperare *in vitro* le stesse dosi adoperate *in vivo* -; sia per il titolo della soluzione di bicromato che pure ha notevole importanza e che anch'esso tuttora è oggetto di studio.

Ritorniamo su questa reazione quando saremo sicuri di averla messa bene a punto.

Qui vogliamo solo rilevare che anche il risultato delle predette prove *in vitro* conferma ancora una volta che dovremmo essere nel vero pensando che i mancati effetti stricnici, osservati per l'associazione stricnina-sostanze adrenalinosimili, nelle condizioni sperimentali di cui alle nostre Note precedenti, debbano essere, più che ad altro, riferiti alla formazione di prodotti di addizione tra la stricnina e la sostanza adrenalinosimile.

E in questo senso ci ripromettiamo di ulteriormente indagare.

**Entomologia.** — *Singolari strutture glandolari nel torace e nell'addome dei maschi di alcune specie di Neurotteri Crisopidi* (\*). Nota di MARIA MATILDE PRINCIPI, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. GRANDI.

Nell'VIII dei miei *Contributi allo studio dei Neurotteri italiani*, pubblicato nel 1949<sup>(1)</sup>, avevo messo in evidenza un particolare comportamento del tegumento dei terghi e degli sterni degli uriti dal terzo all'ottavo nei maschi di *Chrysopa septempunctata* Wesm. Gli interrogativi relativi all'origine ed alla funzione della struttura osservata, ai quali non mi era stato possibile di dare allora una risposta esauriente, mi hanno indotto a riprendere le indagini in argomento e ad estenderle ad altre specie della medesima famiglia. In questa Nota sono pertanto esposti i risultati a cui le mie ricerche sono giunte.

In *Chrysopa septempunctata* Wesm. ho potuto iniziare l'esame dallo stadio di pupa. Quivi, fin dal sesto giorno dopo la muta, nelle regioni tergal e sternali degli uriti indicati, si ravvisano sotto la vecchia cuticola già distaccata dall'epitelio e sopra quella nuova in via di formazione piccoli rilievi cupoliformi, mostranti ciascuno una cameretta interna appena abbozzata e apertesi alla sommità. L'epitelio sottostante appare di spessore relativamente notevole, con i confini delle singole cellule poco o nulla distinguibili (e perciò

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Entomologia dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta dell'8 maggio 1954.

(1) M. M. PRINCIPI, *Contributi allo studio dei Neurotteri Italiani*. - VIII. *Morfologia, anatomia e funzionamento degli apparati genitali nel gen. « Chrysopa » Leach (« Chrysopa septempunctata » Wesm. e « C. formosa » Brauer)*. « Boll. Istit. Entom. Univ. Bologna », XVII, 1948-1949 (1949), pp. 316-362, figg. I-XXX.

in uno stato subsinciziale) e con i nuclei grandi, ovoidali, strettamente ravvicinati tra loro e con l'asse maggiore normale alla superficie del tegumento.

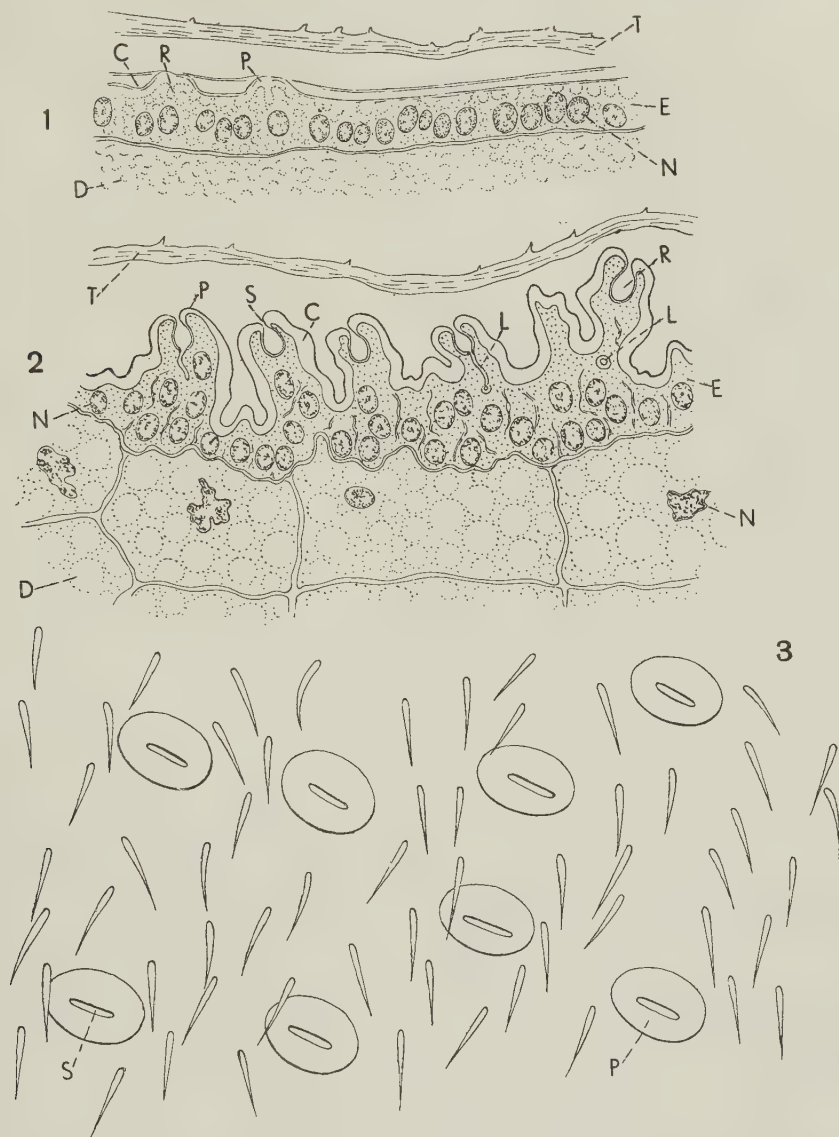


Fig. 1. — *Chrysopa septempunctata* Wesm.

1. Sezione normale longitudinale del tegumento dell'addome di una pupa di maschio nel sesto giorno di età. — 2. La medesima di una pupa vicina allo sfarfallamento. — 3. Microformazioni del tegumento dell'addome di un maschio viste dall'esterno: C, cuticola; D, tessuto adiposo; E, epitelio; L, canalicolo di emissione; N, nucleo; P, microformazione cupoliforme; R, cameretta interna; S, sua apertura esterna; T, cuticola della pupa.

All'ottavo giorno, in pupe prossime allo sfarfallamento, il tegumento dell'immagine, al disotto della vecchia cuticola, risulta minutamente pieghettato, con le pieghe disposte in senso trasversale. La nuova cuticola ha uno spessore modesto, si colora con eosina e presenta definitivamente formate ai terghi ed agli sterni le piccole cupolette a base ellittica il cui diametro mag-

giore è pressoché normale all'asse longitudinale del corpo dell'insetto. Ciascuna di esse è provvista di un'ampia cameretta interna lievemente costretta medialmente (così da rimanere distinta in due porzioni), a pareti sottilissime, comunicante con l'esterno per mezzo di una fessura trasversa. L'epitelio è sempre piuttosto alto, con le anse delle pieghettature strettamente addossate le une alle altre e con i nuclei, subsferoidali e vistosi, conseguentemente disposti in piani diversi.

Nell'insetto adulto, entro 24 ore dallo sfarfallamento, la cuticola non ha raggiunto ancora lo spessore normale, le microformazioni cupoliformi sono regolarmente distanziate le une dalle altre e l'epitelio sottostante, disteso, è relativamente basso, con elementi cellulari senza confini bene definiti e con i nuclei subovoidali e giacenti su di uno stesso piano con l'asse maggiore parallelo alla superficie del tegumento stesso.

Qualche giorno dopo, nelle immagini pronte per l'accoppiamento, si osserva invece una struttura assai modificata. Lo spessore dell'epitelio si è notevolmente, sebbene irregolarmente, accresciuto a spese di alcuni elementi cellulari sensibilmente ingranditi, nell'interno dei quali è comparso un ampio vacuolo che li occupa quasi completamente. Il diametro massimo di tali cellule, la cui forma è subsferoidale o subovoidale, può superare di cinque-sei volte il diametro di quelle non differenziate. Il nucleo, nelle cellule non del tutto accresciute, è grande e subsferoidale; nelle cellule di dimensioni più vistose appare invece in via di degenerazione. Gli altri elementi dell'epitelio non modificati rimangono irregolarmente distribuiti intorno a quelli in cui si è formato il vacuolo, così che i loro nuclei risultano disposti su piani diversi. Le cellule che si accrescono e si vacuolizzano si trovano in coppia presso ciascuna microformazione cupoliforme. Da ognuna di queste cellule parte un sottile canalicolo efferente di moderata lunghezza, che viene a trovarsi a contatto con il vacuolo della cellula stessa e che si apre nel fondo di una delle due porzioni in cui è distinta la cameretta interna delle microformazioni in discorso. In tale cameretta adunque sboccano due canalicoli ed in essa si raccoglie pertanto la sostanza proveniente dai vacuoli di due cellule; sostanza che, in alcuni preparati fissati e trattati con ematossilina ed eosina, compare ammassata in un piccolo grumo e lievemente colorata in viola. Non è probabilmente errato supporre che si tratti di un secreto odorifero, la cui funzione sia connessa con i preliminari dell'accoppiamento.

Procedendo oltre nella vita delle immagini, i vacuoli tendono ad ingrandirsi ed il citoplasma a ridursi ad uno straterello periferico sempre più esile. Il nucleo degenera e si trasforma in un ammasso informe di cromatina. Anche gli altri elementi dell'epitelio non differenziatisi si riducono ed i loro nuclei degenerano. Si arriva così alla struttura, che io avevo avuto occasione di osservare nel mio lavoro precedente, caratterizzata da uno strato di ampie concamerazioni adiacenti le une alle altre, ma non comunicanti tra loro, che, per compressione, hanno assunto una forma più o meno prismatica (appaiono infatti quadrangolari in sezione trasversale e poligonali in quelle tangenziali). A contatto con la cuticola soprastante e con il tessuto adiposo sottostante,

nonché negli stretti interstizi tra concamerazione e concamerazione, rimangono, sotto forma sinciziale, gli avanzi delle cellule non differenziate.

Microformazioni in tutto simili a quelle descritte per *Chrysopa septempunctata* Wesm. sono ugualmente distribuite, nei terghi e negli sterni degli

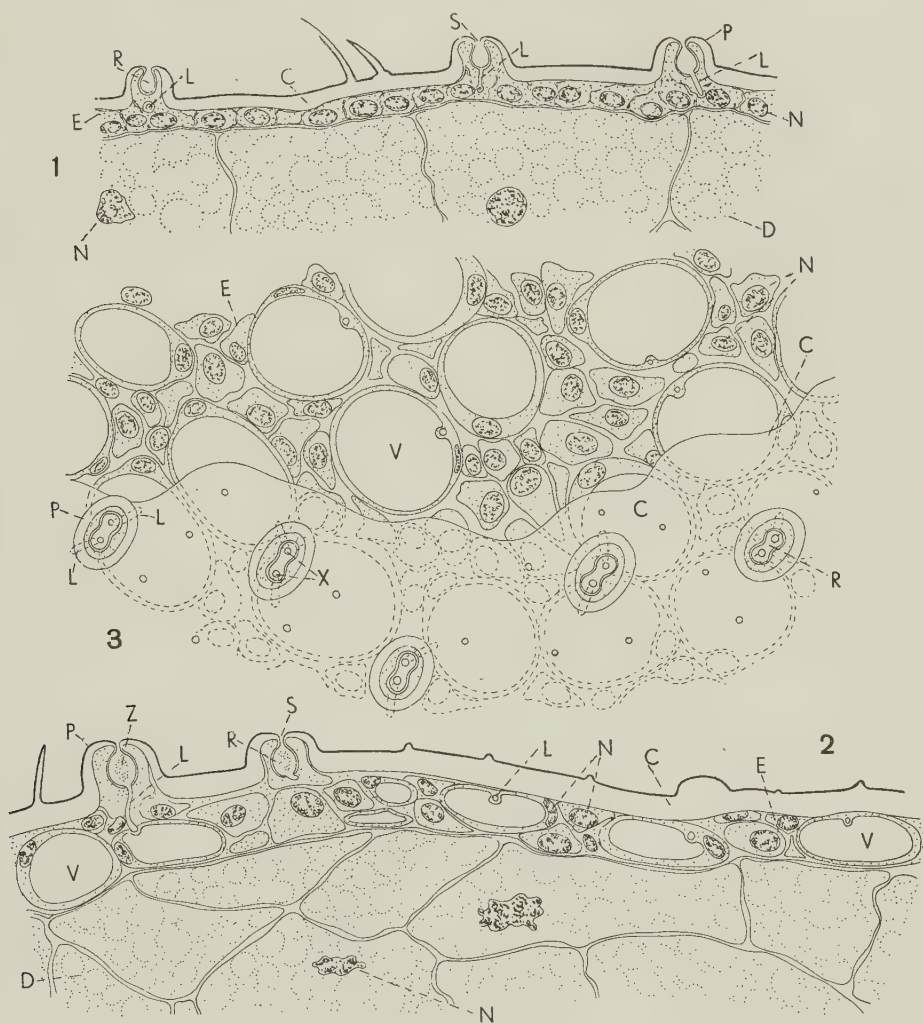


Fig. 2. — *Chrysopa septempunctata* Wesm.

1. Sezione normale longitudinale del tegumento dell'addome di un maschio neosfarfallato. — 2. La medesima di un maschio pronto per l'accoppiamento. — 3. Sezione tangenziale del tegumento dell'addome (la cuticola è stata asportata dal taglio solo in parte) di un maschio, nelle stesse condizioni di quello del numero precedente: V, vacuolo; X, sbocco del canalicolo di emissione; Z, secreto (le altre lettere come nella fig. 1)

uriti dal terzo all'ottavo, nei maschi di *Chrysopa formosa* Brauer e di *C. viridana* Schn. In *C. perla* Lin. esse si trovano solo negli sterni.

I maschi di *Chrysopa flavifrons* Brauer, di *G. ventralis* Curtis e di *C. ventralis prasina* Burm., forme che, come in parte è già noto, presentano per i diversi stadi un comportamento morfologico ed etologico distinto da quello delle specie prima ricordate, mostrano una struttura del tegumento apparente-



mente differente da quella sopra descritta, ma probabilmente a funzione non dissimile, la quale però non è localizzata nell'addome, bensì nei noti toracici. In questi maschi il pronoto differisce da quello delle femmine per essere assai più espanso ai lati, soprattutto nella regione posteriore, dove

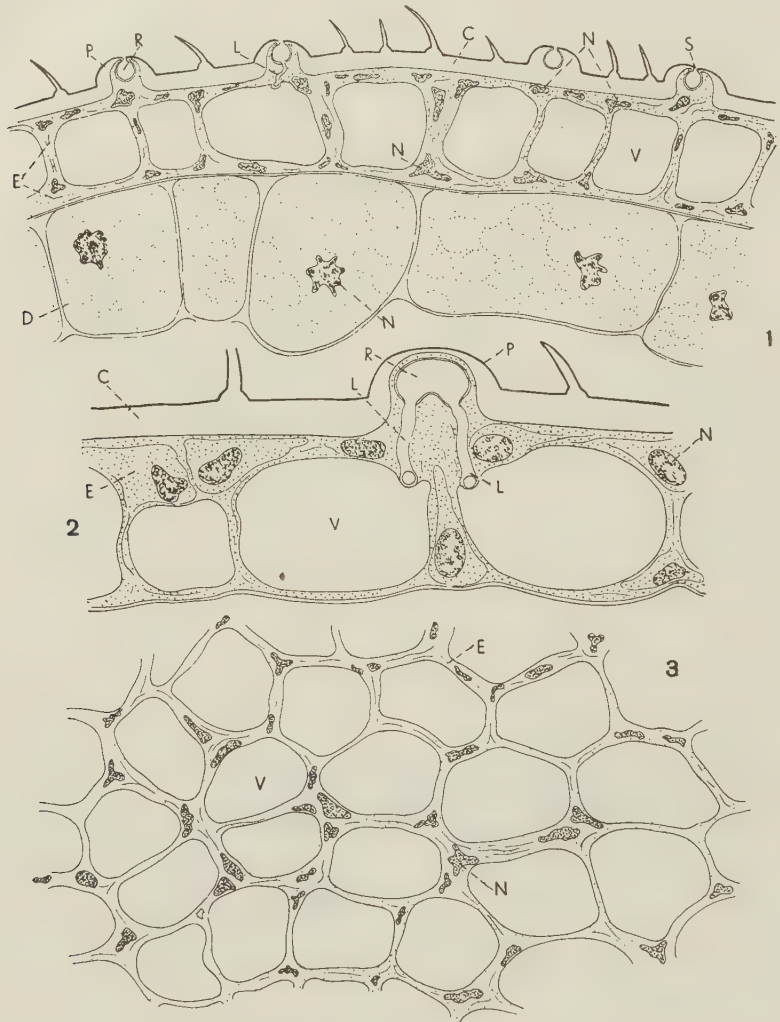


Fig. 3. - *Chrysopa septempunctata* Wesm.

1. Sezione normale longitudinale del tegumento dell'addome di un maschio di età più avanzata di quello della sezione n. 2 della fig. 2. - 2. Sezione normale trasversale (ad un ingrandimento più forte) del tegumento dell'addome di un maschio di età un poco minore di quella del precedente. - 3. Sezione tangenziale del tegumento dell'addome di un maschio della medesima età di quello del n. 1 (lettere come nelle altre figure).

ciascuna banda, ripiegandosi lateralmente e ventralmente, determina una sporgenza abbastanza marcata. Ora, in tutta la superficie del pronoto ed in buona parte di quella del prescuto, del mesoscuto, del mesoscutello, del metascuto e del metascutello, sono distribuite con uniformità (in maniera pressoché uguale a quella delle cupolette degli uroterghi e degli urosterni delle altre specie) numerosissime microformazioni caliciformi, nel fondo delle quali si

trovano due aperture: una più grande ed emicircolare, ed una più piccola, subcircolare. In corrispondenza di tali territori si osserva il seguente comportamento istologico dell'epidermide. A contatto con la cuticola si rileva un epitelio di spessore relativamente modesto, a carattere sinciziale, con nuclei subsferoidali o subvoidali assai ravvicinati tra loro e giacenti più o meno sullo stesso piano. Tale epitelio ha un aspetto molto simile a quello delle regioni non provviste delle microformazioni caliciformi. Sotto all'epitelio descritto, ed in stretto contatto con esso, si vedono, stipate le une contro le altre, delle grandissime cellule subprismatiche ed assai alte, appoggiate con una faccia al tessuto adiposo sottostante. Esse, in soluzione fisiologica, appaiono biancastre e piuttosto opache. Nei preparati fissati e trattati con ematossilina ed eosina mostrano un citoplasma a struttura finemente granulare, sprovvisto di vacuoli, debolmente colorato di rosa violaceo. I nuclei sono grandi, subsferoidali, molto rifrangenti, di solito situati nella porzione della cellula prossima al tessuto adiposo. Per quasi i due terzi della sua lunghezza ciascuna cellula è medialmente percorsa da un sottile canalicolo effidente che, poco prima di abbandonare la cellula medesima, subisce una lieve costrizione e, quindi, attraversa l'epitelio sovrastante in corrispondenza del quale, dopo aver presentato un tratto caratterizzato da due deboli dilatazioni, si allarga in una vescichetta comunicante con l'esterno per mezzo dell'apertura più ampia sopra ricordata, situata nel fondo di ciascuna microformazione caliciforme. Nei preparati trattati con ematossilina ed eosina si nota una sostanza debolmente colorata di viola, che proviene dal canalicolo e che si ammassa a formare una sferuletta nella cavità del calice. L'apertura circolare più piccola, a cui ho accennato, immette invece in un brevissimo canalicolo subatrofico che termina entro l'epitelio sottostante. Nei preparati non si nota alcuna sostanza che fuoriesca da esso.

È bene ricordare qui, infine, che in altre specie del gen. *Chrysopa* Leach (fra quelle fino ad ora esaminate *Chrysopa carnea* Steph., *C. flava* Scop. e *C. vittata* Wesm.) non si osservano nei maschi, né nel torace né nell'addome, microformazioni cuticolari paragonabili a quelle descritte.

Quanto sopra può autorizzare alcune considerazioni generali.

Abbiamo veduto come, in seno ad un gruppo di specie che, per fondamentali caratteri di affinità, i moderni sistematici conservano, almeno per il momento, nel medesimo genere (*Chrysopa* Leach), si sia, nei maschi, determinato il differenziamento di un apparato glandolare, il quale pur esplicando, per quanto è stato possibile arguire, la medesima funzione, compare in regioni diverse del corpo e presenta, in una con la localizzazione, un comportamento istologico diverso. Abbiamo però veduto contemporaneamente come tale apparato manchi in una parte dei rappresentanti del genere, e cioè, ad esempio, nelle *Chrysopa flava* Scop., *vittata* Wesm. e *carnea* Steph., specie le quali possiedono larve morfologicamente più vicine al tipo emerobioide, ritenuto, dagli Autori, primitivo rispetto a quello dei Crisopidi <sup>(2)</sup>.

(2) Le larve di *Chrysopa carnea* Steph. sono tuttavia molto simili, per alcune caratteristiche, come lo sviluppo dei tubercoli setigeri, a quelle delle specie nominate in seguito.

Fra le specie, ove l'apparato in discorso è presente, si è rivelato che alcune, come, ad esempio, *Chrysopa formosa* Brauer, *C. perla* Lin., *C. septempunctata* Wesm. e *C. viridana* Schn., le cui larve offrono una conformazione che si potrebbe considerare più specializzata rispetto a quella delle precedenti, lo mostrano confinato in un certo numero di segmenti addominali, e che in esso le modificazioni subite dall'epidermide, pur portando, negli ultimi stadi,

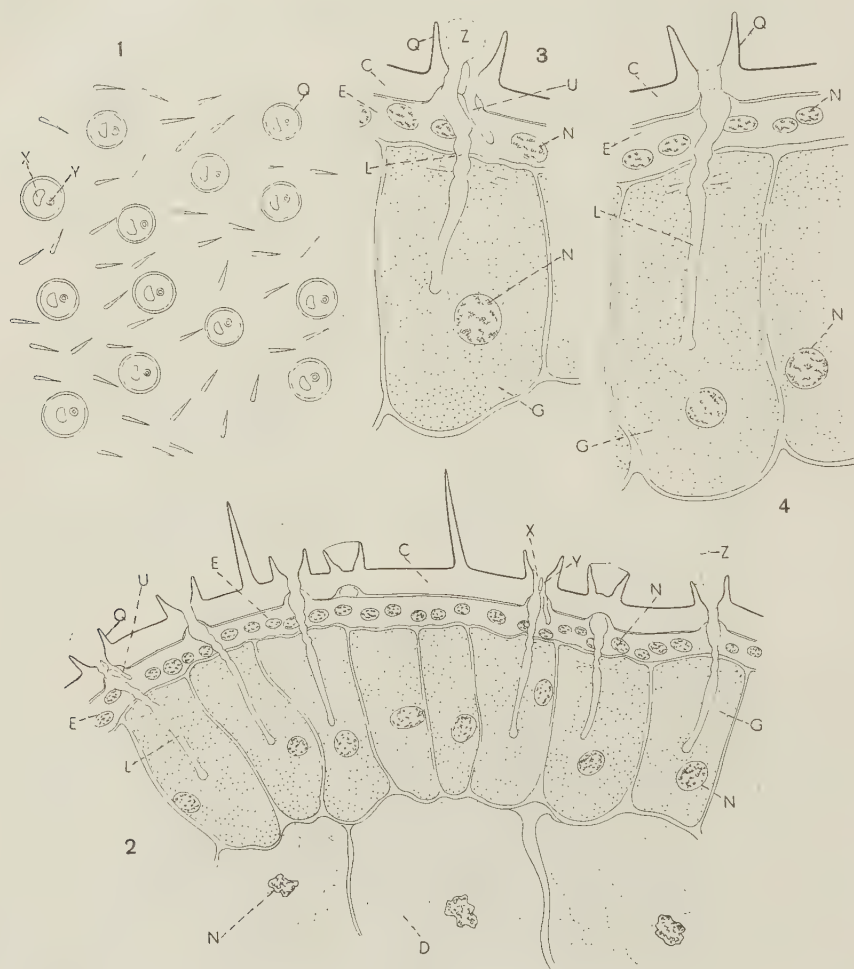


Fig. 4. - *Chrysopa flavifrons* Brauer.

1. Microformazioni del tegumento del torace di un maschio, viste dall'esterno. - 2. Sezione normale trasversale del tegumento del pronoto di un maschio. - 3 e 4. Particolari della sezione precedente a più forte ingrandimento: G, cellula glandolare; Q, microformazione caliciforme; U, canalicolo subatrofico; Y, sbocco di detto canalicolo (le altre lettere come nelle figure precedenti).

ad una struttura la quale non permette più di riconoscere la fondamentale costituzione di partenza, non comprendono tuttavia la differenziazione di ghiandole nel senso stretto del termine, ma si limitano all'accrescimento di una parte degli elementi dell'epitelio tegumentale dei territori interessati ed alla formazione nel loro interno di un ampio vacuolo comunicante per mezzo di un canalicolo con i rilievi cuticolari corrispondenti.

Altre specie invece, come la *Chrysopa* Brauer e la *C. ventralis* Curtis con la sua sottospecie *prasina* Burm., le cui larve rientrano in un tipo ancor più evoluto di quello contemplato per le precedenti, presentano l'apparato in parola localizzato nel torace e caratteristico perché costituito da grandi cellule glandolari specializzate, e cioè da glandole unicellulari vere e proprie, situate sotto un epitelio sinciziale ed in corrispondenza, anche qui, di particolari formazioni cuticolari esterne diverse però dalle altre sopra ricordate.

I fatti posti in rilievo potrebbero far pensare che la formazione dell'apparato glandolare oggetto della presente Nota abbia seguito, evolutivamente, una via parallela a quella percorsa dal comportamento di altri organi di stadi diversi delle stesse specie. Ma questo è un terreno infido sul quale non è prudente avventurarsi, e tanto meno fino a quando non sia stato possibile indagare il fenomeno obbiettivamente in un campo ben più vasto. Resta, ad ogni modo, provato ancora una volta come nell'ambito di forme affini, aventi costumi rientranti in un piano generale comune, organi che sembrano destinati a funzioni di sensibile importanza e che sono presenti in certe specie, manchino integralmente in altre, senza che perciò, almeno apparentemente, il comportamento (sensu lato) di dette specie ne risulti modificato o, comunque, compromesso.

## COMMEMORAZIONI

### Commemorazione del Corrispondente Alfredo Pochettino.

Tenuta (\*) dal Socio ELIGIO PERUCCA

Nacque a Roma il 7 novembre 1876 e in Roma ALFREDO POCHETTINO compì i suoi studi laureandosi in Fisica il 27 giugno 1898.

Subito dopo ottenne, per due anni successivi, il premio Corsi di perfezionamento in Fisica.

Contemporaneamente, e fino al 1902, fu alunno interno dell'Istituto di Fisica in Roma; indi fu Assistente presso l'Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, e alla Meteorologia ed a studi affini si dedicò con vero entusiasmo fino al 1906.

Libero docente in Fisica sperimentale nel 1903, Assistente all'Istituto di Fisica dal 1904 al 1907, riuscito secondo in terna, subito dopo O. M. Corbino, nel concorso del 1907 per la cattedra di Fisica sperimentale all'Università di Messina, veniva nominato all'Università di Sassari dal 1° gennaio 1908.

(\*) Nella seduta dell'8 maggio 1954.



Assunta questa cattedra, la conservava fino al 1915, passava indi alla cattedra di Fisica dell'Università di Genova e poco dopo, nel novembre del 1917, a quella dell'Università di Torino.

Questa cattedra egli tenne fino al collocamento fuori ruolo, cui seguì, nel 1952, il collocamento a riposo.

E a Torino si spegneva il 23 agosto 1953 dopo che, da molti mesi, la cagionevole salute l'aveva costretto a ritirarsi da quelle attività universitarie e accademiche che fino ad allora aveva curato con non comune diligenza.

Fu socio nazionale dell'Accademia delle Scienze di Torino dal 1920 e, dallo stesso anno, Socio Nazionale dell'Accademia di Agricoltura di Torino; fu Socio corrispondente dei Lincei dal 1924; dal 1907, e cioè dalla ricostituzione attuata dal Volterra, fu membro attivo ed autorevole della Società Italiana per il Progresso delle Scienze; più volte ne fu presidente della sezione di Fisica.

Dal 1° dicembre 1924 al 15 novembre 1928 fu Rettore dell'Università di Torino.

La fine della guerra ultima trovò il Pochettino Presidente dell'Accademia delle Scienze di Torino; nell'agosto del 1945 il C.L.N. si limitava a mutare la sua carica in quella di «Commissario» e tale Egli fu fino al maggio 1949.

Furono gli ultimi anni del secolo scorso a segnare gli inizi dell'attività scientifica di Alfredo Pochettino.

Essa proseguì con ritmo incessante intenso poliedrico fino alla prima guerra mondiale, per affievolirsi poi man mano che vennero moltiplicandosi, pur restando sempre sostanzialmente nell'ambito scientifico universitario, i compiti che Gli furono affidati.

Studente non ancora ventenne, iniziò i suoi scritti con la traduzione della relazione di W. C. Roentgen sulla scoperta dei raggi X nella nostra lingua, rendendo così note a tutti gli italiani, immediatamente dopo la pubblicazione tedesca, alcune delle pagine di fisica che più sono divenute famose con gli anni.

Conseguita la laurea, iniziò la pubblicazione delle sue ricerche personali e queste assunsero subito un carattere così vario da aver poi dato motivo a qualche riserva sui vantaggi che la ricerca avrebbe potuto trarne; vedremo entro quali limiti questa riserva va limitata.

Di più la sorte, o forse l'inclinazione personale del ricercatore, vollero che fossero toccati di regola argomenti così fisicamente complessi da risultare, di necessità, non ben determinati.

Ebbene: non credo di sminuire il rispetto che dobbiamo al Collega scomparso, indicando queste caratteristiche ed a queste riconducendo la causa del contenuto precipuamente descrittivo di buona parte dei suoi studi.

Non bisogna dimenticare che ben spesso è accaduto e accade, che i fisici sperimentali italiani si trovino limitati a realizzare solo quelle esperienze, relativamente elementari, che i pochi mezzi di cui dispongono i nostri laboratori permettono loro di effettuare; e questa causa porta necessariamente ad una certa inconstanza nei campi di ricerca coltivati.

Inoltre occorre constatare, all'esame degli argomenti trattati, che Pochettino rivelò chiaramente quanto la sua fosse anche una profonda inclinazione naturale per la curiosità sperimentale e questa è ben frequentemente alimentata proprio dai fenomeni più complessi.

Di questa curiosità sperimentale si deve fare merito, alto merito, a chi la possiede.

Sfogliando tra le pubblicazioni del Pochettino, in gran parte consegnate ai Rendiconti della nostra Accademia, non può non colpirci, già in una delle prime, l'eleganza della determinazione del grado di dissociazione dell'ipozotite dedotta da misure del rapporto dei calori specifici, rapporto posto appunto in relazione con il grado di dissociazione.

Fu interessante, anche se oggi può sembrare « *démodé* » lo studio sperimentale dello smorzamento delle oscillazioni in un risonatore acustico in funzione delle caratteristiche geometriche, ma teniamo presente che fu uno studio compiuto nel 1899 e a quella data non era affatto vecchia o « *démodée* » la classica e non facile opera di Rayleigh sulla teoria del suono alla quale la ricerca del Pochettino si appoggia, né erano vecchi i mezzi da lui impiegati nella ricerca. L'elettro-acustica era ben lontana dalla sua nascita.

Già prima della fine del secolo, e poi nel 1904, due Note del Pochettino concernono la variazione della componente orizzontale del magnetismo terrestre con l'altezza sul livello del mare e, se i risultati indussero l'autore ad una conclusione troppo ardita riguardo al limite di applicabilità della teoria di Gauss sulla origine del campo magnetico terrestre, merita ricordare che la prima di queste pubblicazioni costituisce il primo lavoro del Nostro nel dominio della fisica terrestre.

Da allora, e specialmente nel periodo 1902-1906, i lavori riguardanti questa scienza si moltiplicano, sia sotto forma di note accademiche, sia sotto forma di relazioni degli studi compiuti presso la Stazione Grandinifuga di Conegliano, indi presso il Campo Sperimentale di Castelfranco Veneto, da lui stesso organizzato e realizzato dietro incarico del prof. Blaserna.

In questo gruppo di lavori devono porsi quelli del solo Pochettino e quelli in collaborazione col prof. Sella relativi alle proprietà conduttrici dell'aria umida, alla dispersione elettrica per evaporazione di un liquido elettrizzato, alla prevalenza degli ioni negativi nell'aria durante la pioggia, alle tracce di radioattività nelle acque potabili comuni, alle varie cause della conducibilità dei gas tenuti in recipienti chiusi, tutte ricerche i cui risultati hanno ricevuto da altri ripetute conferme negli anni successivi. Nell'ultimo di questi studi, pubblicato insieme al prof. Sella nei Rendiconti dei Lincei del 1904, si conclude che la conducibilità osservata va attribuita a tre cause in gioco:

tracce di radioattività nell'aria racchiusa;

tracce di radioattività nel materiale costituente le pareti del recipiente;

radiazioni penetranti.

Si tenga presente che J. Mc. Lennan e E. F. Burton (1903) e E. Rutherford e H. L. Cook nello stesso anno furono i primi a parlare di radiazione penetrante e che occorre giungere fino alle esperienze di W. F. Hess (1911) e

W. Kolhöster (1912-13) e poi ancora alle esperienze di Hoffmann in Germania (1926) e di Millikan e Cameron in America (1928) perché la radiazione penetrante divenga con sicurezza la radiazione « cosmica »; sicché il lavoro di Sella e Pochettino va considerato primizia italiana.

Allo stesso periodo di tempo e allo stesso gruppo devono ascriversi i lavori sui temporali e sulla grandine.

Una decina d'anni dopo, Alfredo Pochettino, scrivendo dei suoi studi, tenne a far rilevare che fu uno dei primi a dubitare della efficacia dei cannoni anti-grandine, che furono le sue esperienze nelle due Stazioni Venete suindicate a « dimostrare completa ed irrefragabile la nessuna efficacia di una difesa contro la grandine basata sui cannoni a tromba e sulle bombe o sui razzi anche se questi esplodono ad altezze di 1000-1500 metri sul livello del suolo ».

Né con i cenni già fatti abbiamo esaurito il gruppo dei lavori di geofisica di quegli anni.

Occorre segnalare:

le determinazioni meteorologiche con lancio di palloni sonda;

le ascensioni aeronautiche a scopo meteorologico da lui compiute nel biennio 1902-04 e che costituiscono la prima ed unica serie italiana di ascensioni destinate a tale scopo scientifico;

le sue note sull'altezza delle nubi durante i temporali, ed altre ancora.

Inoltre si sovrappongono ai molteplici studi di geofisica, e poi assumono nettamente il sopravvento rivelando il predominante nuovo interesse del Pochettino, le ricerche sulle proprietà del selenio.

Per ragioni evidenti si affiancano a questi studi anche quelli su altri casi di fotoelettricità, ma - come si è detto - su tutti predominano le ricerche riguardanti le proprietà fisiche e fotoresistenti del selenio.

Lo stesso Pochettino ebbe a giudicare la serie dei suoi lavori su questo elemento chimico come la più autorevole tra quelle da lui pubblicate.

Le condizioni sperimentali via via realizzate dal nostro Autore, attratto dall'idea ambiziosa di fare luce sulle enigmatiche proprietà fotoresistenti del selenio, sono tra le più varie. Egli stesso scrive:

« Può sembrare, a prima vista, che in alcune ricerche appartenenti a questo gruppo io sia incorso nel difetto di introdurre, senza ragione, nuove complicazioni nelle condizioni, già per natura loro così intricate, di questo interessante problema.

« Ma ad un esame più attento ed obiettivo si riconosca che ogni esperienza ebbe uno scopo ben determinato o di controllo o di indagine nuova ».

Certo è che per alcuni lustri non mancò mai la citazione dei risultati delle ricerche del Pochettino da parte di coloro che ebbero a interessarsi del problema del selenio.

Le conclusioni raggiunte dal Nostro fisico non sono né brevi né semplici.

Basterà qui soltanto dire che dal loro insieme scaturiscono determinate le condizioni migliori per preparare cellule fotoresistenti al selenio della massima sensibilità alla luce e di soddisfacente costanza di comportamento.

Risulta constatata sperimentalmente la sensibilità alla luce dei preparati anche alla temperatura dell'aria liquida; si trovano condizioni di preparazione delle cellule fotoresistenti al selenio sulle quali la luce, anziché diminuire la resistenza elettrica della cellula l'aumenta; nelle cellule fotoresistenti al selenio si segnalano fenomeni di deviazione dalla legge di Ohm e di isteresi col tempo; e l'elenco dei risultati ottenuti potrebbe proseguire a lungo.

Ma dobbiamo riconoscere quanto diverso aspetto assumano oggi tutti quei risultati di fronte alla nuova fase del prolema del selenio nel quadro delle proprietà dei semi-conduttori quali sono oggi stabilite.

Certamente la svolta decisiva alle nostre conoscenze fu apportata dalla scoperta di Grondhal del raddrizzatore « secco » a contatto esteso e subito dopo del coesistente effetto fotoelettronico.

Stabiliti i fatti seguenti:

1° azione essenziale delle impurità sull'esistenza e sui caratteri delle bande di conduzione nei corpi detti semi-conduttori;

2° creazione di strati di sbarramento a conduzione elettronica e verso di conduzione fortemente preferenziale, ogni idea precedente si trovò sconvolta e fu abbandonato il complesso dei risultati sperimentali prima conosciuti per ricostruire le nostre conoscenze tutte da capo.

Ma non dobbiamo con ciò togliere merito a chi, per lunghi anni, nelle condizioni allora reputate soddisfacenti per l'esperienza, raccolse e segnalò un complesso di dati veramente cospicuo.

Ancora un altro gruppo di lavori, anche questo sensibilmente numeroso, è costituito dalle relazioni del Pochettino sulle sue ricerche nel campo della luminescenza, in particolare nel campo dei fenomeni di luminescenza nei cristalli minerali in conseguenza del loro bombardamento catodico.

Qui ancora, noi vediamo il Pochettino portato allo studio di un fenomeno estremamente attraente nell'osservazione, ma altrettanto complesso nelle origini.

Egli stesso, riconoscendone la dipendenza sostanziale da piccole eterogeneità, sia chimiche sia strutturali, additò lo studio della emissione di catodoluminescenza come un mezzo per scoprire tali piccole eterogeneità là dove non sono applicabili gli ordinari metodi cristallografici ed ottici.

L'evidente passione dello sperimentatore per l'osservazione ancora una volta lo legava ad un insieme di fatti per i quali, allo stato delle conoscenze del momento, poco si poteva sperare più della semplice descrizione morfologica.

Se anche per i problemi di luminescenza, sia sotto l'azione di onde elettromagnetiche, sia sotto l'azione di particelle elementari, si sono fatti in questi ultimi decenni passi giganteschi, dobbiamo ammirare il Pochettino per i fatti sperimentali che Egli poté conseguire con mezzi del tutto elementari ed in special modo ricordiamo che a Lui si deve la segnalazione, di grande interesse scientifico, della polarizzazione della catodoluminescenza e della dipendenza di questa polarizzazione dalle caratteristiche ottiche del cristallo.



Non insistiamo su altre svariate ricerche del Nostro fisico:

- polarizzazione della luce detta reticolare;
- birifrangenza corticale dei peli animali;
- sul galvanometro a corda di Einthoven;
- proprietà elettriche e termiche dello jodio;
- su taluni fenomeni nella scarica a bagliore in corrente alternata;
- ecc, ecc.

Esse non fanno che confermare la cura e l'interesse che Egli manifestava tutte le volte che gli fosse dato di abordare un fenomeno a caratteristiche non prima descritte.

E non tacciamo l'autorevole gruppo di relazioni di insieme del Pochettino:

- sui conduttori variabili;
- sui fumi e polveri nell'aerosol atmosferico;
- sui metodi fisici per l'indagine del sottosuolo;
- alcune recenti ricerche fisiche nei ghiacciai;
- ed altre ancora.

In questa sede austera, austera è la rievocazione; questa è anzitutto la stringata rassegna delle tappe di un lavoro scientifico perseguito per gli anni di una generazione; e il necessario tecnicismo dell'espressione conferisce fatalmente una veste ermetica al racconto.

Ma la rievocazione dica anche degli altri ed elevati compiti al Pochettino felicemente affidati, e, si sottolinei, nessuno estraneo alla sua cattedra.

Rettore nel periodo immediatamente successivo alla promulgazione della legge Gentile, Egli pose le basi dell'autonomia amministrativa dell'Università di Torino, autonomia allora istituita.

La sua azione ponderata, molteplice, efficace, riscosse allora unanimi consensi, ed è rievocata ancor oggi con ammirazione da quanti furono vicini a Lui in quel periodo.

Durante il suo Rettorato (1924-1928), prese corpo l'iniziativa della costruzione con la formazione di apposito Consorzio e con la stipulazione degli atti necessari, e pochi anni dopo fu in piena attività quell'Ospedale detto delle Molinette affiancato da tutte le rinnovate cliniche universitarie, che ha costituito e costituisce tuttora un Centro ospedaliero e clinico dei maggiori d'Italia.

Cooperò fundamentalmente alla creazione dell'Istituto del cancro in Torino e ne fu dal 1929 Direttore del Reparto di estrazione della emanazione dal radio.

Costituì e mise in opera la prima squadra di ricerche geofisiche sul terreno, richiesta dall'AGIP; con visione più larga, in armonia con Lo Surdo e con Vercelli, si adoperò a tenere accesa la fiaccola, non sempre ardente tra noi della geofisica.

Ricordiamo infine a quale sentimento di considerazione e di rispetto sia stato dovuto, come si è detto, l'essere stato prescelto Lui, Presidente dell'Ac-

cademia delle Scienze di Torino, ad esserne Commissario al termine della ultima guerra.

E vorrei confessare una certa mortificazione nel parlare di Lui mentre da poco riprende in molte regioni d'Italia e fuori la giostra degli spari anti-grandine.

Sembra rinata l'antica ingenua speranza di opporsi al grave flagello, ma essa non è fondata su nuovi principî fisici, bensì è alimentata dall'ingiusto oblio di risultati del Pochettino che non sono stati inariditi dal trascorrere di un cinquantennio.

Non sia anche nostro l'oblio, ma piuttosto affermiamo che, nella sua giornata terrena, Egli ha ben meritato.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica la dolorosa notizia della morte, avvenuta in data 28 aprile u. s., del Socio Nazionale prof. Ramiro Fabiani, della Categoria IV, Sezione Geologia e Paleontologia. Alla memoria dell'illustre Collega scomparso il prof. Giordani invia, a nome dell'Accademia, un reverente e commosso pensiero.

Il Presidente dà quindi la parola al Socio Perucca che commemora il compianto prof. Pochettino e, successivamente, al Socio Polvani che commemora il compianto prof. Valle.

Il Presidente ringrazia gli oratori e le personalità presenti alle commemorazioni, rinnovando ai familiari dei due Colleghi scomparsi l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia.

## COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che sono presenti alla seduta i proff. Veblen, dell'« Institute for advanced Study » di Princeton N. J., Klaus Clusius, docente di Chimica fisica a Zurigo, e Brill, docente della stessa materia nel « Polytechnic Institute » di Brooklyn N. Y. Agli illustri ospiti il prof. Giordani porge il cordiale saluto della Classe e suo personale.

Il Presidente informa poi la Classe che il Comune di Napoli ha promosso importanti premi denominati « Le nove muse » e che tra tali premi è compreso il Premio « Urania », destinato alle discipline scientifiche, da conferirsi alle opere o al complesso di opere di autori italiani, pubblicate nel decennio immediatamente precedente la data di scadenza, delle quali, nello stesso periodo di tempo, si sia rivelata la particolare importanza ai fini del progresso scientifico e tecnico.

I premi Urania saranno attribuiti a turno, in ragione di due all'anno, alle seguenti categorie scientifiche:

*a)* Scienze matematiche; *b)* Scienze fisiche; *c)* Scienze chimiche; *d)* Scienze biologiche; *e)* Scienze geologiche; *f)* Scienze mediche; *g)* Scienze tecniche; *h)* Scienze economiche.

Per il 1954, la somma complessiva disponibile di tre milioni di lire, sarà divisa in due parti uguali per l'attribuzione di due premi indivisibili da assegnare rispettivamente alle Scienze matematiche e alle Scienze fisiche.

La Commissione giudicatrice del Premio, i Membri della quale sono tutti Soci dell'Accademia, è presieduta dallo stesso Presidente prof. Giordani.

Poiché nel bando di concorso è previsto che la Commissione richieda le designazioni dell'Accademia Nazionale dei Lincei, della Società Nazionale di Scienze, Lettere e Belle Arti di Napoli, dell'Accademia Gioenia di Catania, dell'Accademia Peloritana di Messina e dell'Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, il Presidente prega i Colleghi delle Categorie della Classe comprendenti le scienze alle quali si riferisce il Premio Urania 1954 di fare le loro designazioni per il premio stesso.

I Soci Cotronei e Polvani propongono che le Categorie e le Sezioni tengano delle riunioni preliminari e presentino poi le loro proposte.

Il Presidente, preso atto della richiesta dei due predetti Soci e della decisione in tal senso adottata dalla Classe, comunica che provvederà a convocare, per le prossime sedute di giugno, le Sezioni particolarmente interessate.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Sansone, G. Levi, Chiarugi, Segre, Majorana, Tonzig, Bompiani, Rolla, Pavari, Wataghin.

Il Presidente ringrazia i Colleghi che hanno presentato Note.

Viene quindi letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

TONZIG S. e TREZZI F. - Ricerche sull'azione dell'acido indol-3-acetico.

Nota II.

WATAGHIN G. - Sulla teoria quantistica di interazioni non locali.

MATSCHINSKI M. - Quelques considérations sur la théorie mathématique des tafoni. Nota II (pres. dal Socio L. ROLLA).

La commemorazione del Corrispondente Giorgio Valle, tenuta dal Socio G. Polvani, sarà pubblicata in un fascicolo successivo.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 maggio 1954

- BEIER M. — *Pseudoscorpione aus El Salvador und Guatemala*. Estr. da « Senckenbergiana », vol. XXXIV, n. 1/3, 1953.
- COLLEGIO GHISLIERI. PAVIA. — *Studi matematici-fisici*. Milano, Bocca, 1952. Pp. VIII-152, in-8 (Studia Ghisleriana).
- D'ERASMO Geremia. — *Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche durante l'anno 1953*. Estr. da « Rend. dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Soc. Naz. di Scienze, Lett. ed Arti in Napoli », s. 4, vol. XXI, 1954.
- *La rideterminazione altimetrica del Sерапо di Pozzuoli eseguita dall'Istituto Geografico Militare nel 1953*. Estr. da « Boll. della Soc. dei Naturalisti in Napoli », vol. LXIII, 1954.
- HINCKS W. D. — *The Passalidae (Ins. Col.) of El Salvador*. Estr. da « Senckenbergiana », vol. XXXIV, n. 1/3, 1953.
- NIEVODOVSKY Pierre. — *Mouvements électricques des corps simples et leurs formes ou concentrations*. Compiègne, Imprim. du « Progrès de l'Oise », 1953. Pp. 31, in-8°.
- Reports of the Swedish Deep-Sea Expedition 1947-1948*. Vol. VII: *Sediment Cores from the North Atlantic Ocean*, fasc. I. Göteborg, Kungl. Vetenskaps-och Vitterhets-samhälle, 1953. Pp. 122, in-4°, con tavv.
- ROHWEDER Otto. — *Neue Bromeliaceen und Commelinaceen aus El Salvador (Zentral-Amerika)*. *Tillandsia candelliera* n. sp. Estr. da « Senckenbergiana », vol. XXXIV, n. 1/3, 1953.
- RUSSO Achille. — *Ipotetica potenza, ritenuta causa dei tumori, identificata con il potere germinale dei tessuti somatici. Fonomeni che lo dimostrano*. Estr. da « Atti della Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », s. 6<sup>a</sup>, vol. IX, 1952-53.
- TRIEBEL Erich. — *Eine fossile Pelocypris (Crust., Ostr.) aus El Salvador*. Estr. da « Senckenbergiana », vol. XXXIV, n. 1/3, 1953.
- VERONESE Gino. — *Impianto idrico di Montenero e Selva di Tarnova*. Estr. da « Boll. dell'Istituto Storico e di Cultura dell'Arma del Genio », 1953-1954.

D. DE BLASI e A. SIGNORINI.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 9 giugno 1954*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Fisiologia vegetale.** — *Ricerche sull'azione dell'acido indol-3-acetico.* Nota II di SERGIO TONZIG e FEDERICA TREZZI, presentata (\*) dal Socio S. TONZIG.

Nella I Nota (\*) abbiamo esposto l'opinione secondo la quale l'auxina sarebbe da considerarsi non come uno specifico ormone d'accrescimento ma piuttosto come un generico attivatore delle proteine e stimolante della funzionalità cellulare. Essa agirebbe determinando delle modificazioni fisiche e chimiche sulle proteine plasmatiche di cui la prima manifestazione riconoscibile è rappresentata da una maggior idrofilia dei colloidi plasmatici. Un indice di ciò è costituito dalla variazione della viscosità plasmatica; viscosità che aumenta se l'introduzione d'acqua dall'esterno non sia possibile se non lentamente e che, a mano a mano che tale introduzione avviene, si attenua sino al valore iniziale e, anzi, al disotto di esso; mentre diminuisce quasi subito se la cellula può subito rifornirsi d'acqua dall'esterno.

L'accrescimento cellulare non sarebbe invece altro che una successiva conseguenza, di per sé non necessaria, della stimolata attività della cellula. Esso implica un nuovo assorbimento d'acqua la cui possibilità rappresenta — in qualunque modo esso avvenga — non il primo effetto diretto, ma un effetto indiretto dell'azione auxinica sul plasma. Effettivamente gli effetti delle auxine sulle cellule, o sugli organi vegetali, sono molteplici e possono realizzarsi anche senza alcun accrescimento cellulare.

(\*) Nella seduta dell'8 maggio 1954.

(1) TONZIG S. e F. TREZZI, questi « Rend. », vol. XVI, fasc. 5, pp. 603-611 (1954).

Ci sembra che una dimostrazione sperimentale di ciò possa aversi se si riesce a disaccoppiare l'effetto dell'auxina sul protoplasma dall'effetto sull'accrescimento. A rigore la cosa ci sembra già dimostrata da tutti gli studi sull'effetto dell'auxina fatti su tessuti le cui cellule non sono suscettibili d'accrescimento. Ricordiamo, comunque, come precedenti ricerche<sup>(2)</sup> fatte trattando in vario modo con pomata d'AIA degli ipocotili di ricino nella parte basale o subapicale, avevano dimostrato che il trattamento nella porzione basale non ottiene più di stimolare l'accrescimento cellulare (probabilmente perchè, in questa porzione, la membrana cellulare ha già raggiunto una struttura che la rende definitivamente inestensibile), mentre l'effetto plasmatico appare lo stesso: la plasmolisi, che è di forma convessa ed avviene in 1 minuto nelle cellule di controllo sia della regione apicale che di quella basale, diviene concava e richiede circa 13 minuti nelle cellule, tanto della regione apicale che basale, che hanno subito l'azione dell'AIA. Altre ricerche<sup>(3)</sup> hanno dimostrato come, coltivando delle plantule di lupino in condizioni ambientali diverse, sia possibile influire sulla distensibilità della membrana dell'ipocotile in modo tale da compromettere totalmente le reazioni di curvatura per applicazione unilaterale di AIA o per stimoli tropistici.

Un netto disaccoppiamento dell'effetto dell'AIA sul plasma, da quello sull'accrescimento della cellula ci sembra di aver ottenuto, durante le presenti ricerche, con un'esperienza estremamente semplice ma nonpertanto abbastanza significativa.

Dalla pagina inferiore d'un catafillo di cipolla (*Allium Cepa*) vennero spellati dei lembi epidermici che, tagliati in pezzetti omogenei di circa 4,5 mm.<sup>2</sup>, vennero fatti dapprima plasmolizzare in soluzione di mannite e, successivamente, deplasmolizzare in soluzione di mannite più diluita ed in presenza di AIA. Si ottenne così, praticamente, di eliminare l'effetto della membrana cellulare e di realizzare anzi le stesse condizioni che si avrebbero con protoplasti nudi, senza tuttavia esporsi al complesso di anormali condizioni che, inevitabilmente, agiscono su protoplasti liberati dalla membrana. La scelta del materiale sembrerebbe contrastare con le riserve da noi espresse sull'impiego di tessuti non in accrescimento. In questo caso, peraltro, non si trattava di ottenere un accrescimento cellulare ma di studiare semplicemente una reazione plasmatica che le ricerche sopra citate<sup>(2)</sup> avevano dimostrato avvenire anche nel plasma di cellule adulte.

Le concentrazioni del plasmolitico e del deplasmolitico sperimentalmente trovate più opportune sono state rispettivamente di 1 M e di 0,5 M. In due successive serie di esperienze la permanenza nel plasmolitico fu di 30 o di 45 min. p. La deplasmolisi, oltre che nel deplasmolitico puro (c = controllo) fu fatta in deplasmolitico addizionato di AIA in ragione di  $10^{-4}$ ,  $5 \cdot 10^{-4}$  e  $10^{-5}$ . I risultati sono esposti nella seguente tabella.

(2) TONZIG S. e C. TRECCANI-POMA, «N. Giorn. Bot. Ital.», n. s., vol. 53, p. 601 (1946).

(3) TONZIG S. e L. MUZIARELLI, *Lavori di Botanica pubbl. in onore di G. Gola*, p. 353 (1947).

TABELLA I.

*Modificazione del tempo di deplasmolisi per effetto dell'AIA.  
Altre spiegazioni nel testo.*

permanenza in plasmolitico:	tempo di deplasmolisi dopo	
	30 m. p.	45 m. p.
c. . . . .	50 m. p.	85 m. p.
AIA $10^{-4}$ . . . . .	30 m. p.	45 m. p.
AIA $5 \cdot 10^{-4}$ . . . . .	20 m. p.	—
AIA $10^{-5}$ . . . . .	35 m. p.	—

L'effetto sull'idrofilia plasmatica ci sembra evidente. Esso si manifesta, in questo caso, con una più rapida deplasmolisi — che può anche indicare una minor vischiosità plasmatica — com'è caratteristica delle esperienze fatte ponendo le cellule in condizione di poter rapidamente introitare acqua dall'esterno. Ovviamente il risultato non spiega quale sia la forza che determina l'assorbimento d'acqua nella cellula. Potrebbe anche trattarsi semplicemente di un effetto osmotico dovuto alle soluzioni cristalloidali che costituiscono la fase disperdente del colloide plasmatico e che sono state concentrate per effetto della fissazione di una certa quantità d'acqua, sotto l'influenza dell'AIA, sulla fase proteica dispersa. In ogni caso, ci sembra che l'esperienza dimostri che in questo appunto consiste il primo effetto dell'AIA: nell'aumentare la capacità d'idratazione delle proteine plasmatiche. È verosimile che questo fatto metta in movimento degli altri meccanismi capaci di provocare un attivo assorbimento d'acqua; ma della loro natura l'esperienza non dà nessun indizio. È però da osservare che, mentre si ridistende il plasma, anche il vacuolo centrale aumenta di volume. Ci sono infatti degli equilibri fisico-chimici tra plasma e vacuolo (forze osmotiche e forze di tensione superficiale) che obbligano il plasma a cedere una certa quantità d'acqua al vacuolo a mano a mano ch'esso ne introduce dall'esterno.

Ci sembra inoltre che l'esperienza indichi che, durante l'assorbimento, la membrana viene distesa perchè il protoplasto possa aumentare di volume, non che il protoplasto aumenta di volume perchè la membrana si distende. Per lo meno, se quest'ultimo meccanismo esiste, esso non è il solo.

Un'altra serie di esperienze è stata fatta su sezioni subapicali di ipocotile (con tessuti, dunque, in fase di naturalmente intenso accrescimento) di ricino dello spessore di 5 mm., trattate con AIA e messe in condizioni di introdurre acqua e di accrescersi normalmente (serie di controllo), oppure di non poter introdurre acqua e — conseguentemente — di non accrescersi. Per confronto con esperienze precedenti, il trattamento venne fatto anche con AA.



La serie di controllo (tabella II) venne fatta immergendo dei gruppi di sezioni d'ipocotile (10 pezzi per gruppo) in acqua oppure in soluzioni d'AIA  $5 \cdot 10^{-4}$  o d'AA 1/200 M. Le soluzioni erano tamponate a pH 6 con tampone ai fosfati; il tampone era presente anche nella serie in «acqua». Quantità del liquido: 20 cc. Temperatura costante di 25°C. Esperienza al buio. A intervalli di tempo vennero misurati: l'incremento percentuale del peso fresco rispetto al peso iniziale; l'incremento percentuale di lunghezza rispetto alla lunghezza iniziale; il tempo di plasmolisi.

In una serie parallela (tabella III) le sezioni d'ipocotile erano poste in ambiente saturo d'umidità e poggiate verticalmente su carta da filtro semplicemente inumidita. Il trattamento venne eseguito con applicazione di pomata di lanolina anidra (lanolina anidra incorporata con l'1/5000 in peso d'AIA in polvere oppure con l'1/20 in peso d'AA in polvere). A intervalli di tempo vennero fatte le stesse misurazioni come nella serie di controllo.

Per la miglior comprensione dei risultati, essi vengono dati anche in forma grafica.

I risultati della serie di controllo non abbisognano di molti commenti. In linea generale essi confermano cose già note: l'incremento sia di peso (fig. 1) che di lunghezza (fig. 2) è massimo in presenza d'AIA, medio in acqua, minimo in presenza d'AA. La vischiosità (fig. 3) si abbassa rapidamente, fino ad un valore minimo, in presenza d'AA; si abbassa solo lentamente, a mano a mano che viene introdotta acqua, nel materiale in acqua; si innalza rapidamente, e poi altrettanto rapidamente decade fino a valori inferiori a quelli dei controlli, in presenza d'AIA.

TABELLA II.

*Variazioni del peso fresco, della lunghezza e del tempo di plasmolisi di sezioni d'ipocotile di lupino in soluzione d'AIA e d'AA.*

(c = controllo in acqua + tampone).

Tempo:		30 <sup>p</sup>	1 <sup>h</sup>	3 <sup>h</sup>	6 <sup>h</sup>	12 <sup>h</sup>	22 <sup>h</sup>
Incremento	c	4,5	6	13,5	23	48	77
% in peso	AIA	6	10	21	45	89	101
fresco	AA	1	4	9	14	22	43
Incremento	c	1	3	12	16	24	39
% in	AIA	2	9	19	30	36	45
lunghezza	AA	0	2	4	8	16	20
Tempo di	c	4 <sup>p</sup>	4 <sup>p</sup>	4 <sup>p</sup>	3 <sup>p</sup> 30 <sup>s</sup>	3 <sup>p</sup>	2 <sup>p</sup> 30 <sup>s</sup>
plasmolisi	AIA	6 <sup>p</sup> 30 <sup>s</sup>	6 <sup>p</sup> 30 <sup>s</sup>	8 <sup>p</sup> 30 <sup>s</sup>	4 <sup>p</sup>	2 <sup>p</sup> 30 <sup>s</sup>	2 <sup>p</sup>
	AA	2 <sup>p</sup>	2 <sup>p</sup>	2 <sup>p</sup>	1 <sup>p</sup> 45 <sup>s</sup>	1 <sup>p</sup>	1 <sup>p</sup>

TABELLA III.

*Variazioni del peso fresco, della lunghezza e del tempo di plasmolisi di sezioni d'ipocotile di lupino trattate - in ambiente saturo d'umidità - con pomata di lanolina anidra e AIA o AA in polvere. (c = controllo).*

Tempo:		30 <sup>p</sup>	1 <sup>h</sup>	3 <sup>h</sup>	6 <sup>h</sup>	12 <sup>h</sup>	22 <sup>h</sup>
Incremento	c	o	o	o	1	2	5
% in peso	AIA	o	o	o	2	4	6
fresco	AA	o	o	o	o	1	1
Incremento	c	o	o	o	o	o	o
% in	AIA	o	o	o	o	1	3
lunghezza	AA	o	o	o	o	o	o
Tempo di plasmolisi	c	5 <sup>p</sup>	5 <sup>p</sup>	5 <sup>p</sup>	5 <sup>p</sup>	5 <sup>p</sup>	4 <sup>p</sup>
	AIA	7 <sup>p</sup> 30 <sup>s</sup>	12 <sup>p</sup> 30 <sup>s</sup>	12 <sup>p</sup> 30 <sup>s</sup>	12 <sup>p</sup>	11 <sup>p</sup> 30 <sup>s</sup>	11 <sup>p</sup> 30 <sup>s</sup>
	AA	3 <sup>p</sup>	2 <sup>p</sup>	2 <sup>p</sup>	2 <sup>sc</sup>	2 <sup>p</sup>	2 <sup>p</sup>

Due osservazioni ci sembra però di poter fare. La prima riguarda appunto la variazione di vischiosità in AIA. L'iniziale rapido aumento sembra dovuto al fatto che, avendo l'AIA - come suo primo effetto - aumentato l'idrofilia della fase dispersa dei colloidi plasmatici, questa si è idratata sottraendo acqua alla fase disperdente il cui volume è stato ridotto in misura corrispondente. La successiva rapida diminuzione di vischiosità potrebbe essere, almeno in parte o in un primo momento, dovuta ad un'introduzione passiva d'acqua per effetto dell'aumentata concentrazione osmotica della fase disperdente o anche per un'ulteriore tensione d'assorbimento del colloide; ma poichè la vischiosità scende successivamente sotto al valore dei controlli, e quindi il plasma assorbe acqua più che nei controlli (con ciò rendendo effettivo l'accrescimento), l'esperienza sembra indicare che il mutamento fisico provocato nel plasma dall'AIA ha messo in movimento un meccanismo d'assorbimento attivo, che potrebbe anche consistere nell'allentamento - ottenuto con energia d'origine metabolica - del reticolo della membrana. I dati a nostra disposizione non permettono evidentemente di concludere, cosicchè altre ricerche si rendono necessarie.

La seconda osservazione è la seguente: al momento in cui, nei campioni in acqua, l'incremento di peso ha raggiunto il valore del 23 %, l'incremento in lunghezza è del 16 %; ma quando, in presenza d'AIA, l'incremento in peso non è che del 21 %, l'incremento in lunghezza è già del 19 %. Il divario poi non c'è più; ma negli intervalli successivi è già in atto la tendenza ad una convergenza dei risultati finali in acqua e in AIA. Il rilievo, evidentemente,

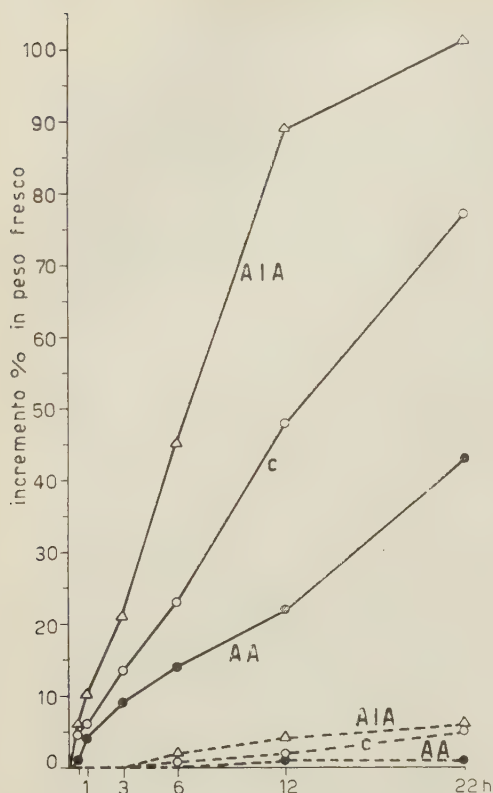


Fig. 1. - Incremento percentuale in peso fresco di segmenti d'ipocotile di ricino in acido indol-acetico (AIA), acido ascorbico (AA) e acqua (c = controllo). Curve a linea continua: serie con segmenti immersi; curve a linea tratteggiata: serie in ambiente saturo d'umidità. Altre spiegazioni nel testo.

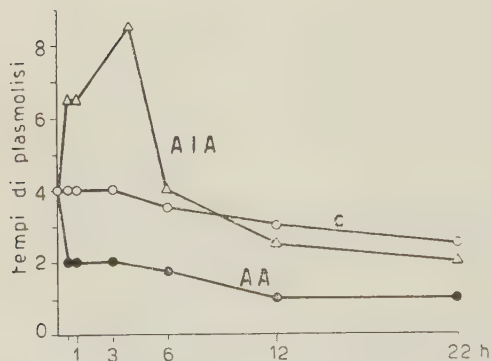


Fig. 3. - Variazioni della vischiosità plasmatica (tempi di plasmolisi) di segmenti d'ipocotile di ricino trattati con AIA o con AA; c = controllo. Serie con segmenti immersi. Altre spiegazioni nel testo.

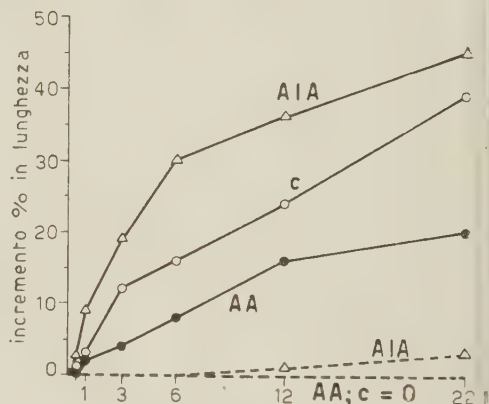


Fig. 2. - Incremento percentuale in lunghezza di segmenti d'ipocotile di ricino. Spiegazioni come nella fig. 1.

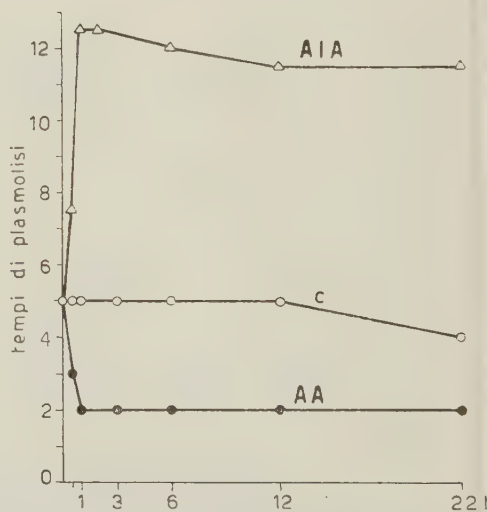


Fig. 4. - Variazioni della vischiosità plasmatica (tempi di plasmolisi) di segmenti d'ipocotile di ricino trattati con AIA o con AA; c = controllo. Serie con segmenti in ambiente saturo d'umidità. Altre spiegazioni nel testo.

dev'essere confermato e noi ci riserviamo di controllarlo. Ma, se confermato, esso dimostrerebbe che l'AIA agisce non solo favorendo un'imbibizione generica del colloide, ma provocando le modificazioni fisico-chimiche, del tipo da noi spiegato, preferibilmente – od anche – su raggruppamenti molecolari che non vengono invece attivati – o solo più lentamente – per semplice imbibizione d'acqua.

Quanto alla serie tenuta in ambiente semplicemente saturo d'umidità, con sezioni poggiate su carta da filtro umida, i risultati ci sembrano molto indicativi. Mentre l'incremento di peso (fig. 1) è trascurabile e trascurabile è quindi anche l'assunzione d'acqua (valori più alti si hanno, anche in questo caso, in presenza d'AIA, più bassi in acqua, minimi in presenza d'AA), l'AIA determina immediatamente un ingentissimo aumento di vischiosità plasmatica (fig. 4) fino ad un valore notevolmente più alto di quello che viene raggiunto nella serie in soluzione. Questo ci sembra indicare che l'AIA ha immediatamente provocato il suo effetto sulle proteine plasmatiche; che tale effetto si manifesta con un grande aumento dell'idrofilia di queste; e che, di conseguenza, una cospicua parte dell'acqua della fase disperdente è stata captata dalla fase dispersa. Vorremmo far anche notare che l'introduzione d'acqua è un effetto consequenziale, preceduto cioè dalla modificazione delle proteine plasmatiche; modificazione che rappresenterebbe dunque il primo effetto riconoscibile dell'azione auxinica. Se si confrontano i risultati delle due serie, si vede come la vischiosità dei campioni in soluzione d'AIA (serie in liquido, fig. 3) continua ad aumentare fintantochè la quantità d'acqua che va entrando è inferiore alla capacità d'idratazione del colloide; dopodichè l'acqua, che continua ad entrare, non soltanto appaga l'idrofilia della fase dispersa (idrofilia che però non perviene ad essere annullata, come lo dimostra il risultato del materiale in ambiente semplicemente umido), ma comincia anche a ricostituire la fase disperdente. Se la ricostituzione della fase liquida disperdente sia dovuta ad una nuova forza, per esempio di origine respiratoria, i risultati non lo dimostrano. È ancora da osservare che, in corrispondenza del massimo valore di vischiosità dei campioni in soluzione d'AIA, l'aumento di peso è già del 21 %, ciò che – come abbiamo fatto notare più sopra – ha permesso un allungamento del 19 %.

Se, nei campioni in ambiente umido, l'incremento d'idrofilia provocato dall'AIA sia corrispondente al valore massimo dell'aumento di vischiosità, non si può dire. Si può dire solo che, da questo momento, le modificazioni avvenute nella cellula hanno scatenato una così ingente tensione d'assorbimento che il tessuto riesce a introdurre un po' d'acqua – la sua quantità non può essere che piccolissima – sottraendola ad un ambiente semplicemente umido; e che la poca acqua che è forzata ad entrare vale già ad attenuare la vischiosità plasmatica che, peraltro, rimane poi costante fino alla fine dell'esperienza. Va anche notato che, sebbene l'aumento di vischiosità sia immediato, occorre aspettare 6 ore per avere un aumento appena sensibile di peso (fig. 2) segno che – in un primo tempo – è solo l'acqua già presente nella cellula, quella intermicellare del plasma e, forse, anche un po' dell'acqua del vacuolo



— chè, altrimenti, non potrebbe aumentare l'acqua della fase disperdente nè attenuarsi la vischiosità plasmatica, senza ingresso d'acqua dall'esterno — quella che subisce le conseguenze prime del trattamento. Inoltre va osservato, che, per avere un primo accrescimento rilevabile, bisogna attendere altre 6 ore. I due rilievi mettono in evidenza, ci sembra, quanto siano stati svincolati fra di loro — e quindi come siano in naturale successione — i tre seguenti fenomeni: *a*) aumento dell'idratabilità del plasma; *b*) come sua conseguenza, introduzione d'acqua; *c*) come conseguenza di ciò, e dell'avvenuta attivazione del plasma, accrescimento. Vorremmo anche far rilevare come, alla fine dell'esperienza, la quantità totale d'acqua che il materiale trattato con AIA è riuscito ad introitare non sia poi molto superiore a quella che è stata introitata dai controlli. Ma relativamente molto maggiore è la differenza d'accrescimento: l'AIA ha permesso, in altre parole, un ben miglior uso della poca acqua introdotta; e ciò ci sembra indicare che, prima ancora che sull'assunzione d'acqua, l'AIA ha influito sui costituenti proteici del plasma nei quali, con processi del tipo di quelli da noi indicati, è avvenuta un'attivazione che, per suo conto, ha messo in moto un meccanismo ancora fermo nei controlli.

Richiamiamo l'attenzione, da ultimo, sull'effetto dell'AA. Forte disidratazione dei colloidi plasmatici; ma non nel senso, evidentemente, d'una espulsione d'acqua, ma nel senso di passaggio d'acqua dalla fase dispersa a quella disperdente. Ciò non toglie che, evidentemente per forze osmotiche, una tenue quantità d'acqua — del resto contenuta nei limiti d'errore — non possa alla fine essere assorbita. L'accrescimento è nullo.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi matematica.** — *Sulle funzioni sub e super-biarmoniche*  
Nota di BRUNO PINI, presentata (\*) dal Socio M. PICONE.

Sia  $A$  un campo dell' $S_2$  euclideo e  $u(P)$  una funzione continua del punto  $P$  variabile in  $A$ . Ad ogni  $P$  di  $A$  associamo la circonferenza  $\mathcal{C}(P, r)$  di centro  $P$  e raggio  $r$ , con  $r$  tale che il corrispondente cerchio appartenga ad  $A$ . Poniamo

$$(I) \quad \mu_0(u, P, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) d\theta,$$

$$\mu_1(u, P, r) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} u(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta.$$

(\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

È noto che: *condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione  $u(P)$ , continua in  $A$ , sia armonica, è che sia*

$$(2) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(P) - \mu_0(u, P, r)}{r^2} = 0$$

per ogni  $P$  di  $A$  <sup>(1)</sup>.

M. Nicolesco ha dato <sup>(2)</sup> la seguente estensione del precedente teorema: *condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione  $u(P)$ , continua in  $A$ , sia ivi biarmonica, è che sia*

$$(3) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(P) + \mu_0(u, P, r) - 2\mu_1(u, P, r)}{r^4} = 0$$

per ogni  $P$  di  $A$ .

Min-Teh Cheng ha rilevato <sup>(3)</sup> che tale condizione, certamente necessaria, non è però sufficiente ad assicurare la biarmonicità della  $u(P)$ , se su questa si fa la sola ipotesi della continuità. Per convincersi di ciò basta considerare la funzione

$$u(P) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{per } -1 < x < 1, \quad 0 \leq y < 1 \\ x^2 - y^2 & \text{» } -1 < x < 1, \quad -1 < y < 0; \end{cases}$$

lo stesso esempio prova che neppure la continuità delle derivate prime assicura, unitamente alla (3), la biarmonicità della  $u(P)$ .

L'A. ora citato ha provato che: *condizione necessaria e sufficiente affinché  $u(P)$ , continua con le derivate prime e seconde, sia biarmonica, è che sia*

$$(3') \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(P) + \mu_0(u, P, \sqrt{2}r) - 2\mu_0(u, P, r)}{r^4} = 0$$

per ogni  $P$  di  $A$ .

Nella presente Nota proviamo come, nelle stesse ipotesi di regolarità della  $u(P)$ , la condizione (3) sia sostituibile alla (3'); contemporaneamente assegniamo una condizione perché la  $u(P)$  sia sub-biarmonica oppure super-biarmonica.

I risultati stabiliti si estendono senza difficoltà alle funzioni  $n$ -iperarmoniche.

1. Una funzione  $v(P)$ , continua con le derivate prime e seconde in  $A$ , si dirà che è ivi della classe  $K^2$ ; in generale si dirà che è della classe  $K^n$  se ha continue le derivate dei primi  $n$  ordini.

Una  $v(P)$  della classe  $K^2$  si dirà *sub (super)-biarmonica* in  $A$  se, comunque si fissi in  $A$  un dominio  $D$  per cui sia risolubile il problema di Riquier:  $\Delta^2 u = 0$  in  $D - \mathfrak{F}D$ ,  $u = v$  e  $\Delta u = \Delta v$  su  $\mathfrak{F}D$ , riesce  $v \leq u$  ( $v \geq u$ ) in  $D$ . La funzione  $u(P)$  si dirà *associata* della  $v(P)$  rispetto a  $D$ .

(1) W. BLASCHKE, *Ein Mittelwertsatz und eine kennzeichnende Eigenschaft des logarithmischen Potentials*, Leipziger Berichte, 68 (1916).

(2) M. NICOLESCO, *Les fonctions polyharmoniques*, « Actualités scientifiques et industrielles », n. 331, Paris 1936.

(3) MIN-TEH CHENG, *On a theorem of Nicolesco and generalized Laplace operators*, « Proc. of the Am. Math. Soc. », 2 (1951).

Se  $v(P)$  è della classe  $K^4$ , dalla formola

$$v(P) - u(P) = \iint_D G^{(2)}(Q, P) \Delta^2 v(Q) dQ^{(4)},$$

ove  $u$  è la funzione associata della  $v$ , si riconosce che: *condizione necessaria e sufficiente affinché la  $v(P)$  sia sub (super)-biarmonica, è che sia*

$$(4) \quad \Delta^2 v \leq 0 \quad (\Delta^2 v \geq 0)$$

per ogni  $P$  di  $A$ .

In particolare, se per  $D$  si prende un cerchio di centro  $P$  e raggio  $r$ , si ha

$$(5) \quad v(P) = \mu_0(v, P, r) - \frac{r^2}{4} \mu_0(\Delta v, P, r) + \frac{1}{8\pi} \iint_0^{2\pi} \left( r^2 - \rho^2 - \rho^2 \lg \frac{r}{\rho} \right) \Delta^2 v \rho d\rho d\theta$$

ove

$$r^2 - \rho^2 - \rho^2 \lg \frac{r}{\rho} = \frac{r^2 - \rho^2}{2} + \rho^2 \int_1^{\frac{r}{\rho}} \frac{t^2 - 1}{t} dt \geq 0,$$

e quindi: *condizione necessaria e sufficiente affinché  $v(P)$ , della classe  $K^4$ , sia sub-biarmonica, biarmonica, super-biarmonica, è che sia rispettivamente*

$$(6) \quad v(P) \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ \equiv \end{matrix} \mu_0(v, P, r) - \frac{r^2}{4} \mu_0(\Delta v, P, r)$$

per ogni  $P$  di  $A$  e per ogni  $r$  ammissibile.

Se nella (6) si sostituisce  $r$  con una variabile  $t$ , si moltiplicano ambo i membri per  $t dt$  e si integra tra 0 ed  $r$ , tenendo presente che

$$\frac{1}{2\pi} \iint_0^{2\pi} \rho^3 \Delta v d\rho d\theta = 2r^2 \mu_1(v, P, r) + r^3 \mu_0\left(\frac{\partial v}{\partial r}, P, r\right) - 2r^2 \mu_0(v, P, r),$$

si ha che: *la precedente tesi sussiste se*

$$(7) \quad v(P) \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ \equiv \end{matrix} \mu_0(v, P, r) - \frac{r}{2} \mu_0\left(\frac{\partial v}{\partial r}, P, r\right)$$

per ogni  $P$  di  $A$  e per ogni  $r$  ammissibile.

Ripetendo l'operazione indicata, si ha poi che: *la precedente tesi sussiste se*

$$(8) \quad v(P) \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ \equiv \end{matrix} -\mu_0(v, P, r) + 2\mu_1(v, P, r)$$

per ogni punto  $P$  di  $A$  e per ogni  $r$  ammissibile.

Infine, sostituendo  $r$  con una variabile  $t$ , moltiplicando ambo i membri per  $t^2 dt$  e integrando da 0 ad  $r$ , si ha che: *condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione  $v(P)$  della classe  $K^4$  sia sub-biarmonica, biarmonica, super-biarmonica, è che sia rispettivamente*

$$(9) \quad v(P) \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ \equiv \end{matrix} \frac{3}{2\pi r^3} \iint_0^{2\pi} (4r - 5\rho) v(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

per ogni  $P$  di  $A$  e per ogni  $r$  ammissibile.

2. È immediato riconoscere che: se la funzione  $v(P)$ , della classe  $K^4$ , è sub-biarmonica, biarmonica, super-biarmonica, la funzione  $\Delta v(P)$  è rispettivamente super-armonica, armonica, sub-armonica.

Proviamo che: la stessa tesi sussiste se  $v(P)$  appartiene alla classe  $K^2$  e verifica la (9).

È noto che se  $f(P)$  è una funzione continua, si ha <sup>(5)</sup>

$$\frac{\partial \mu_1(f, P, r)}{\partial x} = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} f(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) \cos \theta d\theta$$

$$\frac{\partial \mu_1(f, P, r)}{\partial y} = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} f(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) \sin \theta d\theta,$$

mentre, se  $f(P)$  è continua insieme alle derivate prime, è

$$\frac{\partial \mu_1(f, P, r)}{\partial x} = \mu_1\left(\frac{\partial f}{\partial x}, P, r\right), \quad \frac{\partial \mu_1(f, P, r)}{\partial y} = \mu_1\left(\frac{\partial f}{\partial y}, P, r\right);$$

quindi se  $f(P)$  è della classe  $K^m$ , allora  $\mu_1(f, P, r)$  è della classe  $K^{m+1}$ .

Indicando con  $\mu_1^2(f, P, r)$ ,  $\mu_1^3(f, P, r)$ , ... le medie iterate definite dalla relazione

$$\mu_1(\mu_1^{n-1}(f, Q, r), P, r) = \mu_1^n(f, P, r) \quad n = 2, 3, \dots$$

è chiaro che se  $v(P)$  è della classe  $K^2$ ,  $\mu_1^2(v, P, r)$  è della classe  $K^4$ .

Supponiamo ora che  $v(P)$  verifichi ad esempio la prima delle (9), cioè

$$v(P) \geq \frac{3}{2\pi r^3} \iint_{\xi^2 + \eta^2 < r^2} (4r - 5\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) v(x + \xi, y + \eta) d\xi d\eta.$$

Ne segue che

$$\mu_1(v, P, r_1) \geq \frac{1}{\pi r_1^2} \iint_{\xi_1^2 + \eta_1^2 < r_1^2} \left( \frac{3}{2\pi r^3} \iint_{\xi^2 + \eta^2 < r^2} (4r - 5\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) v(x + \xi + \xi_1, y + \eta + \eta_1) d\xi d\eta \right) d\xi_1 d\eta_1$$

e quindi

$$\mu_1(v, P, r_1) \geq \frac{3}{2\pi r^3} \iint_{\xi^2 + \eta^2 < r^2} (4r - 5\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \mu_1(v, x + \xi, y + \eta, r_1) d\xi d\eta,$$

cioè se  $v$  verifica la prima delle (9), anche  $\mu_1(v, P, r_1)$  verifica la prima delle (9). Pertanto se  $v$  è della classe  $K^2$  e verifica la prima delle (9), la  $\mu_1^2(v, P, r_1)$  è della classe  $K^4$  e, verificando la prima delle (9), è sub-biarmonica. Perciò  $\Delta \mu_1^2(v, P, r_1)$  è super-armonica.

Consideriamo ora la successione di funzioni  $\mu_1^2(v, P, 1/n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , che per  $n \rightarrow \infty$  converge uniformemente a  $v(P)$  in ogni dominio (limitato)

(5) Cfr. per esempio T. RADÓ, *Subharmonic functions*, « Ergebnisse der Mathematik », Berlin 1925 e New York 1949.



contenuto in  $A^{(6)}$ ; analogamente la successione  $\Delta\mu_x^2(v, P, 1/n) = \mu_x^2(\Delta v, P, 1/n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , converge uniformemente a  $\Delta v$ .

Poichè le  $\mu_x^2(\Delta v, P, 1/n)$  sono super-armoniche, è

$$\mu_x^2(\Delta v, P, 1/n) \geq \mu_o(\mu_x^2(\Delta v, Q, 1/n), P, r)$$

(dove  $Q$  indica un punto variabile su  $\mathcal{C}(P, r)$ ), per  $n = 1, 2, \dots$ , e qualunque sia  $r$  (sufficientemente piccolo). Pertanto si ha

$$\Delta v \geq \mu_o(\Delta v, P, r)$$

per ogni punto  $P$  di  $A$  e per ogni  $r$  ammissibile; questo basta ad assicurare che  $\Delta v$  è super-armonica, nella sola ipotesi della continuità.

3. Ciò posto, dimostriamo che:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione  $v(P)$ , della classe  $K^2$  in  $A$ , sia ivi sub-biarmonica, biarmonica, super-biarmonica, è che sia rispettivamente*

$$(10) \quad \left. \begin{array}{l} \max \lim_{r \rightarrow 0} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \\ \min \lim_{r \rightarrow 0} \end{array} \left\{ \frac{v(P) - \mu_o(v, P, r) + \frac{r^2}{4} \mu_o(\Delta v, P, r)}{r^4} \right\} \right\} \begin{array}{l} \leq 0 \\ = 0 \\ \geq 0 \end{array}$$

Ci limitiamo a provare la sufficienza (la necessità essendo immediata) solo per la prima; la terza si prova allo stesso modo e dalla prima e terza segue la seconda.

Cominciamo col supporre che sia sempre

$$\max \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(P) - \mu_o(v, P, r) + \frac{r^2}{4} \mu_o(\Delta v, P, r)}{r^4} < 0.$$

Per quanto si è osservato in 2, è anche

$$(11) \quad \max \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_o(\Delta v, P, r) - \Delta v(P)}{r^2} \leq 0.$$

Supponiamo che anche nella (11) sussista sempre il segno  $<$ . Orbene, se  $v(P)$  non fosse sub-biarmonica, esisterebbe un dominio  $D$  in  $A$  tale che in qualche punto ad esso interno si avrebbe

$$v(P) > u(P),$$

essendo  $u(P)$  la funzione associata della  $v$  rispetto a  $D$ . Allora  $v - u$  raggiungerebbe il massimo in un punto interno a  $D$ ; in tal punto risulterebbe  $\Delta v - \Delta u \leq 0$ , contrariamente al fatto che  $\Delta v$  è super-armonica e che  $\Delta v(P) > \mu_o(\Delta v, P, r)$  per ogni punto  $P$  e, fissato  $P$ , per ogni  $r$  abbastanza

(6) È chiaro che, al variare di  $P$  sul fissato dominio, vi sarà un valore di  $n$  tale che il cerchio di centro  $P$  e raggio  $2/n$  sarà contenuto in un dominio contenente il primo e contenuto a sua volta in  $A$ . Intenderemo di prendere in considerazione i valori di  $n$  maggiori o eguali a quello per cui si verifica quanto si è detto.

piccolo, come si è supposto. Supponiamo ora che nella prima delle (10) e nella (11) possa presentarsi anche il segno di eguaglianza. Consideriamo allora la successione di funzioni

$$v_n(P) = v(P) - \frac{x^4}{4!n} \quad n = 1, 2, \dots$$

e riferiamoci a un arbitrario dominio limitato contenuto in  $A$ , nell'eventualità che  $A$  non sia limitato. Queste funzioni si trovano nelle condizioni in cui ci si era posti precedentemente; dunque esse riescono sub-biarmoniche. Poiché per  $n \rightarrow \infty$ ,  $v_n(P)$  e  $\Delta v_n(P)$  convergono uniformemente a  $v(P)$  e  $\Delta v(P)$ , si può affermare che anche  $v(P)$  è sub-biarmonica.

Notiamo espressamente che *a fianco della proposizione ora provata se ne hanno altre in tutto simili se, anziché riferirci alla (6), ci si riferisce alla (7) oppure alla (8) oppure alla (9).*

Vogliamo ancora osservare che, analogamente a quanto avviene per le funzioni sub(super)-armoniche, si ha che:

*Se  $v(P)$ , di classe  $K^2$  in  $A$ , è sub(super)-biarmonica, la*

$$\mu_0(v, P, r) - \frac{r^2}{4} \mu_0(\Delta v, P, r)$$

*è funzione non decrescente (non crescente) di  $r$ .*

Se  $v(P)$  è della classe  $K^4$ , l'affermazione segue con una semplice derivazione dalla (5). Supposto che  $v(P)$  sia della classe  $K^2$  e, per esempio, sub-biarmonica, se non fosse vero quanto si è affermato, esisterebbe almeno un punto  $P$  e una coppia  $r_1$  ed  $r_2$  con  $r_1 > r_2 > 0$  tali che

$$\mu_0(v, P, r_1) - \frac{r_1^2}{4} \mu_0(\Delta v, P, r_1) < \mu_0(v, P, r_2) - \frac{r_2^2}{4} \mu_0(\Delta v, P, r_2)$$

(essendo interno ad  $A$  il cerchio di centro  $P$  e raggio  $r$ ). Allora si avrebbe anche

$$\begin{aligned} \mu_0(\mu_1^2(v, Q, 1/n), P, r_1) - \frac{r_1^2}{4} \mu_0(\Delta \mu_1^2(v, Q, 1/n), P, r_1) < \\ < \mu_0(\mu_1^2(v, Q, 1/n), P, r_2) - \frac{r_2^2}{4} \mu_0(\Delta \mu_1^2(v, Q, 1/n), P, r_2) \end{aligned}$$

almeno per  $n$  abbastanza grande, il che è impossibile perché  $\mu_1^2(v, P, 1/n)$  è sub-biarmonica di classe  $K^4$ .

Con semplici derivazioni, si ha poi che: *se  $v(P)$ , di classe  $K^2$  in  $A$ , è sub(super)-biarmonica, sono funzioni non decrescenti (non crescenti) di  $r$  anche le medie*

$$\mu_0(v, P, r) - \frac{r}{2} \mu_0\left(\frac{\partial v}{\partial r}, P, r\right) \quad ; \quad -\mu_0(v, P, r) + 2\mu_1(v, P, r) \quad ;$$

$$\frac{1}{r^3} \int_0^{r/2\pi} \int_0^{2\pi} (4r - 5\rho) v \rho d\rho d\theta \quad (7).$$

(7) Per altri risultati consimili, nell'ipotesi che  $v(P)$  sia di classe  $K^4$ , cfr. anche W. H. BRADFORD, *Sub-biharmonic functions*, «Duke Math. J.», 20 (1953).

**Geometria.** — *Sull'equivalenza birazionale delle due varietà di Picard associate ad una varietà superficialmente irregolare.* Nota di MARIO ROSATI, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

Ad una varietà algebrica  $W$  di irregolarità superficiale  $p > 0$  si possono associare due varietà di Picard: l'una,  $V_p$ , relativa alla matrice di Riemann dei periodi degli integrali semplici di prima specie su  $W$ ; l'altra,  $V'_p$ , immagine dei sistemi lineari completi di un sistema continuo  $\infty^p$  di sistemi lineari di ipersuperficie su  $W$ . Esse furono introdotte, nel caso che  $W$  sia una superficie, rispettivamente da Severi [9] <sup>(1)</sup> e Castelnuovo [3], il primo dei quali rilevò fin dal 1913 la circostanza che  $V_p$  e  $V'_p$  non sono sempre birazionalmente equivalenti, richiamando così l'attenzione sul problema delle relazioni intercedenti tra  $V_p$  e  $V'_p$ .

La questione è stata recentemente ripresa da A. Andreotti [1], [2] (come pure da altri autori: [4], [8], [10]), il quale ha mostrato che  $V'_p$  è la varietà di Picard costruita al modo di Castelnuovo a partire dalla varietà  $V_p$  (che ha irregolarità superficiale  $p$ ): essa è cioè immagine dei sistemi lineari di ipersuperficie contenuti in un sistema continuo  $\infty^p$  sopra  $V_p$ ; e inoltre che tale relazione tra  $V_p$  e  $V'_p$  è scambievole. Conseguentemente, almeno in un primo tempo, si può supporre che la  $W$  di partenza sia una varietà di Picard, e il problema si traduce in quello di studiare le relazioni tra una qualunque  $V_p$  di Picard e la  $V'_p$  di Picard che rappresenta i sistemi lineari di un sistema continuo  $\infty^p$  sopra  $V_p$ .

In questa Nota comincio ad esaminare i casi in cui  $V_p$  e  $V'_p$  sono birazionalmente equivalenti, dandone una caratterizzazione e mostrando come la loro classificazione si possa ricondurre ad un problema aritmetico della teoria delle funzioni abeliane modulari.

Se  $\omega = \|\Delta^{-1} \Omega\|$  è una qualunque matrice di Riemann in forma normale <sup>(2)</sup> associata a  $V_p$ , appartenente al livello  $\Delta$  di divisori  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$ , come matrice di Riemann relativa a  $V'_p$  si può assumere ([2], § 1) la:

$$(1) \quad \omega' = \|U \Omega \Delta\| = \omega \begin{vmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{vmatrix} = \omega C, \quad \text{con } C = \begin{vmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{vmatrix}.$$

La  $\omega'$  appartiene ad un livello  $\Delta'$  generalmente distinto da  $\Delta$  (i casi di coincidenza sono caratterizzati nel n. 1); essa è ovviamente isomorfa ad  $\omega$ : corrispondentemente, ciascuna delle due varietà  $V_p, V'_p$  è trasformata razionale dell'altra ([5], cap. I, n. 23). Quando  $\Delta = U$ , la (1) porge  $\omega' = \omega$ : nel

(\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) I numeri tra parentesi quadrate si riferiscono alla Bibliografia.

(2) È la forma normale adottata nel volume [5], che differisce da quella di Krazer per il fattore  $\pi i$ ; la relativa matrice principale si presenta allora nella forma  $M_0 = \begin{vmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{vmatrix}$ . Rinviamo pure a [5] per le nozioni qui occorrenti sulle funzioni abeliane.





Dunque: Se la matrice di Riemann  $\omega = \|\Delta^{-1} \Omega\|$  è associata alla varietà di Picard  $V_p$ , la matrice  $\omega' = \|\Delta'^{-1} \Omega'\|$ , con  $\Delta', \Omega'$  date dalle (1.3), (1.4), è associata alla  $V'_p$  di Picard immagine dei sistemi lineari di ipersuperficie contenuti in un sistema continuo  $\infty^p$  sopra  $V_p$ .

Associando ad ogni matrice  $\omega = \|\Delta^{-1} \Omega\|$ , di un dato livello  $\Delta$ , la matrice  $\omega' = \|\Delta'^{-1} \Omega'\|$  del livello  $\Delta'$  ((1.3), (1.4)), nasce tra i due livelli, pensati come insiemi di matrici di Riemann, una corrispondenza ciclica del secondo ordine; iterando infatti le (1.3), (1.4) si ottiene:

$$(1.6) \quad \begin{cases} \Delta' = \delta_p J \Delta'^{-1} J = \delta_p J \left( \frac{1}{\delta_p} J \Delta J \right) J = \Delta \\ \Omega' = \frac{1}{\delta_p} J \Delta' \Omega' \Delta' J = \frac{1}{\delta_p} J (\delta_p J \Delta'^{-1} J) \frac{1}{\delta_p} J \Delta \Omega \Delta J (\delta_p J \Delta'^{-1} J) J = \Omega. \end{cases}$$

La relazione tra  $\omega$  ed  $\omega'$  è quindi simmetrica; con riferimento alle corrispondenti varietà di Picard si può dire: anche  $V_p$  è l'immagine dei sistemi lineari di un sistema continuo  $\infty^p$  di ipersuperficie sopra  $V'_p$  (cfr. fin qui [2], § 1).

OSSERVAZIONE I. - Riferendosi alla rappresentazione delle matrici complesse simmetriche  $\Omega = X + iY = \|\omega_{hk}\| = \|x_{hk} + iy_{hk}\|$  mediante i punti di uno spazio euclideo reale  $S$  a  $p(p+1)$  dimensioni, nel quale siano coordinate le  $x_{hk}, y_{hk}$  ( $h \leq k$ ), le matrici di Riemann  $\omega = \|\Delta^{-1} \Omega\|$  di un prefissato livello si possono rappresentare con i punti di una regione  $R$  di  $S$ , per i quali la  $Y$  è definita positiva ([5] cap. I, n. 16). Tale rappresentazione, essendo indipendente da  $\Delta$ , è la medesima per tutti i livelli. Nello spazio  $S$  anzidetto la (1.4), pensata come relazione tra le  $x'_{hk}, y'_{hk}$  e le  $x_{hk}, y_{hk}$ , si interpreta come equazione di una affinità involutoria, che muta in sè la regione  $R$  e deve quindi coincidere ([5], cap. II, n. 39) con una trasformazione simplettica di  $R$  in sè. La (1.4) infatti è la trasformazione simplettica relativa alla matrice di ordine  $2p$  ([5], cap. II, (8.1)):

$$T = \begin{vmatrix} \sqrt{\delta_p} \Delta^{-1} J & O \\ O & \frac{1}{\sqrt{\delta_p}} \Delta J \end{vmatrix}.$$

OSSERVAZIONE II. - La (1.3) esprime una legge di associazione tra i livelli, che risulta involutoria in virtù della (1.6). Caratterizziamo qui i casi in cui  $\Delta = \Delta'$ , cioè gli elementi uniti di detta involuzione. Tenendo presente la (1.5), sarà  $\Delta = \Delta'$  quando nella successione dei divisori elementari  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$  il prodotto di due elementi equidistanti dagli estremi vale  $\delta_p$ :

$$\delta_h \delta_{p-h+1} = \delta_p.$$

Ciò si verifica con le seguenti modalità:

per  $p = 2q$  (pari), si possono dare ad arbitrio i primi  $q+1$  divisori (con  $\delta_1 = 1, \delta_i/\delta_{i-1}$  intero per  $i = 2, 3, \dots, q+1$ ) ed assumere i rimanenti:

$$\delta_{q+1+h} = \frac{\delta_q \delta_{q+1}}{\delta_{q-h}} \quad (h = 1, 2, \dots, q-1);$$

per  $p = 2q+1$  (dispari), si possono dare ad arbitrio i primi  $q+1$  divisori (con le solite condizioni) ed assumere i rimanenti:

$$\delta_{q+1+h} = \frac{\delta_{q+1}^2}{\delta_{q+1-h}} \quad (h = 1, 2, \dots, q).$$

È chiaro che in entrambi i casi si ottiene una  $p$ -pla di interi che sono possibili divisori elementari di un qualche livello (essendo  $\delta_1 = 1, \delta_h/\delta_{h-1}$  intero per  $h = 2, \dots, p$ ). Si osservi che quando  $p$  è dispari,  $\delta_p$  è necessariamente un quadrato, mentre quando  $p$  è pari,  $\delta_p$  è multiplo di un quadrato. Infine tutti i livelli sono uniti quando  $p = 2$ .

OSSERVAZIONE III. — La relazione (1) tra  $\omega$  ed  $\omega'$ , come si è ricordato, assicura che le due varietà di Picard  $V_p, V'_p$  sono l'una trasformata razionale dell'altra; si può anzi precisare ([5], cap. I, n. 23):  $V_p$  è immagine di un'involuzione di gruppi di  $|C| = |\Delta|^2$  punti sopra  $V'_p$ ; scambievolmente, poiché  $\omega' C^{-1} = \omega$ , dopo aver moltiplicato i due membri per  $\delta_p$ , così da rendere intera  $C^{-1}$ , si vede che  $V'_p$  è immagine di un'involuzione di gruppi di punti sopra  $V_p$ , di ordine:

$$|\delta_p C^{-1}| = \delta_p^{2p} |\Delta^{-1}|^2 = \left( \frac{\delta_p}{\delta_1} \frac{\delta_p}{\delta_2} \dots \frac{\delta_p}{\delta_p} \right)^2 = |\Delta'|^2.$$

L'ordine dell'involuzione esistente sopra una delle due varietà è quindi in una semplice relazione con i divisori elementari dell'altra varietà a cui è birazionalmente equivalente.

2. EQUIVALENZA BIRAZIONALE DELLE DUE VARIETÀ DI PICARD  $V_p$  e  $V'_p$ . — L'identità birazionale delle due varietà  $V_p$  e  $V'_p$  ha luogo quando siano equivalenti, nel senso di G. Scorza, le due matrici  $\omega$  ed  $\omega'$ , cioè quando sia soddisfatta una relazione del tipo:

$$(2.1) \quad \alpha \omega' = \omega A$$

con una  $\alpha^{(p,p)}$  complessa non degenerare ed una  $A^{(2p,2p)} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$  unimodulare (intera); relazione che, per la (1.2), si esplicita nelle:

$$\alpha \Delta'^{-1} = \Delta^{-1} A_1 + \Omega A_3, \quad \alpha \Omega' = \Delta^{-1} A_2 + \Omega A_4.$$

Eliminando la matrice  $\alpha$  tra le due equazioni scritte si ottiene:

$$(\Delta^{-1} A_1 + \Omega A_3) \Delta' \Omega' = \Delta^{-1} A_2 + \Omega A_4;$$

e tenendo conto delle (1.3), (1.4) si perviene alla relazione:

$$\Delta^{-1} A_1 J \Omega + \Omega A_3 J \Omega = \Delta^{-1} A_2 J \Delta^{-1} + \Omega A_4 J \Delta^{-1}.$$

Questa equivale all'equazione in matrici:

$$\| \Delta^{-1} \Omega \| \begin{vmatrix} -A_2 J & A_1 J \\ -A_4 J & A_3 J \end{vmatrix} \| \Delta^{-1} \| \Omega \| = 0,$$

ovvero:

$$(2.2) \quad \omega M \omega_{-1} = 0,$$

ove la matrice  $M$  (di ordine  $2p$ ) definita mediante la:

$$(2.3) \quad M = \begin{vmatrix} -A_2 J & A_1 J \\ -A_4 J & A_3 J \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} O & J \\ -J & O \end{vmatrix} = AL,$$

con:

$$(2.4) \quad L = \begin{vmatrix} O & J \\ -J & O \end{vmatrix} = -L_{-1} = -L^{-1},$$

è unimodulare, tali essendo  $A^{(2p,2p)}$  ed  $J^{(p,p)}$ .

Viceversa, se  $\omega$  soddisfa un'equazione come la (2.2) con una  $M$  unimodulare, attraverso la (2.3) resta univocamente determinata una  $A = M \begin{vmatrix} O & -J \\ J & O \end{vmatrix} = ML^{-1} = ML_{-1}$ ; risalendo il ragionamento in senso inverso, si arriva ad una relazione del tipo (2.1) che assicura l'equivalenza di  $\omega$  ed  $\omega'$ .

La (2.2) equivale anche alla relazione di Hurwitz:

$$(2.5) \quad \Lambda \omega = \omega I,$$

con una opportuna  $\Lambda^{(p,p)}$  complessa ed  $I^{(2p,2p)} = M M_0^{-1}$  matrice razionale ([5], cap. I, n. 21, oss. II). Ed essendo, com'è noto, per una qualunque relazione di Hurwitz come la (2.5),  $|I| \geq 0$ , e inoltre  $|M_0^{-1}| > 0$ , si può precisare che la  $M$  è necessariamente modulare:  $|M| = +1$ . Si conclude così che:

*Le matrici di Riemann  $\omega^*$  (cioè le  $\omega$  equivalenti alla corrispondente  $\omega'$ ) sono tutte e sole quelle soddisfacenti un'equazione del tipo (2.2) con la  $M^{(2p,2p)}$  modulare.* Esse sono anche caratterizzate dal soddisfare una relazione di Hurwitz (2.5) nella quale la  $I$  sia il prodotto di una matrice modulare  $M$  per l'inversa di  $M_0$ . Nel caso del livello unitario ( $\Delta = U$ ), assumendo come  $M$  la matrice principale  $M_0 = \begin{vmatrix} 0 & U \\ -U & 0 \end{vmatrix}$  comune a tutte le  $\omega$  del livello, si ritrova che queste ultime sono tutte del tipo  $\omega^*$ ; sempre in quest'ipotesi, con riferimento alla (2.5) si ha  $I = M M_0^{-1} = M_0 M_0^{-1} = U$  (da cui segue  $\Lambda = U$ ) e la (2.5) si riduce alla relazione di Hurwitz identica.

Se invece  $\Delta \neq U$  un'equazione come la (2.2) non è mai soddisfatta da tutte le matrici di Riemann del livello ([5], cap. I, n. 19); in tal caso le matrici  $\omega$  soluzioni della (2.2) riempiono una varietà  $\mathcal{V}$  subordinata allo spazio ambiente  $S_{p(p+1)}$  (cfr. n. 1), che risulta intersezione di un certo numero di iperquadriche, in quanto le relazioni scalari equivalenti alla (2.2) sono quadratiche negli elementi di  $\Omega$ , ed anche nelle loro parti reali ed immaginarie. Naturalmente di ogni varietà  $\mathcal{V}$  interessa la parte reale interna alla regione  $R$ .

Importa osservare l'invarianza, rispetto alla relazione di equivalenza tra matrici di Riemann, della circostanza che una matrice di Riemann  $\omega$  sia soluzione di un'equazione del tipo (2.2).

Infatti da  $\omega M \omega_{-1} = O$  ( $M$  modulare) e dall'equivalenza di  $\omega$  ed  $\omega^{(t)}$ :  $\beta \omega^{(t)} = \omega B$  ( $\beta$  non degenerare,  $B$  unimodulare) segue:

$$\beta \omega^{(t)} B^{-1} M B_{-1}^{-1} \omega_{-1}^{(t)} \beta_{-1} = O;$$

sicché, essendo  $\beta$  non degenerare, la  $\omega^{(t)}$  soddisfa l'equazione:

$$\omega^{(t)} (B^{-1} M B_{-1}^{-1}) \omega_{-1}^{(t)} = O,$$

in cui la matrice  $B^{-1} M B_{-1}^{-1}$  è ancora modulare. Ciò mostra come:

*Affinché una varietà di Picard  $V_p$  sia birazionalmente equivalente alla varietà di Picard  $V'_p$ , immagine dei sistemi lineari di un suo sistema continuo  $\infty^p$ , è necessario e sufficiente che una qualunque matrice di Riemann  $\omega$  associata a  $V_p$  soddisfi un'equazione (2.2):  $\omega M \omega_{-1} = O$ , con  $M$  modulare.*

Quest'osservazione mostra che la caratterizzazione delle matrici  $\omega^*$ , data in questo numero, non è legata alla forma normale usata per le matrici di Riemann; è tuttavia opportuno, per ulteriori sviluppi, l'aver adottato la forma normale.

3. SULLA RIDUZIONE A TIPI DEI CASI DI EQUIVALENZA TRA  $V_p$  E  $V'_p$ . — Il problema di determinare, a meno di trasformazioni birazionali, tutte le varietà di Picard  $V_p$  che siano equivalenti birazionalmente alla corrispondente  $V'_p$ , coincide, secondo i risultati del numero precedente, con quello di determinare, a meno della relazione di equivalenza, tutte le matrici di Riemann  $\omega^*$  soddisfacenti un'equazione del tipo (2.2). Per quanto osservato alla fine del n. 2 si può quindi limitare la ricerca alle matrici in forma normale  $|\Delta^{-1}\Omega|$  appartenenti a varietà del tipo  $\mathfrak{V}$ . Ora è chiaro che non tutte le varietà  $\mathfrak{V}$  di un dato livello  $\Delta$  constano di matrici distinte rispetto all'equivalenza, perché il gruppo modulare ristretto  $\Gamma_\Delta$  relativo al livello  $\Delta$ , che conserva l'equivalenza tra matrici di Riemann, trasforma una varietà  $\mathfrak{V}$  di equazione  $\omega M \omega_{-1} = O$  in una varietà  $\mathfrak{V}^{(t)}$  equivalente di equazione  $\omega TM T_{-1} \omega_{-1} = O$ , essendo  $T$  matrice di  $\Gamma_\Delta$  e quindi  $TM T_{-1}$  modulare (cfr. [5], cap. II). In base a questa osservazione, un primo passo verso la risoluzione del problema può essere quello di considerare la  $M$  determinata a meno di una moltiplicazione simultanea a sinistra per una matrice di  $\Gamma_\Delta$  e a destra per la sua trasposta. In altre parole, nulla si perde — in ordine al problema in esame — studiando le varietà  $\mathfrak{V}$  di matrici di Riemann di un dato livello, nella cui equazione (2.2) la  $M$  sia variabile in un sistema di rappresentanti rispetto alla relazione che associa due matrici  $M, M^{(t)}$  quando sia:

$$(3.1) \quad M^{(t)} = TMT_{-1}$$

con  $T$  matrice del gruppo  $\Gamma_\Delta$ .

Si presenta così il problema di ridurre a forma canonica le matrici  $M^{(2p, 2p)}$  modulari mediante la (3.1), disponendo di una  $T$  di  $\Gamma_\Delta$ . Il problema si presenta più generalmente sotto questa forma o una consimile, per matrici  $M^{(2p, 2p)}$  intere, non necessariamente modulari, anche in altre questioni che interessano le funzioni abeliane modulari; come, per esempio, in una classificazione a meno di equivalenza delle matrici di Riemann singolari, o semplicemente a moltiplicazione complessa; oppure nella determinazione delle matrici di Riemann singolari, che abbiano due matrici principali con uguali divisori elementari ([5], cap. II, n. 2).

Per quanto riguarda la nostra questione, una volta determinate le varietà  $\mathfrak{V}$  incongrue rispetto al gruppo  $\Gamma_\Delta$  di un dato livello  $\Delta$ , resta da indagare l'eventualità che siano equivalenti due matrici di Riemann appartenenti ad una medesima o a due distinte varietà  $\mathfrak{V}$  incongrue, o eventualmente a due varietà  $\mathfrak{V}$  relative a due diversi livelli.

La riduzione a forma canonica di una matrice intera  $M$ , a norma della formula (3.1) si può desumere, nell'ipotesi che  $M$  sia emisimmetrica, da lavori di G. Humbert (per  $p = 2, \Delta = U$ ) e di G. Cotty (per  $p = 2, \Delta$  qualunque), che sono citati nella bibliografia. Non entriamo qui in merito alla riduzione delle matrici  $M$  a forma canonica, riservandoci di tornarvi in altro lavoro. Vogliamo piuttosto mostrare, nel prossimo numero, come il procedimento qui prospettato per lo studio delle varietà  $\mathfrak{V}$  sia invariante di fronte alla corrispondenza involutoria tra i livelli espressa dalla (1.4).



4. SEGUITO. - La corrispondenza involutoria tra i livelli espressa dalla (1.4) muta una varietà  $\mathfrak{W}$  di matrici  $\omega^*$  in un'analoga varietà  $\mathfrak{W}'$ . Ciò è evidente *a priori* se si pensa che le matrici  $\omega'$  del livello  $\Delta'$ , corrispondenti delle  $\omega$ , sono anch'esse matrici del tipo  $\omega^*$ , data la relazione simmetrica tra  $\omega$  ed  $\omega'$ . D'altronde, se  $\omega M \omega_{-1} = O$  ( $M$  modulare) è l'equazione della  $\mathfrak{W}$ , vuol dire che  $\omega$  ed  $\omega'$  sono legate dalla relazione  $\alpha \omega' = \omega A$ , essendo (cfr. (2.3))  $A = M L^{-1}$  ed  $\alpha$  opportuna non degenerare: ma allora  $\omega'$  soddisfa l'equazione  $\omega' A^{-1} M A_{-1}^{-1} \omega'_{-1} = O$ , cioè:

$$(4.1) \quad \omega' M' \omega'_{-1} = O,$$

ove la matrice:

$$(4.2) \quad M' = A^{-1} M A_{-1}^{-1} = L M^{-1} M M_{-1}^{-1} L_{-1} = L M_{-1}^{-1} L_{-1}$$

è modulare.

La (4.1) è precisamente l'equazione della varietà  $\mathfrak{W}'$  nel livello  $\Delta'$ .

È chiaro poi che la relazione tra  $M$  ed  $M'$  è simmetrica perché:

$$M'' = L (L M_{-1}^{-1} L_{-1})_{-1}^{-1} L_{-1} = L L_{-1}^{-1} M L^{-1} L_{-1} = M.$$

In secondo luogo, siano  $\mathfrak{W}, \mathfrak{W}'$  due varietà di matrici  $\omega^*$  del livello  $\Delta$ , equivalenti rispetto al gruppo modulare ristretto  $\Gamma_\Delta$  del livello  $\Delta$ , di equazioni rispettive:

$$\omega M \omega_{-1} = O, \quad \omega N \omega_{-1} = O,$$

essendo:

$$(4.3) \quad N = T M T_{-1}$$

con  $T$  matrice di  $\Gamma_\Delta$ , soddisfacente quindi la relazione:

$$(4.4) \quad T M_0 T_{-1} = M_0 = \begin{vmatrix} O & \Delta \\ -\Delta & O \end{vmatrix}.$$

Affermo che le loro trasformate  $\mathfrak{W}', \mathfrak{W}''$  nel livello  $\Delta'$ , sono equivalenti rispetto al gruppo modulare ristretto  $\Gamma_{\Delta'}$  del livello  $\Delta'$ . Infatti, per la (4.2) le equazioni di  $\mathfrak{W}', \mathfrak{W}''$  saranno:

$$\omega' M' \omega'_{-1} = O, \quad \omega' N' \omega'_{-1} = O$$

con:

$$M' = L M_{-1}^{-1} L_{-1}, \quad N' = L N_{-1}^{-1} L_{-1}.$$

Da queste, tenendo conto della (4.3), discende la relazione tra  $M'$  ed  $N'$ :

$$N' = L T_{-1}^{-1} M_{-1}^{-1} T^{-1} L_{-1} = (L T_{-1}^{-1} L^{-1}) M' (L_{-1}^{-1} T^{-1} L_{-1}) = T' M' T'_{-1}.$$

Basta far vedere che la matrice (intera)  $T' = L T_{-1}^{-1} L^{-1}$  appartiene al gruppo modulare ristretto del livello  $\Delta'$ , cioè:

$$T' M'_0 T'_{-1} = M'_0 = \begin{vmatrix} O & \Delta' \\ -\Delta' & O \end{vmatrix}.$$

E così è, perché la (1.3) porge la seguente relazione tra le due matrici principali  $M_o$ ,  $M'_o$  dei due livelli  $\Delta$  e  $\Delta'$ :

$$M'_o = -\delta_p L M_o^{-1} L_{-1};$$

dunque:

$$\begin{aligned} T' M'_o T'_{-1} &= L T_{-1}^{-1} L^{-1} (-\delta_p L M_o^{-1} L_{-1}) L_{-1}^{-1} T^{-1} L_{-1} = \\ &= -\delta_p L T_{-1}^{-1} M_o^{-1} T^{-1} L_{-1} = -\delta_p L M_o^{-1} L_{-1} = M'_o, \end{aligned}$$

dato che  $T_{-1}^{-1} M_o^{-1} T^{-1} = M_o^{-1}$  (come si ha uguagliando le inverse dei due primi membri della (4.4)).

La corrispondenza tra i due livelli  $\Delta$  e  $\Delta'$  conserva dunque l'equivalenza delle varietà  $\mathfrak{V}$  rispetto al locale gruppo modulare ristretto; lo studio delle varietà  $\mathfrak{V}$  di fronte a tale gruppo, relativo ad uno qualunque dei due livelli, si conserva valido anche nell'altro.

La circostanza ora osservata è legata evidentemente all'esistenza di un *isomorfismo*, espresso dalla formula  $T' = L T_{-1}^{-1} L^{-1}$ , tra i due gruppi modulari ristretti  $\Gamma_\Delta$  e  $\Gamma_{\Delta'}$  dei due livelli  $\Delta$  e  $\Delta'$  fra loro corrispondenti a norma della (1.3).

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] A. ANDREOTTI, *Sopra le varietà di Picard di una superficie algebrica*, «Rend. Acc. Nazionale dei XL» (4), 2, pp. 1-9 (1951).
- [2] A. ANDREOTTI, *Recherches sur les surfaces algébriques irrégulières*, «Mém. Académie royale de Belgique» (cl. des sciences), 27, fasc. 7 (1952).
- [3] G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, «Rend. Acc. Lincei» (5), 14, tre note (1905).
- [4] W. L. CHOW, *On Picard varieties*, «American Journal of Math.», 74, pp. 895-909 (1952).
- [5] F. CONFORTO, *Funzioni abeliane modulari*, «Corsi dell'Istituto Naz. di Alta Matematica», DOCET, edizioni universitarie, Roma (1951).
- [6] G. COTTY, *Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres*, «Annales de la faculté des sciences de l'université de Toulouse» (3), 3, pp. 209-376 (1911).
- [7] G. HUMBERT, *Sur les fonctions abéliennes singulières* (Premier mémoire), «Journal de Mathématiques» (5), 5, pp. 233-350 (1899).
- [8] J. IGUSA, *On the Picard varieties attached to algebraic varieties*, «American Journal of Math.», 74, pp. 1-22 (1952).
- [9] F. SEVERI, *Un teorema di inversione per gli integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica*, «Atti Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti», 72, pp. 765-772 (1913).
- [10] A. WEIL, *On Picard varieties*, «American Journal of Math.», 74, pp. 865-894 (1952).

**Geometria.** — *Interi caratteristici e divisori elementari delle matrici normali di Severi.* Nota di MARIO BENEDICTY, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

1. Nel presente lavoro intendo per *matrice quasi abeliana* (brevemente MES) [6] una matrice complessa  $\omega^{(g, g')}$  ( $g' \leq 2g$ ) equivalente, nel senso più sotto precisato, ad una *matrice normale di Severi* (brevemente MNS), cioè ad una matrice del tipo (1):

$$(1) \quad \left\| \begin{array}{ccc} A^{(p)} & O^{(p, \delta_1)} & \Omega^{(p)} \\ O^{(\delta_1, p)} & U^{(\delta_1)} & \Phi'^{(\delta_1, p)} \\ O^{(\delta_2, p)} & O^{(\delta_2, \delta_1)} & \Psi'^{(\delta_2, p)} \end{array} \right\|,$$

nella quale:

$A$  è una matrice diagonale non degenerare tale che  $\Delta = A^{-1}$  sia una matrice (diagonale) i cui elementi principali  $d_1, d_2, \dots, d_p$  sono interi positivi, con  $d_1 = 1$  e  $d_{i-1}$  divisore di  $d_i$  ( $i=2, 3, \dots, p$ ); essi si dicono *divisori elementari* della (1);

$\Omega = \Omega' + i\Omega''$  è una matrice complessa simmetrica la cui parte immaginaria  $\Omega''$  è la matrice dei coefficienti di una forma quadratica definita e positiva. Le condizioni precedenti equivalgono a dire che  $\|A\Omega\|$  è una matrice normale di Riemann, che si dirà *associata* alla (1);

$$\Psi' = \left\| \begin{array}{cc} U^{(q)} & \Psi^{(q, p-q)} \\ O^{(\delta_2-q, q)} & O^{(\delta_2-q, p-q)} \end{array} \right\|, \text{ con } \Psi \text{ matrice complessa arbitraria;}$$

$$\Phi' = \left\| O^{(\delta_1, q)} \quad \Phi^{(\delta_1, p-q)} \right\|, \text{ con } \Phi \text{ matrice complessa arbitraria.}$$

Due matrici complesse simili  $\omega^{(g, g')}$ ,  $\omega^{*(g, g')}$  si dicono *equivalenti* se esistono una matrice complessa non degenerare  $\beta^{(g)}$  ed una matrice intera unimodulare  $B^{(g')}$  tali che:

$$(2) \quad \omega^* = \beta \omega B.$$

Questa relazione risulta riflessiva, simmetrica e transitiva, e quindi matrici equivalenti ad una MES sono MES.

Nel presente lavoro espongo i principali risultati di un lavoro [3], di prossima pubblicazione, relativi alla soluzione del seguente problema, da me posto in [1] e [2]. Una MES, essendo equivalente ad una MNS, determina gli interi  $p, \delta_1, \delta_2, \rho$  (interi associati) e  $d_1, d_2, \dots, d_p$  (divisori elementari); si

(\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) Indico con  $M^{(r, s)}$  una matrice del tipo  $(r, s)$  cioè a  $r$  righe e  $s$  colonne; con  $M^{(r, r)}$  o  $M^{(r)}$  una matrice quadrata a  $r$  righe e colonne, con  $U^{(r)}$  la matrice diagonale unitaria a  $r$  righe e colonne, con  $O$  una matrice nulla.

tratta di accertare se o quando questi interi sono univocamente determinati dalla MES, e, quando non lo siano, di determinare tutti i loro possibili valori. La questione non è banale, perché una MNS, non appena sia  $2p + \delta_1 > 1$ , è equivalente a infinite MNS, le quali possono differire tra loro per i valori dei moduli, cioè degli elementi di  $\Omega$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$ , ovvero anche degli interi associati e dei divisori elementari.

Il problema evidentemente equivale a quello di *determinare gli interi caratteristici e i divisori elementari di tutte le MNS equivalenti ad una MNS prefissata.*

Esso è qui risolto completamente quando la caratteristica della matrice considerata sia uguale al numero delle colonne ovvero ne differisca di una unità; negli altri casi il problema è risolto nell'ipotesi che la matrice sia generica, nel senso precisato nel seguente n. 2. Tale distinzione non è dovuta ad un fatto contingente, ma alla natura della questione, cioè a proprietà intrinseche delle MES.

2. Per meglio intendere la natura del problema e la sua soluzione (n. 3), sono opportune le seguenti osservazioni:

a) la forma (1) di una MNS non è quella originale di Severi [6], ma, come sarà provato in [3], è ad essa equivalente;

b) una MNS (1) si dirà *generica*, o *a moduli generali* (cfr. [6], [5]) se e soltanto se gli elementi  $\tau_{rs}$  ( $r \leq s$ ;  $r, s = 1, 2, \dots, p$ ) della  $\Omega$  e tutti gli elementi di  $\Phi$  e  $\Psi$  sono algebricamente indipendenti sul campo razionale; una MES si dirà generica se è equivalente ad almeno una MNS generica;

c) se due MNS di caratteri  $p, \delta_1, \delta_2, \rho$  e rispettivamente  $p^*, \delta_1^*, \delta_2^*, \rho^*$  sono equivalenti, si ha necessariamente

$$(3) \quad p^* = p - k, \quad \delta_1^* = \delta_1 + 2k, \quad \delta_2^* = \delta_2 - k, \quad \rho^* = \rho - k,$$

ove  $k$  è un intero tale che  $-\lfloor \delta_2/2 \rfloor \leq k \leq \rho$ . Quindi, se una MES non determina gli interi associati, i loro valori dipendono al più dall'indeterminazione di  $k$ . In forma equivalente, se  $\omega^{(g, g')}$  è una MES di caratteristica  $h$ , i suoi interi associati sono necessariamente del tipo  $p = g' - h + \rho$ ,  $\delta_1 = 2h - g' - 2\rho$ ,  $\delta_2 = g - h + \rho$  con  $0 \leq 2\rho \leq 2h - g'$ . Si tenga presente che, in conseguenza della sua definizione, per una MES si ha necessariamente  $h \leq g' \leq 2h$ ; inoltre è sempre  $g' - h = p - \rho = p^* - \rho^*$ .

3. La risposta al problema del n. 1, con riferimento alla sua seconda formulazione, è contenuta nei tre seguenti teoremi (ved. [3]):

I. Ogni MNS (1), per la quale sia  $p = \rho$ , è equivalente alla MNS:

$$(4) \quad \left\| \begin{array}{c} U^{(\delta_1^*)} \\ O^{(\delta_2^*, \delta_1^*)} \end{array} \right\|$$

di caratteri  $p^* = 0$ ,  $\delta_1^* = \delta_1 + 2\rho$ ,  $\delta_2^* = \delta_2 - \rho$ ,  $\rho^* = 0$ .



II. Ogni MNS, per la quale  $p = \rho + 1$ , è equivalente ad una MNS:

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 1 & O^{(1, \delta_1^*)} & \tau \\ O^{(\delta_1^*, 1)} & U^{(\delta_1^*)} & \Phi^{(\delta_1^*, 1)} \\ O^{(\delta_2^*, 1)} & O^{(\delta_2^*, \delta_1^*)} & O^{(\delta_2^*, 1)} \end{vmatrix}$$

di caratteri  $p^* = 1$ ,  $\delta_1^* = \delta_1 + 2\rho$ ,  $\delta_2^* = \delta_2 - \rho$ ,  $\rho^* = 0$ .

III. Una MNS generica, per la quale  $p > \rho + 1$ , è equivalente soltanto a MNS aventi i medesimi interi associati e i medesimi divisori elementari.

A complemento del teorema III è da osservare che esso non può certamente venir esteso a tutte le MNS per le quali  $p > \rho + 1$ , perché esistono esempi (ved. [1]), anche abbastanza significativi, di matrici siffatte, che sono equivalenti a MNS aventi interi caratteristici ovvero divisori elementari diversi da quelli della matrice di partenza.

4. Dai teoremi del n. 3 si trae immediatamente quanto segue.

I. Una qualunque MES  $\omega^{(g, g')}$  di caratteristica  $g'$  ammette gli interi associati  $p = \rho$ ,  $\delta = g' - 2\rho$ ,  $\delta_2 = g - g' + \rho$ , con  $\rho = 0, 1, \dots, [g'/2]$  arbitrario, e divisori elementari arbitrari; essa è sempre equivalente alla (4), ove si intenda  $\delta_1^* = g'$ ,  $\delta_2^* = g - g'$ .

Per una siffatta matrice non hanno quindi significato intrinseco gli interi associati, i divisori elementari ed i moduli, quando si considerino le MES rispetto alla relazione di equivalenza (2); mantengono invece significato intrinseco, per quanto ovvio, le quantità  $2p + \delta_1$ ,  $p - \delta_2$  e le funzioni di queste.

II. Una qualunque MES  $\omega^{(g, g')}$  di caratteristica  $g' - 1$  ammette gli interi associati  $p = \rho + 1$ ,  $\delta_1 = g' - 2\rho - 2$ ,  $\delta_2 = g - g' + \rho + 1$ , con  $\rho = 0, 1, \dots, [g'/2] - 1$  arbitrario e divisori elementari arbitrari; essa è sempre equivalente ad una (5), ove si assuma  $\delta_1^* = g' - 2$ ,  $\delta_2^* = g - g' + 1$ .

Anche qui non hanno significato intrinseco i divisori elementari e gli interi caratteristici, pur avendolo le quantità  $2p + \delta_1$ ,  $p - \delta_2$ ; mantengono invece significato i moduli, in numero di  $g' - 1$ , come mette in luce la (5), in cui essi sono rappresentati da  $\tau$  e dagli elementi di  $\Phi$ .

III. Una MES  $\omega^{(g, g')}$  di caratteristica minore di  $g' - 1$ , se è generica, individua univocamente gli interi associati (o caratteristici) e i divisori elementari. Poiché non si conoscono attualmente le condizioni affinché una matrice complessa sia una MES, non si sanno calcolare gli interi caratteristici e i divisori elementari a partire dalla matrice; è però evidente che essi sono dipendenti, oltre che da  $g$ ,  $g'$  e dalla caratteristica, anche dagli elementi della matrice.

5. Come ho già detto, le dimostrazioni per esteso delle proprietà qui enunciate si troveranno in [3]; ne dò qui qualche breve cenno, soprattutto per quanto riguarda il teorema III.

I teoremi I e II del n. 3 si provano direttamente, cioè costruendo la relazione (2) tra la relativa MNS e la (4) o rispettivamente la (5); aggiungasi che il teorema I è veramente immediato.

Lo schema della dimostrazione del teorema III è il seguente. Sia  $\omega$  una qualsiasi MNS (1); la si scriva nella forma

$$\left\| \begin{array}{cc} X^{(\rho+\delta_1+\varrho)} & Y^{(\rho+\delta_1+\varrho, \rho-\delta)} \\ O^{(\delta_2-\varrho, \rho+\delta_1+\varrho)} & O^{(\delta_2-\varrho, \rho-\varrho)} \end{array} \right\|,$$

ottenuta raggruppandone le prime  $\rho + \delta_1 + \varrho$  e le ultime  $\delta_2 - \varrho$  righe, e le prime  $\rho + \delta_1 + \varrho$  e le ultime  $\rho - \varrho$  colonne.

Sia  $\omega^*$  un'altra MNS simile a  $\omega$ , e i suoi caratteri siano dati dalle (3); salvo uno scambio di denominazione delle due matrici, si può supporre che sia  $\rho \geq \rho^*$ , cioè  $k \geq 0$ . Siano  $X^*, Y^*, A^*$  le matrici minori della  $\omega^*$ , analoghe alle matrici  $X, Y, A$  della  $\omega$ . Posto:

$$(6) \quad M = \left\| \begin{array}{ccc} O^{(\rho)} & O^{(\rho, \delta_1)} & A^{(\rho)} \\ O^{(\delta_1, \rho)} & O^{(\delta_1)} & O^{(\delta_1, \rho)} \\ -A^{(\rho)} & O^{(\rho, \delta_1)} & O^{(\rho)} \end{array} \right\|,$$

si ha che: *Condizione necessaria perché  $\omega$  e  $\omega^*$  siano equivalenti è che esista una matrice unimodulare  $E$  tale che:*

$$(7) \quad Y_{-1}^* X_{-1}^{*-1} E_{-1} M E X^{*-1} Y^* = O.$$

Se  $\rho^* = \rho$  tale condizione non esiste; se  $\rho^* = \rho + 1$  essa è identica. Se  $\rho^* > \rho + 1$  essa rappresenta relazioni algebriche, sul campo razionale, tra i moduli della  $\omega^*$ . Tali relazioni, che in taluni casi possono essere identiche, non lo sono di certo se  $\rho > \rho^*$ . Si prova infatti che, se  $\omega^*$  è generica nel senso già precisato, la (7) implica che  $E_{-1} M E$  abbia caratteristica zero ovvero  $2\rho^*$ , mentre essa ha di sua natura la caratteristica  $2\rho$ . Ne segue dunque, se  $\omega^*$  è generica, che  $\rho^* = \rho$ ; analogamente si procede scambiando le veci delle due matrici; da  $\rho^* = \rho$  segue poi abbastanza facilmente che sono uguali i divisori elementari delle due matrici; cioè il teorema III del n. 3.

6. Un'altra importante conseguenza della (7) è la seguente: se  $\omega$  è una MNS generica e se  $\omega^*$  è una MNS ad essa equivalente, si prova che la (2) e la (7) implicano la  $B_{-1} M B = \pm M$ , cioè una delle due relazioni seguenti:

$$(8) \quad B_{-1} M B = M, \quad B'_{-1} M B' = M,$$

essendo  $B'$  la matrice ottenuta cambiando segno alle ultime  $\rho - \varrho$  colonne di  $B$ . Ne consegue il

TEOREMA IV: *Fissata una generica MNS  $\omega^{(g, g')}$  ed una matrice unimodulare  $B^{(g')}$ , condizione necessaria affinché esista una matrice complessa non degenera  $\beta^{(g)}$  tale che  $\beta \omega B$  sia una MNS è che valga una delle due relazioni (8),*

cioè che  $B$  ovvero  $B'$  appartenga al gruppo delle matrici unimodulari soddisfacenti alla  $(8_1)$ .

Questo teorema è analogo ad un teorema della teoria delle matrici di Riemann, per il quale la condizione del precedente enunciato è necessaria e sufficiente e si riduce alla sola  $(8_1)$ ; questa analogia sostanziale, sia pure in forma più debole, nonché l'analogia formale della  $(8_1)$  con la relazione definitrice del gruppo modulare ristretto (ved. [5]) del caso abeliano, suggerisce di chiamare *gruppo unimodulare ristretto* relativo ai caratteri  $p, \delta_1$  e alla matrice  $A^{(p)}$  (ovvero alla sua inversa  $\Delta^{(p)} = A^{-1}$ ) il gruppo delle matrici unimodulari  $B^{(g')}$  soddisfacenti alla  $(8_1)$ , essendo  $M$  data dalla (6). La definizione si può ovviamente estendere alle matrici reali non degeneri, pervenendo così ad una generalizzazione del gruppo simplettico (ved. [5]).

7. Tutti i risultati precedenti sono relativi all'aspetto algebrico-aritmetico della teoria delle matrici quasi abeliane. È noto [6], [4], [2] che tale aspetto non è equivalente all'aspetto funzionale, cioè alla teoria delle funzioni quasi abeliane; nel caso abeliano ( $g' = 2g$ ) la teoria delle matrici di Riemann e quella dei corpi di funzioni abeliane sono invece equivalenti, quando si definiscano alla nota maniera le classi di corpi e le classi di matrici. Ciò implica che rimane aperto il seguente problema:

interpretare i risultati precedenti nella teoria delle funzioni quasi abeliane, con gli adattamenti quasi certamente richiesti dalla mancante equivalenza delle due teorie.

Altri problemi da risolvere sull'argomento qui trattato sono:

rinforzare possibilmente il teorema IV del n. 6, avvicinandolo all'analogo relativo alla teoria delle matrici di Riemann; si noti che qui le  $B$  soddisfacenti alla  $(8_1)$  non sono necessariamente unimodulari;

studiare i gruppi unimodulari ristretti e i gruppi simplettici generalizzati;

determinare le condizioni necessarie e sufficienti perché una MNS con  $p > p + 1$  non individui i propri interi associati ovvero i propri divisori elementari e determinare quali sono i loro possibili valori.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] M. BENEDICTY, *Sui caratteri di matrici quasi abeliane equivalenti*, « Rend. di Mat. » (5), 12, pp. 332-339 (1953).
- [2] M. BENEDICTY, *Matrici quasi abeliane*, Quaderno di prossima pubblicazione a cura del Circolo di Ricerche Matematiche in Collaborazione, Roma.
- [3] M. BENEDICTY, *Sull'equivalenza tra matrici normali di Severi*, di prossima pubblicazione.
- [4] F. CONFORTO, *Sulla nozione di corpi equivalenti e di corpi coincidenti nella teoria delle funzioni quasi abeliane*, « Rend. Sem. Mat. Padova », pp. 292-310 (1949).
- [5] F. CONFORTO, *Funzioni abeliane modulari*, lezioni raccolte dal dott. M. ROSATI, vol. I, Docet, Roma 1951.
- [6] F. SEVERI, *Funzioni quasi abeliane*, « Pont. Ac. Scient. Scripta Varia », 4 (1947).

**Geometria algebrica.** — *Sulle superficie ellittiche con un fascio ellittico di curve di genere quattro.* Nota di MARIA SCAFATI, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

In questa Nota vengono riassunti brevemente alcuni risultati che interessano il problema della costruzione e classificazione delle superficie ellittiche. Un'esposizione più dettagliata sarà data in altro lavoro.

I. Come è ben noto, le superficie ellittiche sono caratterizzate dall'avere il genere aritmetico  $p_a = -1$  e dal possedere due distinti fasci di curve irriducibili:  
 1° un fascio (C) di curve birazionalmente identiche di genere  $\pi$ ;  
 2° un fascio (K) di curve di genere  $p_g$ , ellittiche, pure birazionalmente identiche, che sono le traiettorie del gruppo  $\Gamma$  continuo  $\infty^2$  di trasformazioni birazionali in sé ammesso dalla superficie.

Ciascuna K e ciascuna C si intersecano in  $n$  punti ( $n$ : determinante della superficie) e si ha così sulla superficie ellittica F un'involuzione  $I_n$  per cui la F stessa si può rappresentare ennuplamente sulla superficie ellittica, di determinante uno, prodotto di una curva di genere  $p_g$  e di una curva ellittica. Il gruppo  $\Gamma$  muta in sé ciascuna K e muta in sé il fascio (C); però esiste un sottogruppo finito  $\Gamma_n$  di  $\Gamma$  che lascia fisse anche le singole C e la  $I_n$  si può pensare generata da questo gruppo. Il gruppo  $\Gamma_n$  è ciclico o abeliano a base due, in quanto è un gruppo appartenente ad una curva ellittica: la generica curva K.

Non vi sono su F curve C multiple, mentre fra le curve K possono trovarsi  $t$  curve di molteplicità  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ) che segano sulle C gruppi di punti ridotti ad  $n/s_i$  punti  $s_i$ -pli (onde  $s_i$  divide sempre  $n$ ).

Allora per l'involuzione sulla generica C la formula di Zeuthen si scrive:

$$(I) \quad n(2p_g - 2) + \sum_i^t \frac{n}{s_i} (s_i - 1) = 2\pi - 2.$$

Fissato  $\pi$ , genere delle curve C, le possibili superficie ellittiche si potranno distinguere per il valore di  $p_g$  ( $\leq \pi$ ), per il determinante  $n$ , per il numero  $t$  delle K multiple, per i valori degli  $s_i$ ; caratteri interi parzialmente indipendenti fra loro. C'è poi da esaminare — a parità di questi valori — se si abbiano una o più famiglie di tali superficie ellittiche. In ciò consiste il problema della classificazione delle superficie ellittiche.

I casi  $\pi = 0$  ( $p_g = 0$ ) e  $\pi = 1$  ( $p_g = 0$ ) sono stati trattati da F. Enriques <sup>(1)</sup>; il caso  $\pi = 2$  ( $p_g = 0$ ) da Campedelli <sup>(2)</sup> e per  $\pi = 3$  ( $p_g = 0, 1, 2, 3$ ) una Memoria di Conforto e Gherardelli <sup>(3)</sup> offre una trattazione completa del pro-

(\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche* (Zanichelli, Bologna 1949).

(2) *Intorno alle superficie ellittiche con un fascio di curve di genere due*, « Rend. Sem. Mat. di Padova », 1935.

(3) *Classificazione delle superficie ellittiche con un fascio ellittico di curve di genere tre*, « Ann. mat. pura e applicata », vol. XXXIII, 1951.



blema. Il caso  $\pi = 4$  non era stato finora considerato e qui fisso appunto l'attenzione sulle superficie ellittiche che posseggono un fascio (C) di curve di genere 4.

2. - In via preliminare, si può procedere alla discussione dell'equazione di analisi indeterminata, fornita dalla (I) per  $\pi = 4$ . In base ad essa, si possono determinare tutti i valori di  $p_g, n, t, s_i$  a priori possibili; ho effettivamente trovato così le seguenti 46 soluzioni, ordinandole per valori crescenti di  $p_g$ , e - a parità di  $p_g$  - per valori crescenti di  $n$ :

$$p_g = 0:$$

I)	$n = 2$	$t = 10$	$s_1 = s_2 = s_3 = \dots = s_{10} = 2;$
II)	$n = 3$	$t = 6$	$s_1 = s_2 = \dots = s_6 = 3;$
III)	$n = 4$	$t = 5$	$s_1 = 2, s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 4;$
IV)	$n = 4$	$t = 6$	$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2, s_5 = s_6 = 4;$
V)	$n = 4$	$t = 7$	$s_1 = s_2 = \dots = s_7 = 2;$
VI)	$n = 5$	$t = 4$	$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 5;$
VII)	$n = 6$	$t = 4$	$s_1 = 2, s_2 = s_3 = s_4 = 6;$
VIII)	$n = 6$	$t = 4$	$s_1 = s_2 = 3, s_3 = s_4 = 6;$
IX)	$n = 6$	$t = 5$	$s_1 = s_2 = s_3 = 2, s_4 = 3, s_5 = 6;$
X)	$n = 6$	$t = 5$	$s_1 = s_2 = 2, s_3 = s_4 = s_5 = 3;$
XI)	$n = 6$	$t = 6$	$s_1 = s_2 = \dots = s_6 = 2;$
XII)	$n = 8$	$t = 4$	$s_1 = s_2 = 2, s_3 = s_4 = 8;$
XIII)	$n = 8$	$t = 4$	$s_1 = 2, s_2 = s_3 = s_4 = 4;$
XIV)	$n = 9$	$t = 3$	$s_1 = s_2 = s_3 = 9;$
XV)	$n = 9$	$t = 4$	$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 3;$
XVI)	$n = 10$	$t = 3$	$s_1 = 5, s_2 = s_3 = 10;$
XVII)	$n = 10$	$t = 4$	$s_1 = s_2 = 2, s_3 = s_4 = 5;$
XVIII)	$n = 12$	$t = 3$	$s_1 = 3, s_2 = s_3 = 12;$
XIX)	$n = 12$	$t = 3$	$s_1 = s_2 = s_3 = 6;$
XX)	$n = 12$	$t = 3$	$s_1 = 4, s_2 = 6, s_3 = 12;$
XXI)	$n = 12$	$t = 4$	$s_1 = s_2 = 2, s_3 = s_4 = 4;$
XXII)	$n = 12$	$t = 4$	$s_1 = s_2 = 2, s_3 = 3, s_4 = 6;$
XXIII)	$n = 12$	$t = 5$	$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 2;$
XXIV)	$n = 15$	$t = 3$	$s_1 = 3, s_2 = 5, s_3 = 15;$
XXV)	$n = 15$	$t = 3$	$s_1 = s_2 = s_3 = 5;$
XXVI)	$n = 16$	$t = 3$	$s_1 = 2, s_2 = s_3 = 16;$
XXVII)	$n = 18$	$t = 3$	$s_1 = 2, s_2 = 9, s_3 = 18;$
XXVIII)	$n = 18$	$t = 3$	$s_1 = 3, s_2 = s_3 = 6;$
XXIX)	$n = 18$	$t = 4$	$s_1 = s_2 = 2, s_3 = s_4 = 3;$
XXX)	$n = 20$	$t = 3$	$s_1 = 2, s_2 = s_3 = 10;$
XXXI)	$n = 24$	$t = 3$	$s_1 = 2, s_2 = s_3 = 8;$
XXXII)	$n = 24$	$t = 3$	$s_1 = s_2 = s_3 = 4;$
XXXIII)	$n = 30$	$t = 3$	$s_1 = 2, s_2 = 5, s_3 = 10;$
XXXIV)	$n = 36$	$t = 3$	$s_1 = 2, s_2 = s_3 = 6.$

$$p_g = 1:$$

XXXV)	$n = 2$	, $t = 6$	, $s_1 = s_2 = \dots = s_6 = 2$ ;
XXXVI)	$n = 3$	, $t = 3$	, $s_1 = s_2 = s_3 = 3$ ;
XXXVII)	$n = 4$	, $t = 2$	, $s_1 = s_2 = 2$ ;
XXXVIII)	$n = 4$	, $t = 3$	, $s_1 = s_2 = s_3 = 2$ ;
XXXIX)	$n = 6$	, $t = 2$	, $s_1 = s_2 = 2$ ;
XL)	$n = 7$	, $t = 1$	, $s = 7$ ;
XLI)	$n = 8$	, $t = 1$	, $s = 4$ ;
XLII)	$n = 9$	, $t = 1$	, $s = 3$ ;
XLIII)	$n = 12$	, $t = 1$	, $s = 2$ .

$$p_g = 2:$$

XLIV)	$n = 2$	, $t = 2$	, $s_1 = s_2 = 2$ ;
XLV)	$n = 3$	, $t = 0$ .	

$$p_g = 3:$$

nessuna soluzione.

$$p_g = 4:$$

XLVI)	$n = 1$	, $t = 0$ .	
-------	---------	-------------	--

3. - Per provare l'effettiva esistenza delle superficie ellittiche corrispondenti ad una soluzione aritmetica trovata e giungere alla loro costruzione, conviene ricondursi alla classificazione, dal punto di vista birazionale, delle curve di genere quattro con un gruppo  $G_n$  di trasformazioni birazionali in sé, ciclico o abeliano a base due.

Infatti, basta assumere ciascuna di queste curve come trasformata birazionale delle curve  $C$  di  $F$ , l'involuzione determinata su di esse dal  $G_n$  pensando come corrispondente dell'involuzione segata sulla generica  $C$  dal fascio  $(K)$ .

Mi sono limitata a considerare - per ora - le curve di genere quattro iperellittiche, ed ho costruito le superficie ellittiche che si ottengono a partire da curve iperellittiche di genere quattro, possedenti un gruppo ciclico o abeliano a base due di trasformazioni birazionali.

Se si assume come modello di tali curve la

$$y^2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$$

$$(x - \alpha_5)(x - \alpha_6)(x - \alpha_7)(x - \alpha_8)(x - \alpha_9)(x - \alpha_{10}),$$

si tratta allora, per giungere alla classificazione voluta, di considerare tutti i gruppi finiti di proiettività sulla retta, ciclici o abeliani a base due, che trasformino in sé i 10 punti  $(\alpha_i, 0)$  e risalire poi da essi ai possibili gruppi di trasformazioni birazionali della curva, essi stessi ciclici o abeliani a base due.

Ho così trovato che delle 46 soluzioni aritmetiche soltanto 14 risultano di fatto relative a curve iperellittiche di genere quattro, e precisamente quelle corrispondenti alle soluzioni: I, IV, V, VI, IX, XII, XIV, XVI, XVII, XXVI, XXVII, XXX, XXXVI, XLIV.

Di questi casi, i numeri V, XXX provengono da gruppi abeliani a base due; tutti gli altri da gruppi ciclici.

4. - Si può allora passare alla costruzione delle superficie ellittiche corrispondenti alle soluzioni trovate: ma bisogna operare diversamente nei casi in cui il gruppo  $G_n$  sia ciclico ed in quelli in cui è abeliano, distinguendo altresì le soluzioni per cui  $p_g = 0$  da quelle per cui  $p_g > 0$ . Ho così potuto determinare tutte le superficie ellittiche che si ottengono dalle 14 soluzioni aritmetiche trovate, includendo anche la possibilità di superficie  $F$  che posseggano un fascio ellittico di curve  $C$  (di genere quattro) non iperellittiche.

Rimando al successivo lavoro sia per la chiarificazione del procedimento seguito che per l'elencazione delle superficie trovate, e mi limito ad accennare che - ad eccezione dei casi I, IV - da una soluzione aritmetica si trovano sempre più superficie ellittiche simili, tali dicendosi quelle che, pur possedendo lo stesso fascio ( $C$ ), sono birazionalmente distinte; ed in alcuni casi si giunge ad un solo tipo, in altri a più di un tipo di superficie simili. Nel caso XLIV - infine - si hanno due tipi distinti di superficie ellittiche, in cui le curve  $C$  sono identiche, ma sono invece birazionalmente distinti i fasci ( $K$ ).

**Fisica.** — *Sullo schema di decadimento del  $^{214}_{84}\text{Po}$  (\*)*. Nota di FRANCESCA DEMICHELIS e RENATO MALVANO, presentata (\*\*) dal Socio E. PERUCCA.

Còmpito principale della spettroscopia nucleare è di condurre alla determinazione dello schema di decadimento per ciascun nuclide.

Questo studio è già stato compiuto per un gran numero di nuclidi, in particolare per i nuclidi radioattivi sia artificiali sia naturali.

Già in lavori precedenti<sup>(1)</sup> abbiamo compiuto ricerche onde stabilire l'esistenza e la costituzione di cascate di raggi  $\gamma$  nel  $^{214}_{84}\text{Po}$  al fine di giungere alla determinazione di uno schema di decadimento su basi sperimentali più ampie di quanto non sia finora avvenuto<sup>(2)</sup>.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale del Politecnico di Torino.

(\*\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) F. DEMICHELIS, R. MALVANO, «Nuovo Cimento», 10, 405 (1953).

(2) J. SURUGUE, «Journ. de Phys. et le Radium» (8), 7, 145 (1946); A. H. WAPSTRA, «Academisch-Proefschrift», - Amsterdam; 1953, ivi trovasi una bibliografia ampia sull'argomento.

Nella figura 1 *a* sono riportati i livelli energetici relativi alle particelle  $\alpha$  di lungo percorso <sup>(3)</sup>; nella fig. 1 *b* è riportato lo schema di decadimento da noi proposto in base allo studio delle cascate dei raggi  $\gamma$ .

Dall'esame delle due figure si deduce come conclusione particolarmente interessante che, mentre in generale si ha motivo di ritenere che le due rappresentazioni dei livelli energetici debbano coincidere, nel caso del  $^{214}_{84}\text{Po}$  alcuni livelli di particelle  $\alpha$  di lungo percorso non danno luogo a raggi  $\gamma$  misurabili e inversamente alcuni livelli da cui provengono raggi  $\gamma$  non danno luogo a particelle  $\alpha$  di lungo percorso di intensità confrontabile con quelle dei gruppi già noti.

A parte l'opportunità di una revisione dei livelli energetici proposti da Rutherford (1933) mediante l'impiego dei dispositivi di ricerca attuali, si può concludere che i due sistemi di livelli *non coincidono* che in parte.

Una discussione più estesa su queste ricerche apparirà in periodico a ciò più adatto.

Ringraziamo vivamente il prof. E. Perucca per il suo interessamento e per il suo aiuto.

(3) E. RUTHERFORD, W. B. LEWIS, B. V. BOWDEN, « Proc. Roy. Soc. », A. 142, 347 (1933); G. H. BRIGGS, « Rev. Mod. Phys. », 26, 1 (1954).

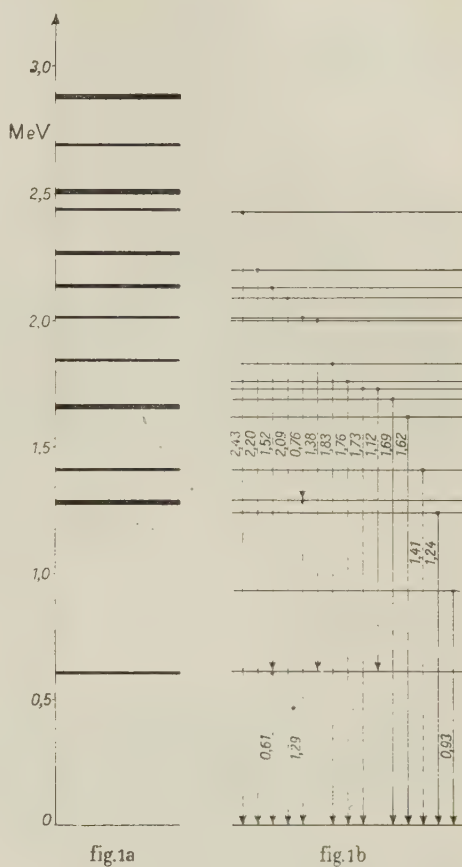


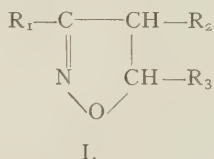
Fig. 1 *a*. — Livelli energetici relativi alle particelle  $\alpha$  di lungo percorso del  $^{214}_{84}\text{Po}$ : la larghezza delle varie strisce corrisponde all'approssimazione delle determinazioni, come indicata dagli Autori.

Fig. 1 *b*. — Schema di decadimento del  $^{214}_{84}\text{Po}$ : le linee verticali indicano i vari raggi  $\gamma$ ; la linea tratteggiata indica un raggio  $\gamma$  non misurabile direttamente, in quanto soggetto a conversione interna completa.

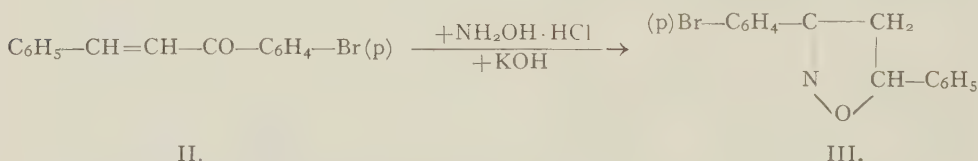


**Chimica organica.** — *Sulla struttura di alcune isossazoline 3,5-bisostituite* (\*). Nota di PAOLO GRÜNANGER, presentata (\*\*) dal Corrisp. A. QUILICO.

Com'è noto, il metodo fino a pochi anni fa più conveniente per la preparazione delle  $\Delta^2$ -isossazoline (I) era l'azione dell'idrossilammina sui chetoni  $\alpha\beta$ -olefinici, metodo che permise di preparare parecchi termini 3,5-bisostituiti (1). La reazione venne studiata in particolare da A. H. Blatt (2) e da K. v. Auwers e collaboratori (3), che non riuscirono peraltro a trarre conclusioni definitive sul meccanismo di formazione di questi composti ciclici. Risulta dalle loro esperienze che, per quanto sia nota almeno una eccezione (4), in generale l'azione dell'idrossilammina in ambiente acido conduce alle ossime, mentre invece in presenza di un eccesso di alcali si ottengono, accanto a prodotti più complessi, le suddette isossazoline.



A. H. Blatt (2), studiando il caso del benzal-*p*-bromoacetofenone (II), ottenne per azione del cloridrato di idrossilammina in ambiente alcalino un composto p. f. 138-139°, a cui egli assegnò, basandosi soprattutto sul fatto che esso non svolge metano nell'apparecchio di Zerewitinoff, la struttura di 3-*p*-bromofenil-5-fenil- $\Delta^2$ -isossazolina (III), in accordo del resto con le formule generalmente ammesse per le altre isossazoline allora conosciute:



(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale del Politecnico di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) F. STOCKHAUSEN e L. GATTERMANN, « Ber. », 25, 3535 (1892); A. CLAUS, « J. prakt. Chem. », 2, 54, 408 (1896); F. HENRICH, « Ann. », 351, 171 (1907); D. VORLÄNDER e K. SCHÖNEMANN, « Ber. », 58, 141 (1925); A. HAMBURGER, « Monatsh. », 19, 440 (1898); R. CIUSA e A. TERNI, questi « Rendiconti » [5], 17, I, 725 (1908); 20, II, 30 (1911); O. WIDMAN, « Ber. », 49, 479, 2780 (1916); H. JÖRLANDER, ibid., 49, 2784 (1916); E. OLIVERI-MANDALÀ e E. CALDERARO, « Gazz. », 44, I, 90 (1914); 44, II, 89; 45, II, 140 (1915).

(2) A. H. BLATT, « J. Am. Soc. », 53, 1133 (1931); A. H. BLATT e J. F. STONE, ibid., 53, 4134.

(3) K. v. AUWERS, « Ber. », 62, 1322 (1929); K. v. A. e M. SEYFRIED, « Ann. », 484, 178 (1930); K. v. A. e H. BRINK, « Ann. », 493, 218 (1932); K. v. A. e H. MÜLLER, « J. prakt. Chem. », 133, 154 (1932); 137, 102 (1933); K. v. A., « Ann. », 502, 282 (1933).

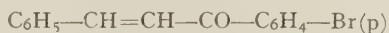
(4) K. v. A. AUWERS e H. BRINK, lav. cit.

È da notare che egli poté escludere la formazione di un'ossima come composto intermedio, senza però giungere a formulare un plausibile meccanismo di reazione.

Nel 1945 R. P. Barnes e L. B. Dodson <sup>(5)</sup> ripresero in esame la coppia di calconi isomeri p-bromobenzalacetofenone (IV) e benzal-p-bromoacetofenone (V):

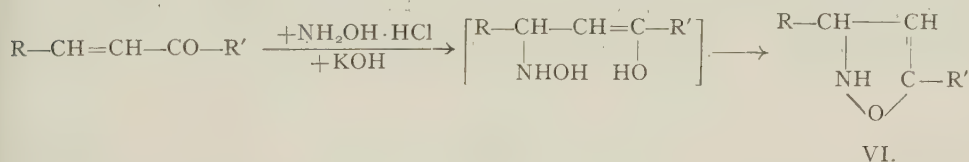


IV.



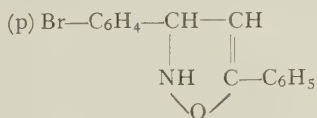
V.

e li fecero reagire con cloridrato di idrossilammina in ambiente alcalino, ottenendo due isossazoline isomere p. f. 130,5–131° e p. f. 138–139°. Sulla base del fatto, già noto <sup>(6)</sup>, che le ossime dei calconi non si possono trasformare in isossazoline per trattamento con cloridrato di idrossilammina in ambiente alcalino, i suddetti autori credettero di poter escludere l'addizione 1·2 al carbonile, e ammisero di conseguenza l'addizione 1·4 dell'idrossilammina al doppio legame secondo lo schema seguente:

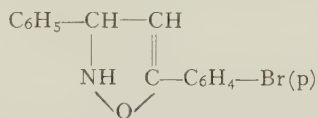


VI.

assegnando rispettivamente ai due composti p. f. 130,5–131° e p. f. 138–139° le formule VII (dal calcone IV) e VIII (dal calcone V) di  $\Delta^4$ -isossazoline:



VII.



VIII.

In una serie di lavori successivi R. P. Barnes e collaboratori <sup>(7)</sup> prepararono in maniera analoga numerose isossazoline 3,5-bisostituite, a cui assegnarono sempre la struttura  $\Delta^4$  del tipo VI, nonché i relativi isossazoli (facilmente ottenibili dalle prime per ossidazione cromica).

La nuova sintesi isossazolinica, recentemente descritta da A. Quilico e collaboratori <sup>(8)</sup>, a partire dagli ossidi di nitrili e dai composti a doppio legame,

(5) R. P. BARNES e L. B. DODSON, « J. Am. Soc. », 67, 132 (1945).

(6) A. H. BLATT, *lav. cit.*

(7) R. P. BARNES e A. S. SPRIGGS, « J. Am. Soc. », 67, 134 (1945); R. P. B. e J. L. SNEAD, *ibid.*, 67, 138; R. P. B., G. E. PINKNEY e W. A. DACOSTA, *ibid.*, 69, 3131 (1947); R. P. B. e G. W. REED, *ibid.*, 69, 3134; R. P. B., T. C. GOODWIN e T. W. COTTEN, *ibid.*, 3137.

(8) A. QUILICO, G. STAGNO D'ALCONTRES e P. GRÜNANGER, « Gazz. », 80, 479, 741, 831 (1950) e note successive.

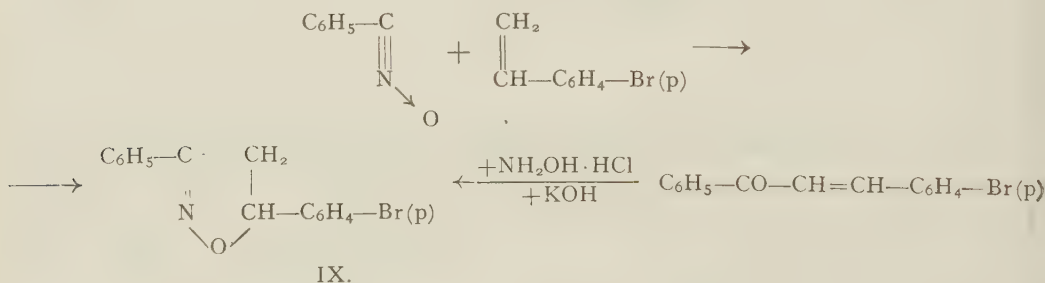
poteva fornire il mezzo per stabilire la struttura delle isossazoline in questione. La natura del radicale arilico in posizione 3 è infatti qui inequivocabilmente determinata



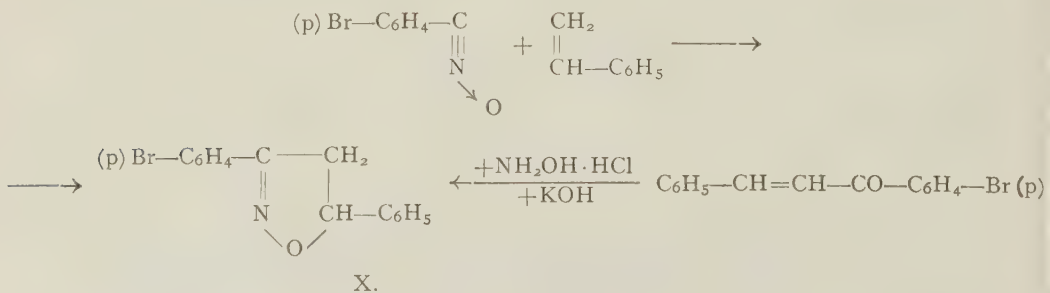
dalla scelta opportuna dell'ossido di nitrile, come si può vedere dallo schema suindicato.

La pubblicazione di una recente Nota sull'argomento, avvenuta mentre le nostre ricerche erano già in corso e nella quale R. P. Barnes e collaboratori<sup>(9)</sup> giungono alle nostre stesse conclusioni basandosi su dati puramente spettroscopici, ci induce a rendere noti i risultati finora ottenuti, relativi alla coppia dei due *p*-bromocalconi isomeri.

La reazione tra l'ossido di benzonitrile e il *p*-bromostirolo fornisce con ottime rese la 3-fenil-5-*p*-bromofenil- $\Delta^2$ -isossazolina (IX) p. f. 130,5-131°, risultata identica per caratteristiche e p. f. in miscela a quella ottenuta da Barnes e Dodson a partire dal *p*-bromobenzalacetofenone:



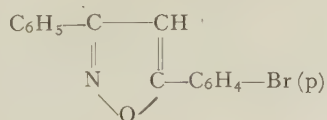
La reazione tra l'ossido di *p*-bromobenzonitrile, che non era ancora noto in letteratura e che venne preparato secondo il metodo generale di G. Speroni per i benzonitrilossidi sostituiti<sup>(10)</sup>, e lo stirolo conduce invece alla 3-*p*-bromofenil-5-fenil- $\Delta^2$ -isossazolina (X) p. f. 139-140°, risultata identica al composto ottenuto da Blatt dal benzal-*p*-bromoacetofenone:



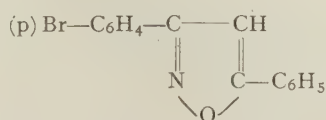
(9) R. P. BARNES, G. E. PINKNEY e G. MCK. PHILLIPS, « J. Am. Soc. », 76, 276 (1954).

(10) G. SPERONI, lavoro in corso di pubblicazione.

L'ossidazione cromica delle isossazoline conduce ai relativi isossazoli, a cui si deve pertanto assegnare le strutture risp. XI da IX e XII da X:



XI



XII.

I risultati delle nostre esperienze hanno quindi portato a dimostrare per via puramente chimica l'esattezza della struttura data da A. H. Blatt alla seconda delle due isossazoline, nonché l'inesistenza, anche in questo caso, della struttura isossazolinica  $\Delta^4$ . È interessante rilevare che quest'ultimo fatto è in accordo con l'estrema instabilità delle  $\Delta^4$ -isossazoline, già notata da Claisen <sup>(11)</sup> e confermata anche recentemente <sup>(12)</sup>. Giova inoltre ricordare che le nostre conclusioni confermano i risultati avuti da K. v. Auwers <sup>(13)</sup> nel caso dei due p-metossicalconi; allora la struttura delle due isossazoline venne dimostrata riportandole ai relativi isossazoli, la cui struttura era stata in precedenza fissata per via indipendente da Weygand e Bauer <sup>(14)</sup>.

#### PARTE SPERIMENTALE.

*3-fenil-5-p-bromofenil- $\Delta^2$ -isossazolina* (form. IX). — Il prodotto si presenta sotto forma di larghe scaglie incolori lucenti p. f. 130,5–131° (da alcool etilico), fac. sol. in acetone, cloroformio, benzolo, meno sol. in etere, poco sol. in ligroina fredda, insol. in acqua; esso venne preparato:

a) dal p-bromobenzalacetofenone e cloridrato di idrossilammina in ambiente alcalino, secondo il metodo di A. H. Blatt <sup>(15)</sup>. Il prodotto era già stato ottenuto per questa via da R. P. Barnes e L. B. Dodson <sup>(16)</sup>, che gli assegnarono tuttavia la struttura di 3-p-bromofenil-5-fenil- $\Delta^4$ -isossazolina (form. VII);

b) dal benzonitrilossido e p-bromostirolo secondo la procedura consueta <sup>(17)</sup>.

I prodotti ottenuti con i due metodi suddetti si rivelano identici per proprietà e caratteristiche, e non danno alcun abbassamento di p. f. nella prova in miscela, mentre l'abbassamento è netto qualora li si fonda in miscela con la 3-p-bromofenil-5-fenil- $\Delta^2$ -isossazolina p. f. 139–140°.

(11) L. CLAISEN, « Ber. », 24, 3912 (1891).

(12) G. STAGNO D'ALCONTRES, « Gazz. », 80, 441 (1950).

(13) K. v. AUWERS e H. BRINK, *lav. cit.*

(14) C. WEYGAND e E. BAUER, « Ann. », 459, 123 (1927).

(15) A. H. BLATT, « J. Am. Soc. », 53, 1140 (1931).

(16) R. P. BARNES e L. B. DODSON, « J. Am. Soc. », 67, 134 (1945).

(17) P. GRÜNANGER, « Gazz. », 84, 367 (1954).



L'ossidazione cromica in ac. acetico glac. porta, seguendo il metodo di A. H. Blatt <sup>(15)</sup>, a 3-fenil-5-p-bromofenilisossazolo p. f. 181°. Il p. f. dato dalla letteratura è 179-180° <sup>(16)</sup>.

*Cloruro p-bromobenzidrossamico.* - Attraverso una soluzione di gr. 20 di p-bromobenzaldossima in 300 cc. di cloroformio anidro viene fatta passare una corrente di cloro secco fino a saturazione (il colore della soluzione diventa dapprima verde, poi passa al giallo). Dopo aver svaporato con cautela il solvente, da ultimo sotto vuoto, si ottengono, per ripetute cristallizzazioni da CCl<sub>4</sub>, aghi incolori p. f. 94-95°. Rese quasi quantitative.

*p-bromobenzonitrilossido.* - Ad una soluzione di cloruro p-bromobenzidrossamico in etanolo assoluto si aggiunge, a goccia a goccia e raffreddando, una soluzione di etilato sodico in leggero difetto sulla quantità equimolecolare. Il precipitato viene subito raccolto su filtro e lavato con acqua fino alla scomparsa della reazione dei cloruri, indi asciugato rapidamente su piatto poroso. Il prodotto è incoloro e sufficientemente puro per l'uso: fonde, se scaldato rapidamente, a 83-84°, trasformandosi nel dimero 3,4-(p-p'-dibromo) difenilfuossano p. f. 164-165°.

3(*p-bromo*) *fenil-5-fenil-Δ<sup>2</sup>-isossazolina* (form. X). - *a*) da p-bromobenzonitrilossido e stirol: una soluzione eterea di gr. 1,6 di p-bromobenzonitrilossido appena preparato e di cc. 0,96 di stirol monomero viene fatta bollire a ricadere su b. m. per 1 ora, indi lasciata a temp. ambiente per una notte. Dopo aver svaporato a piccolo volume, si raccoglie il precipitato cristallino formatosi: resa gr. 1,5 di scaglie lucenti p. f. 138-139°, che, ricristallizzate da etanolo, fondono a 139-140°. Dalle acque madri svaporate a secco si recuperano altri gr. 0,7 di prodotto meno puro.

Il prodotto, molto simile per aspetto e solubilità al suo isomero, si dimostra identico, per proprietà e p. f. in miscela, a quello ottenuto per le altre vie già note:

*b*) da benzal-p-bromoacetofenone e cloridrato di idrossilammina in ambiente alcalino <sup>(15)</sup>:

*c*) dall'ossima del benzal-p-bromoacetofenone per isomerizzazione con H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> conc. <sup>(15)</sup>.

Ossidando l'isossazolina con CrO<sub>3</sub> in ac. acetico glac. secondo Blatt <sup>(15)</sup>, si separa direttamente per raffreddamento della soluzione acetica il 3-p-bromo-fenil-5-fenilisossazolo p. f. 178-179° in larghe scaglie lucenti; la miscela con l'isomero p. f. 181° fonde a 174-175°.

**Teoria dell'erosione.** — *Quelques considérations sur la théorie mathématique des tafoni.* Nota II di MATTHIAS MATSCHINSKI, presentata (\*) dal Socio L. ROLLA.

Dans la Note I <sup>(1)</sup> sur le même sujet nous avons déjà donné un aperçu historique (suivi par la bibliographie) des travaux sur les tafoni, et spécialement sur l'explication de ce phénomène. Nous avons indiqué que parmi ces explications, l'hypothèse « thermo-mécanique » de B. Popoff est la plus plausible. En partant des équations différentielles du problème, nous avons établi les formules déterminant les tensions et les pressions pour le cas des cavités (tafoni)

$$(8) \quad X_{rr} = \frac{4GD}{3(n-3)R^n} \left[ \left( \frac{R}{r} \right)^3 - \left( \frac{R}{r} \right)^n \right] ; \quad X_{\lambda\lambda} = \frac{2GD}{3(n-3)R^n} \left[ (n-2) \left( \frac{R}{r} \right)^n - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right],$$

et pour le cas des convexités (bosses):

$$(9) \quad X_{rr} = -\frac{4GDR^k}{3(k+3)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^k \right] ; \quad X_{\lambda\lambda} = -\frac{2GDR^k}{3(k+3)} \left[ 2 - (k+2) \left( \frac{r}{R} \right)^k \right].$$

§ 3. La cause des pressions et des tensions (8) et (9) est évidemment la dilatation thermique déterminée en première ligne par le coefficient D. Si ce coefficient est égal à zéro, toutes les grandeurs (8) et (9) le sont aussi. La grandeur  $n$  (ou  $k$ ) détermine le gradient de la température: le changement de la température d'un point à l'autre est d'autant plus brusque que ce coefficient est plus grand en valeur absolue. Mais la vitesse de pénétration de la température (du réchauffement ou refroidissement) dans la roche dépend nécessairement de la vitesse du changement de la température ambiante d'un moment à l'autre. C'est-à-dire, les brusques changements de la température de la surface entraînés par le soleil ou par le vent correspondent aux valeurs absolues élevées de  $n$  et de  $k$ . Au contraire, les lents changements à la surface ne provoquent que de petits gradients, valeurs petites de  $n$  et de  $k$ . On voit alors qu'il est inutile de considérer les petites valeurs de  $n$  et de  $k$ ; elles ne donnent que des tensions et des pressions faibles et insensibles. Au contraire, l'influence de D est prépondérante,  $D > 0$  correspond au réchauffement,  $D < 0$  au refroidissement.

Analysant algébriquement les formules (8) et (9) on peut, à l'aide des remarques données, établir le petit tableau suivant.

(\*) Nella seduta dell'8 maggio 1954.

(1) « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, Scienze fisiche ecc. », ser. VIII, Vol. XVI, fasc. 5, pp. 632-636, 1954.

## Cavités, tafoni:

Refroidissement brusque ( $D < 0$ )	Réchauffement brusque ( $D > 0$ )
$X_{rr} < 0$ , tensions (voir fig. 3 a)	$X_{rr} > 0$ , pressions (voir fig. 3 c)
$X_{\lambda\lambda} < 0$ , tensions, si $n \leq 2$	$X_{\lambda\lambda} > 0$ , pressions, si $n \leq 2$ .
$X_{\lambda\lambda} < 0$ , près de la surface	$X_{\lambda\lambda} > 0$ , près de la surface
$X_{\lambda\lambda} > 0$ , loin de la surface	$X_{\lambda\lambda} < 0$ , loin de la surface

## Convexités:

Refroidissement brusque ( $D < 0$ )	Réchauffement brusque ( $D > 0$ )
$X_{rr} > 0$ , pressions (voir fig. 3 b)	$X_{rr} < 0$ , tensions (voir fig. 3 d)
$X_{\lambda\lambda} < 0$ , tensions	$X_{\lambda\lambda} > 0$ , pressions.

§ 4. Déjà du point de vue qualitatif, on remarque tout de suite la différence essentielle entre les quatre cas représentés par notre tableau. Pour la séparation d'un morceau de la surface de la roche, deux sortes de fissures doivent se former: fissures perpendiculaires et fissures parallèles à la surface. Ceci exige que  $X_{rr}$  et  $X_{\lambda\lambda}$  soient telles qu'elles provoquent les fissures. Pour les provoquer immédiatement elles doivent être des tensions. Un seul cas correspond à ces conditions les plus favorables: refroidissement brusque de la surface d'une cavité. Au contraire les conditions les plus défavorables sont celles du refroidissement brusque de la surface d'une convexité (d'une bosse): il ne se forment que les fissures perpendiculaires à la surface. C'est le cas des corps isolés refroidis.

Deux cas du réchauffement sont les cas de transition: ici la formation de deux sortes de fissures, parallèles et perpendiculaires à la surface, est possible, mais pas immédiatement. Ici, sous l'influence des pressions  $X_{\lambda\lambda}$ , il se produit d'abord une sorte de plissement (voir les figures 3 c et 3 d e. f. aussi pp. 200-201 du livre de Popoff); les petites couches plissées peuvent se casser quelque temps après. Pour la réalisation de ce processus, la surface d'une cavité est aussi plus favorable: ici  $X_{\lambda\lambda}$  presse (forme des plis) et  $X_{rr}$  repousse ce pli de la masse principale de la roche, repousse c'est-à-dire facilite la formation du pli. Au contraire dans le cas d'une convexité:  $X_{\lambda\lambda}$  presse, tandis que  $X_{rr}$  retient, c'est-à-dire, empêche l'éloignement de la couche superficielle. Laissons pour une autre publication la comparaison détaillée des cas du réchauffement, parce qu'ils exigent l'introduction dans le calcul de tel ou tel autre critérium de stabilité (par exemple, critérium d'Euler) nécessitant à son tour des calculs étendus. Nous nous limitons ici aux cas du refroidissement où la comparaison est faisable directement. Revenons aux figures 1 a et 1 b. Supposons, ce qui est le plus naturel, que les températures sur toute la surface, inégalités convexes et concaves incluses, sont presque les mêmes; il s'ensuit que les dilatations thermiques sont, elles aussi, les mêmes:

$$(10) \quad \frac{D_t}{R^n} = D_b R^k.$$

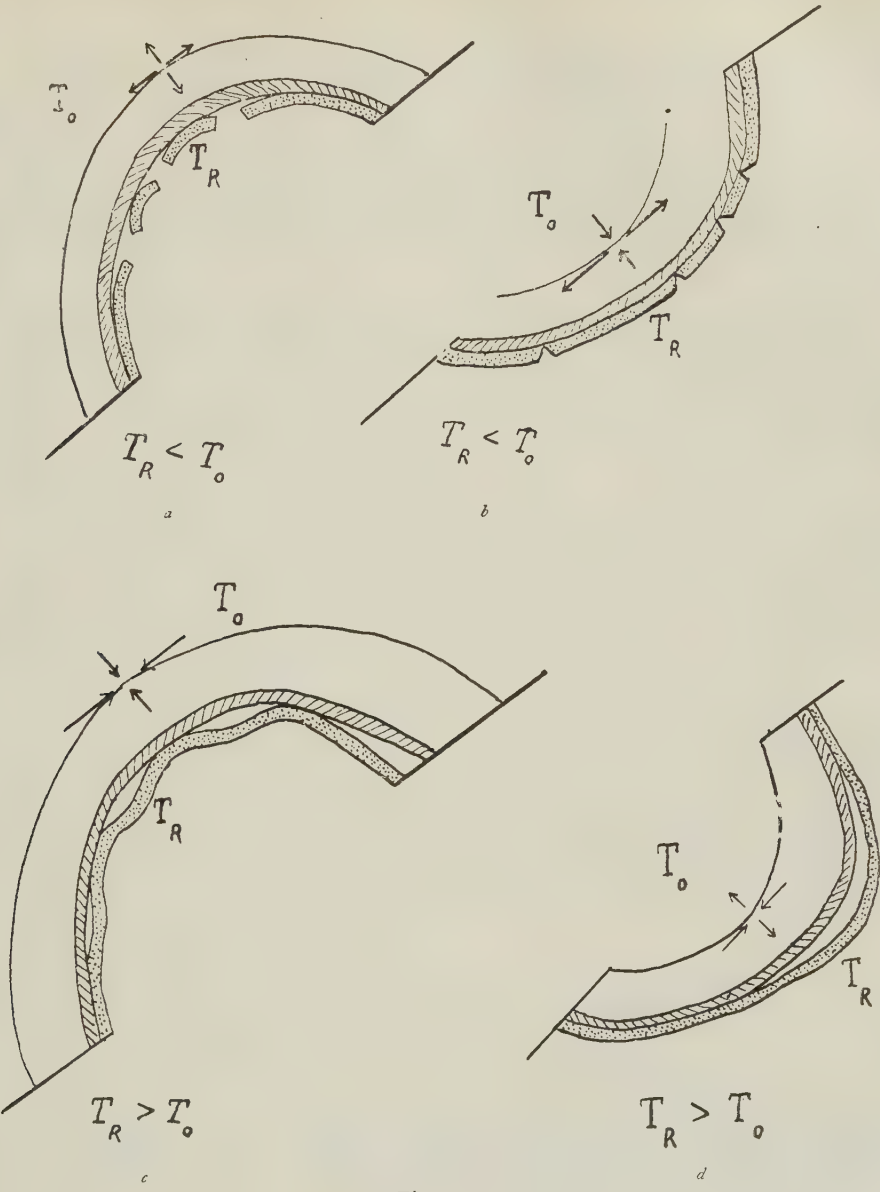


Fig. 3.

Supposons aussi qu'il y a égalité des changements thermiques, des gradients, etc. Ceci nous donne la deuxième condition:

(I1)  $\left| \frac{n D_t}{R^n} \right| = |k D_b R^k|$ , c'est-à-dire:  $n = k$ .

Les valeurs des tensions formant les fissures tangentielle sur les bosses et dans les cavités sont:

(I2) (cavités):  $X_{\lambda\lambda}|_{r=R} = \frac{2 G D_t}{3 R^n}$  ; (bosses):  $X_{\lambda\lambda}|_{r=R} = \frac{2 G D_b R^k k}{3 (k+3)}$ .



Des formules (10), (11), (12) s'ensuit enfin que

$$(13) \quad X_{\lambda\lambda}|_{r=R} \text{ (pour les cavités): } X_{\lambda\lambda}|_{r=R} \text{ (pour les bosses)} = \frac{k+3}{k} = \frac{n+3}{3} > 1,$$

— la fissuration dans les cavités accidentelles procédera plus vite que sur les convexités. Si la surface n'est pas horizontale, si, par conséquent, les produits de l'érosion ont la possibilité de quitter facilement la surface, la formation d'une cavité sera très accélérée en comparaison avec celle d'une convexité.

On ne doit pas penser que la formation des fissures parallèles à la surface, provoquées par  $X_{rr}$ , aura lieu là où  $X_{rr}$  atteint son extremum. Ces extrema se trouvent relativement loin de la surface, comme on le voit de la formule

$$(14) \quad \frac{\partial X_{rr}}{\partial \left(\frac{R}{r}\right)} = 0 \quad ; \quad 3 \left(\frac{R}{r_{\max}}\right)^2 - k \left(\frac{R}{r_{\max}}\right)^{n-1} = 0 \quad ; \quad \frac{r_{\max}}{R} = \sqrt[n-3]{\frac{n}{3}}$$

déterminant l'emplacement de ces maxima. Par exemple on a:

$$n = 1; \quad 2; \quad 3; \quad 4; \quad 5; \quad 6; \quad 7; \quad 8; \quad 9; \quad \text{etc.}$$

$$(15) \quad \frac{R}{r_{\max}} = 0,575; 0,667; 0,717; 0,750; 0,775; 0,794; 0,809; 0,822; 0,833; \text{ etc.}$$

Sur la surface de la roche la tension  $X_{rr} = 0$ . Ce n'est pas important qu'elle augmente en s'éloignant de la surface. On ne doit pas oublier que la résistance de la couche augmente pour les couches plus épaisses. C'est pourquoi il est raisonnable de considérer la grandeur

$$(16) \quad \frac{X_{rr}|_{r=R} - X_{rr}}{(R-r)^m} = \frac{-4 DG}{3(n-3)R^{n+m}} \cdot \frac{\left(\frac{R}{r}\right)^{3+m} - \left(\frac{R}{r}\right)^{n+m}}{\left(\frac{R}{r} - 1\right)^m},$$

qui exprime approximativement le rapport entre la force spécifique et la résistance spécifique. On voit que pour le cas  $m > 1$  le maximum de (16) correspond à  $r = R$ : théoriquement les couches se séparant de la masse de la roche sont infiniment minces. Mais les équations de l'élasticité n'impliquent pas les phénomènes superficiels. Notre résultat doit être interprété seulement dans le sens que les parties se séparant de la roche sont de dimensions telles que les phénomènes superficiels entrent en jeu. L'observation confirme que ces parties sont vraiment très minces.

Mais la condition  $m > 1$  n'est pas obligatoire. Il est possible d'admettre que  $m = 1$  ou même  $m < 1$ . Dans ces cas la condition (16) permet de déterminer l'épaisseur des couches se séparant de la roche. Pour les valeurs de  $m$  voisines à 1 ( $m < 1$ ) on trouve les valeurs assez petites de cette épaisseur.

Ceci explique l'état extrêmement lisse de la surface des tafoni.

**Geologia.** – *Le dune fossili della Nurra di Alghero (Sardegna)* (\*).  
Nota di GIUSEPPE PECORINI, presentata (\*\*) dal Corrisp. S. VARDABASSO.

Il Quaternario della Nurra di Alghero, nella Sardegna nord-occidentale, non è stato finora oggetto di ricerche sistematiche, per quanto parecchi autori, dai tempi del Lamarmora ad oggi, ne abbiano fatto cenno occasionale (ved. nota bibl.).

Delle ricerche in corso si dà qui una prima notizia.

Il nostro Quaternario è una formazione molto complessa in conseguenza di un rapido susseguirsi di cicli di sedimentazione e di erosione, a facies litologicamente pressoché identiche. Ciò rende lo studio stratigrafico di dettaglio quanto mai difficile; per di più i fossili scarseggiano ed i rapporti di giacitura non sono sempre chiari (1).

A grandi linee, è tuttavia possibile distinguere quattro facies principali: marina, fluviale, lacustre ed eolica, le quali localmente si ripetono, si sovrappongono o giustappongono in vario modo. Prevalgono i sedimenti eolici; ciò che rappresenta l'avvenimento di maggior portata e interesse.

Trattando delle dune fossili, è, d'altra parte, necessario premettere anche almeno un rapido accenno ai depositi marini, fluviali e lacustri.

*Facies marine.* – Lungo tutta la fascia costiera, in particolare con una certa continuità a sud di Alghero, a quote variabili da zero fino a un massimo di circa 8 metri, è conservata, per lo più in lembi, la panchina tirrenica (Tirreniano II o Interglaciale Riss-Würm) con i seguenti fossili caratteristici:

*Strombus bubonius*, Lk.

*Conus testudinarius*, Martini.

*Natica lactea*, Guilding.

*Tritonidea (Cantharus) viverrata*, Kiener.

*Tritonium ficoides*, Reeve.

Sono conglomerati ed arenarie, trasgressivi su terreni mesozoici o terziari e talora anche su depositi continentali quaternari più antichi. Le località maggiormente fossilifere sono le seguenti: Punta del Lavatoio, Canale Oma Mort, Cala Bullantinu e foce del Riu di Póglina a sud di Alghero, tratto di costa fra il Lazzaretto e la Punta Negra a nord della città.

I depositi di mare franco passano talora (Porto Conte, Bonifica Mugoni), superiormente, a calcari a *Cardium edule* L., e questi a calcari con soli molluschi palustri a loro volta ricoperti da arenarie eoliche. La regressione posteriore al Tirreniano II viene così documentata in maniera molto evidente.

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Geologico dell'Università di Cagliari, sotto la direzione del prof. SILVIO VARDABASSO, col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) Neppure ora, dopo gli scavi di canali di bonifica ed i lavori di dissodamento eseguiti dall'Ente di trasformazione fondiaria e agricola della Sardegna (E.T.F.A.S.).

La facies salmastra del Tirreniano II è localizzata entro la rada di Porto Conte, come si è detto, ed ancora sulle sponde dello Stagno del Calich e presso il Lazzaretto. Il livello più alto attinto da questi depositi è di circa 8-10 metri sul mare.

Nel sottosuolo della regione Taulera, in località denominata « La Par-rera » (S. Agostino Vecchio), sempre a nord della città, come mi risulta dall'esame del profilo di numerosi pozzi, si ritrovano le tracce di una trasgressione anteriore a quella del Tirreniano II, costituite da sabbie bianche a *Cardium edule*, L. var. *lamarcki*, Reev. ed a *Ostrea lamellosa*, Broc. Queste sabbie, giacenti ad un livello uguale od inferiore a quello del mare attuale, sono ricoperte, per uno spessore di circa 7 metri, da sedimenti continentali (alluvioni a ciottoli di trachite, arenarie eoliche con intercalazioni palustri, paleosuolo); questi a loro volta dalla panchina a *Strombus*.

È evidente dunque l'esistenza di due trasgressioni marine separate da una fase continentale.

Questa fase continentale dovrebbe essere cronologicamente equivalente al Riss; e di conseguenza il deposito marino sabbioso sottostante può essere attribuito all'interglaciale Mindel-Riss, cioè al Tirreniano I o almeno alla fase iniziale della regressione rissiana.

Sabbioni grigi-giallastri con detriti minuti di conchiglie marine sono stati incontrati a circa 15 metri sul mare e alla distanza di circa 3 chilometri dallo stesso nella escavazione di un pozzo comunale presso la Casa del Vicario, ad ovest del Monte Carru (strada statale Alghero-Sassari). Questi depositi stanno sotto banchi calcarei e argillosi lacustri, a loro volta ricoperti da arenarie eoliche. Essi potrebbero rappresentare una terza trasgressione ancora più antica delle precedenti, della quale però non si hanno tracce altrove.

*Facies fluviale* <sup>(2)</sup>. - È costituita da conglomerati più o meno sciolti a ciottoli di quarzo, quarzite e schisti paleozoici, subordinatamente da sabbioni e argille, presentanti un certo grado di ferrettizzazione (colore giallo-rossastro). Dal settore cristallino del Monte Forte questa coltre si estende fin sotto l'eolico nei pressi dello Stagno del Calich e costituisce le « alluvioni antiche terrazzate della Nurra ».

Sulla costa a sud di Porto Ferro queste alluvioni sono ricoperte dall'eolico e si interrompono sul mare a circa 30-40 metri, costituendo la sommità della falesia.

(2) Non ostante le possibili apparenze, non sono da considerarsi quaternari gli estesi ed alquanto potenti depositi conglomeratici a ciottoli di calcari mesozoici e di trachite, talora marnosi con intercalazioni calcaree e arenacee, contenenti frammenti e tronchi silicizzati di piante, che si estendono in regione Badde Rebuddo, su Panzoni, Pischina Piogu, lungo il Riu Mattone di Olmedo sino ai Piani, entro la piccola valle del Riu Mustone, in territorio di Alghero.

Questi sedimenti, i cui tronchi silicizzati presentano strette analogie esteriori con quelli dei depositi lacustri di altri bacini terziari della Sardegna, costituiscono, lungo le sponde del Riu Mannu, al versante sud del Monte Minudo, la base del Miocene sedimentare (Elveziano) del Sassarese; sono cioè certamente terziari e da riferirsi ad una facies continentale fluvio-lacustre anteriore alla trasgressione elveziana.

Da considerarsi equivalenti ad esse sono le alluvioni, pure terrazzate, a ciottoli essenzialmente di trachite e a concrezioni calcaree, del settore di Olmedo e della regione a sud di Alghero. In quest'ultima, presso Punta Padrebellu, la coltre alluvionale è pure ricoperta dall'eolico antico ed è terrazzata fra i 30 ed i 50 metri sul mare.

Tutte queste alluvioni costituiscono la base di ogni altro sedimento quaternario, essendo il termine più antico della serie. E almeno per quelle del settore del Monte Forte non pare improbabile un'età plio-plistocenica; purtroppo però con riserva, essendo risultate infruttuose tutte le ricerche tendenti al ritrovamento di resti fossili di Vertebrati.

*Facies lacustre.* — È particolarmente sviluppata lungo la valle del Riu Mattone di Olmedo, dove l'esistenza di un bacino lacustre plistocenico è documentata da calcari e marne a *Limnaea palustris*, Müll., *Helix* sp., *Planorbis* sp., *Clausilia* sp., qua e là con sottili intercalazioni di argille e di ciottoli vari. La serie ha una potenza massima di circa 15 metri e si estende in discordanza sulle alluvioni antiche terrazzate della Nurra e su terreni prequaternari.

Altri depositi lacustri (calcari compatti, travertinoidi, biancastri o grigi, con molluschi d'acqua dolce) si rinvencono alla base dell'eolico nella regione tra il Monte Agnese, Monte S. Giuliano ed il mare, e, terrazzati a varie altezze sul mare, lungo la costa a sud di Porto Ferro (Cala del Turco) e a sud di Alghero (Riu di Calabona). Essi sono tutti anteriori alla panchina a *Strombus*.

*Facies eolica.* — I sedimenti eolici della Nurra di Alghero non sono fra loro contemporanei, ma appartengono a più generazioni di dune fossili e precisamente: pretirreniane (cioè anteriori al Tirreniano II), tirreniane, würmiane e recenti.

L'eolico pretirreniano consta di arenarie a cemento calcareo con stratificazione incrociata, di colore giallo o rossastro per alterazione chimica. I fossili, abbastanza frequenti, sono dati da grossi modelli interni di *Helix* sp.

Le arenarie pretirreniane si estendono particolarmente a sud della città di Alghero, costituendo lungo la costa il terrazzo che da 20-30 m. nei pressi di Calabona, si innalza fino a 60-70 m. presso Punta Padrebellu. Esse contengono intercalazioni di terre rosse o paleosuoli (S. Anna, S. Efisio, Padrebellu, Canale Oma Mort), e giacciono su una base prequaternaria, con interposizione, spesso, di un conglomerato fluviale antico (il Cantaro, Padrebellu) oppure di un calcare lacustre (Calabona, come già ricordato, S. Efisio). A nord di Alghero, lungo il tratto di costa compreso fra Porto Ferro e Cala Viola, l'eolico pretirreniano forma un terrazzo di 35-40 metri e contiene intercalazioni diverse di calcari palustri a molluschi d'acqua dolce (due o tre banchi, ciascuno con uno spessore variabile da 0,50 a 1 metro) di origine probabilmente interdunica.

Queste arenarie sono pretirreniane in quanto frammenti di esse si trovano inclusi nella panchina a *Strombus*.



Certamente da ascrivere al Riss sono poi le arenarie eoliche che, con uno spessore di 5-6 metri, costituiscono in regione Taulera, l'intercalazione continentale sopra ricordata fra i depositi marini del Tirreniano II e quelli sottostanti a *Cardium edule* L. var. *lamarcki*, Reev., attribuiti con riserva, come già detto, al Tirreniano I. Anch'esse includono lenti di calcare palustre e passano superiormente ad un paleosuolo, il quale a sua volta è ricoperto dalla panchina a *Strombus*, quivi arenacea e alquanto conglomeratica nei suoi livelli inferiori.

Ad un'epoca pretirreniana, probabilmente più antica, risale forse l'eolico recentemente scoperto dal prof. S. Vardabasso sul Capo Caccia, presso il Semaforo, alla sommità della falesia alta circa 200 m., alla cui base è situata la rinomata Grotta di Nettuno. A favore di questa ipotesi depongono principalmente gli insoliti fattori morfologici e la considerazione che presumibilmente tirreniani sono alcuni limitati depositi entro la grotta stessa. L'arenaria eolica di Capo Caccia è eminentemente calcarea, ha un colore giallo-avorio tendente al fulvo e fossilizza un suolo, consistente in una terra rossa tipica, giacente sui calcari a. Ippuriti e Foraminiferi del Cretaceo superiore.

L'eolico, che si ritrova in placche isolate, ad un'altitudine che può raggiungere anche i 200 m., sul gruppo del Monte Doglia, sul Monte Pedrosu e sul Monte Rudedu a est di Porto Conte, ed infine in ampie distese pianeggianti sulle sponde del Riu Filibertu, del Riu Sassu e del Riu Barca, presenta dal punto di vista della sua datazione, notevoli difficoltà. Vi si possono infatti individuare arenarie di due tipi diversi: biancastre, in rilievi che ancora accennano l'antica conformazione a duna <sup>(3)</sup>, e gialle, talora rossastre, per un'avanzata alterazione, in cui tale conformazione non è più riconoscibile. Giacciono per lo più sopra le alluvioni terrazzate antiche (Ponte della ferrovia Alghero-Sassari, sul Riu Sassu). Presumibilmente si tratta di eolici tirreniano e risiano.

L'eolico accertato come tirreniano (Tirreniano II) è un'arenaria generalmente biancastra, ricca di detriti minuti di conchiglie marine, molto meno degradato che le arenarie precedenti. La sua età è sufficientemente definita, in regione S. Agostino Vecchio (« la Parrera »), dove si constata il passaggio laterale dall'eolico alla panchina a *Strombus*, pure arenacea. I limiti dell'estensione eolica tirreniana non sono però ben chiari, come, del resto, anche quelli degli altri eolici, e ciò a causa della relativa identità litologica dei materiali. I fossili sono dati da molluschi terrestri, *Helix* (*Eobania*) *vermiculata*, Müll., con i suoi colori ancora conservati, *Helix* sp., e ossa di mammiferi di steppa. L'eolico tirreniano fossilizza un suolo a terra rossa o bruna (Taulera, Casa del Vicario).

L'eolico post-tirreniano o würmiano ha un'estensione piuttosto limitata e si riscontra soltanto lungo la fascia costiera. Si tratta di arenarie più o

(3) Entro la tenuta Sella e Mosca, in sponda sinistra del Riu Filibertu, appunto in queste arenarie sono scavate le tombe della rinomata necropoli eneolitica di Anghelu Ruju.

meno biancastre o fulve, con fenomeni d'alterazione chimica assenti; formano in genere un terrazzo di pochi metri d'altezza prospiciente sul mare, particolarmente evidente nel tratto di costa da Alghero <sup>(4)</sup> a Póglina. Queste arenarie ricoprono gli strati a *Strombus*, con l'interposizione costante di un paleosuolo, e conservano ancora tipiche strutture dunari in via di spianamento. Il mare attuale ha sommerso queste antiche dune (Rada di Alghero, Lido di S. Giovanni, Calabona, e altre località). Vi sono contenuti in abbondanza i molluschi terrestri, inoltre corna di Cervidi <sup>(5)</sup> (il Cantaro), ossa di Roditori, ecc. Intercalate fra le arenarie si trovano brecce e terre rosse, brune o grigie, che, pur risultando in parte dall'apporto di materiali detritici di pendio, possono avere significato di paleosuolo.

Notevole inoltre è la presenza, nell'eolico würmiano, di depositi torbosi. Se ne conoscono due: il primo, situato entro la rada di Porto Conte, sulla spiaggia della Bonifica Mugoni, mi è stato gentilmente segnalato dal prof. Emil Schmied di Zurigo; il secondo è stato da me scoperto, sulla costa a sud di Porto Ferro, in una piccola cala a sud della Torre di Bantine Sale. Queste torbe, alquanto arenacee, contengono <sup>(6)</sup> granuli pollinici di *Corylus avellana* L., spore di Crittogame vascolari e legni di Conifere, nonché una ricca fauna di Gasteropodi d'acqua dolce. Per quanto mi consti, questa è la prima segnalazione di torbe pleistoceniche in Sardegna. Si tratta, però, di affioramenti di nessuna importanza pratica.

L'eolico recente è rappresentato dalle dune litoranee, le quali si spingono talora nell'interno per qualche chilometro. Tali sabbie sono particolarmente sviluppate ad est di Porto Ferro, dove sbarrano il Lago di Baratzza <sup>(7)</sup>. Esse sono cementate nei loro livelli inferiori, hanno un'elevata potenza e fanno supporre che la loro deposizione abbia avuto inizio nel tardo Pleistocene. Analogamente per le sabbie dei dintorni di Pera Pons a sud del Monte Doglia.

PALEOSUOLI. — Nel corso di questa Nota ho accennato in più punti alla presenza di paleosuoli. A chiarir meglio il mio pensiero, mi trattengo infine brevemente su questo aspetto del Quaternario della Nurra.

Le intercalazioni di terre rosse, brune o grigie, contenenti spesso molluschi terrestri, ossa di mammiferi e resti carbonizzati di vegetali, indicano che vi sono state diverse interruzioni nella sedimentazione eolica, durante le quali

(4) Da questo deposito proviene in massima parte il materiale che ha servito per le antiche fortificazioni della città.

(5) Il materiale, da me rinvenuto, fra cui un corno di Cervide di grossa taglia, è stato affidato in studio alla prof.ssa I. COMASCHI CARIA, dell'Istituto Geologico dell'Università di Cagliari.

(6) Determinazioni tuttora inedite, di cui ho avuto gentile comunicazione dalla dott.ssa D. SCOGNAMILLO, che le ha eseguite presso l'Istituto Botanico dell'Università di Cagliari, sotto la direzione del prof. G. MARTINOLI.

(7) Il prof. P. MONTALDO ha segnalato, entro queste sabbie, il rinvenimento di resti di Calcispongie e di Foraminiferi, che io ritengo provenienti per via eolica dal rimaneggiamento di depositi marini attualmente sommersi.

si sarebbe verificata non solo la fissazione delle dune, ma anche il loro spianamento, con conseguente alterazione superficiale e formazione di un suolo.

Tali suoli, dello spessore massimo di circa 1 metro, ma per lo più di solo qualche decimetro, oggi fossilizzati, presentano un grado di freschezza diverso, variabile con la loro età. La loro origine è da porsi in relazione con variazioni climatiche, mentre la loro composizione risulta in dipendenza del tutto esclusiva del locale substrato litologico. I paleosuoli inter-eolici hanno in genere un'elevata componente sabbiosa, dovuta pressoché esclusivamente a granuli quarzosi residui della degradazione delle arenarie o sabbie che li contenevano.

\* L'eolico pretirreniano, a sud di Alghero, fossilizza un suolo a terra rossa, talora notevolmente argillosa, se sui calcari del Trias (Punta Argentiera), oppure a terra bruna marrone se sulle trachiti terziarie (Padrebellu); altri due paleosuoli, sotto forma di lenti di terra rossa alquanto sabbiosa, assolutamente priva d'ogni traccia organica, vi si trovano inoltre intercalati (S. Anna, Padrebellu, S. Efsio).

Un paleosuolo, con resti indeterminabili di molluschi terrestri, al tetto delle arenarie eoliche rissiane, coperto dagli strati a *Strombus* in trasgressione (S. Agostino Vecchio), oppure dall'eolico tirreniano (Casa del Vicario, il Càrmine), segna la fine del Riss.

Le terre rosse o brune, legate all'eolico würmiano (terrazzo di circa 10 m. sulla costa a sud di Alghero), costituiscono almeno due intercalazioni di cui è notevole l'inferiore, sempre presente al contatto tra la panchina a *Strombus* e l'arenaria würmiana sovrastante. Queste intercalazioni sono particolarmente fossilifere: contengono resti di piante legnose carbonizzate, abbondanza di *Helix* sp., *Clausilia* sp., ossa di mammiferi vari, fra cui un corno di *Cervus elaphus corsicanus*, Erxleben <sup>(8)</sup>.

Le sabbie recenti, dei dintorni del Lago di Baratz e di Pera Pons, fossilizzano un suolo a terra rossa o nera, ricco di molluschi terrestri, ma assolutamente privo, come del resto tutti i paleosuoli sinora menzionati, di industrie litiche o comunque di qualsiasi traccia umana.

Riassumendo, dall'alternanza di facies continentali e marine del Quaternario, qui passate in rassegna, formazione che non supera in media lo spessore di poche decine di metri, si può dedurre che la Nurra non ha costituito una zona di grande subsidenza nel Quaternario e che gli spostamenti delle linee di riva, forse qui essenzialmente dovuti ad eustatismo, hanno avuto, almeno in senso positivo, un'ampiezza non troppo rilevante.

In stretto rapporto con i fenomeni eustatici dei due ultimi glaciali Riss e Würm sta l'abbondante sviluppo delle diverse generazioni di dune fossili, le quali, con le loro intercalazioni di paleosuoli, documentano più variazioni climatiche stadiali entro i periodi glaciali stessi.

(8) Secondo determinazione della prof.ssa I. COMASCHI CARIA, sul materiale da me raccolto.



## NOTA BIBLIOGRAFICA.

- [1] CIAMPI A., *Note geologico-minerarie sui giacimenti cupriferi della regione di Alghero (Sardegna)*, « Res. Assoc. Min. Sarda », n. 3, Iglesias 1922.
- [2] FRANCHI S., *Appunti sulle ricognizioni geologiche eseguite nel nord della Sardegna nel maggio 1908*, « Boll. Com. Geol. », XLI, Roma 1910.
- [3] GORTANI M., *I terrazzi fluviali e marini d'Italia*, « Boll. R. Soc. Geogr. It. », vol. VI, n. 1, Roma 1929.
- [4] LAMARMORA A., *Voyage en Sardaigne*, III par., t. I, Turin 1857.
- [5] MAXIA C., *Le nuove acquisizioni sulla preistoria della Sardegna conseguite dalle esplorazioni nelle grotte naturali di P.ta Giglio e di Capo Caccia (Alghero)*, « Atti del VI Convegno di St. Sardi », Cagliari 1953 (in corso di stampa).
- [6] MONTALDO P., *Il Lago di Baratza*, « Boll. Serv. Geol. It. » (in corso di stampa).
- [7] OOSTERBAAN A., *Etude géologique et paléontologique de la Nurra (Sardaigne)*, Utrecht 1936.
- [8] SERRA A., *Contributo alle conoscenze lito-mineralogiche dell'Algherese (Sassari)*, « Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. », vol. XLV, Pisa 1935.
- [9] TARAMELLI T., *Alcune osservazioni geo-idrologiche sui dintorni di Alghero*, « Rend. Ist. Lomb. Sc. Lett. », vol. XXXIX, Milano 1906.
- [10] VARDABASSO S., *Origine ed evoluzione del rilievo del Massiccio Sardo-Corso*, « Atti del XII Congr. Geogr. It. » del 1934, Cagliari 1935.
- [11] VARDABASSO S., *Carta geologica della Sardegna*, Scala 1:750.000. Ed. a cura della Società Elettrica Sarda, Roma, 1949.

**Petrografia.** — *Studi sul cristallino di Cima d'Asta.* - IV. *Chimismo delle rocce intrusive di Val Lozen.* Nota di CLAUDIO D'AMICO, presentata (\*) dal Corrisp. C. ANDREATTA.

All'orlo orientale del complesso di terreni metamorfici costituenti, assieme alle intrusioni granitiche (granito di Cima d'Asta, granito di Caoria) e dioritiche, il cristallino di Cima d'Asta, si trovano delle masse intrusive di dimensioni piuttosto limitate, che sono certamente da collegare alle maggiori intrusioni poste ad occidente e che dovrebbero rappresentare in gran parte delle differenziazioni del magma che a queste ultime ha dato origine. Queste rocce sono incassate in terreni metamorfici di prevalente tipo filladico, nei quali l'intrusione ha causato vari fenomeni di contatto con formazione di cornubianiti. Le rocce scistose sono in gran parte caratterizzate dalla presenza di grossi feldispati, il che ha loro valso il nome di « filladi feldspatiche » e di gneis dato dal Trener (1).

Nella zona di Val Lozen e Val Cismòn, fra Imer e S. Martino di Castrozza, ho iniziato un lavoro di rilevamento e di raccolta di materiale nell'estate 1952, e lo ho continuato nel 1953 per il completamento della mia tesi di laurea. Tale rilevamento ha interessato un'area ricoperta dalle rocce eruttive in argomento, da terreni metamorfici, e, in minor misura, sedimentari, oltre che da alcune piccole parti marginali della piattaforma por-

(\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) *Carta Geologica delle Tre Venezie*. Fº 22, Feltre.



firica del Lagorai. L'elaborazione del materiale e il completamento dei rilevamenti sono ancora in corso, particolarmente per quanto riguarda le rocce scistoso-cristalline. Per questo nella presente Nota mi limito a riportare i primi risultati dei miei studi, particolarmente sopra il chimismo delle rocce eruttive. Queste mie ricerche, come pure varie altre che si vanno compiendo in questi ultimi anni presso l'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna, sono da inquadrare nel ciclo di ricerche geologico-petrografiche sul cristallino di Cima d'Asta iniziato sin dal 1930 dal prof. C. Andreatta <sup>(2)</sup>.

Le rocce a cui mi riferisco nella presente Nota sono graniti, dioriti e varie rocce filoniane di tipo aplitico o granitico-porfirico. La maggior massa è rappresentata da dioriti, le quali costituiscono due intrusioni di una certa grandezza lungo la catena Arinàs-S. Antonio, compresa tra Val Lozen e Val Cismòn. Alla base di queste, lungo la Val Lozen, si trovano rocce granitiche. Filoni aplitici e granitici sono abbondantissimi nella massa dioritica meridionale.

a) *Graniti*. - Si estendono lungo Val Lozen in una fascia più o meno continua al di sotto degli ammassi dioritici. La struttura è quasi sempre lievemente porfirica; la grana è varia, talvolta anche grossa. I componenti mineralogici sono quelli di un granito comune: quarzo, ortoclasio, plagioclassi al 30-32 %. An (angolo di estinzione simmetrica in zona normale a (010) = 15° e indice  $\gamma$  circa uguale all'indice  $\epsilon$  del quarzo), biotite e accessori.

Su zone relativamente vaste la massa granitica presenta forti trasformazioni di tipo idrotermale che hanno notevolmente caolinizzato la roccia e l'hanno resa friabile e terrosa. Su un campione della parte inalterata ho eseguito l'analisi chimica, ottenendo i seguenti risultati:

SiO <sub>2</sub> . . . . .	73,74		
TiO <sub>2</sub> . . . . .	0,38		
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	13,00	si . . . . .	406
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	0,93	ti . . . . .	0,5
FeO . . . . .	1,78	al . . . . .	42
MnO . . . . .	0,14	fm . . . . .	17
MgO . . . . .	0,51	c . . . . .	12
CaO . . . . .	2,04	alc . . . . .	29
Na <sub>2</sub> O . . . . .	2,70	k . . . . .	0,50
K <sub>2</sub> O . . . . .	4,14	mg . . . . .	0,25
H <sub>2</sub> O <sup>-</sup> . . . . .	0,12	c/fm . . . . .	0,70
H <sub>2</sub> O <sup>+</sup> . . . . .	0,38		
	99,86		

(2) C. ANDREATTA, *Alcuni interessanti filoni nella massa intrusiva di Cima d'Asta*, «Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», 89, pp. 827-862, Venezia 1930; C. ANDREATTA, *Ricerche petrografiche sulla regione di Cima d'Asta*, «Memorie dell'Istituto Geologico della R. Università di Padova», 10, pp. 1-62, Padova 1932; C. ANDREATTA, *Giacimenti di granato almandino ai contatti del massiccio intrusivo di Cima d'Asta e loro paragenesi*, «Studi Trentini di Scienze Naturali», 19, pp. 105-134, Trento, 1938.

Confrontando i parametri ottenuti con i tipi magmatici stabiliti da Niggli, risulta che il granito studiato si avvicina per i diversi valori a un « granito yosemitico », a uno « rapakiwico », a una « leuco-diorite quarzifera » e ad una « adamellite normale », con un eccesso però costante del parametro  $si$  rispetto a tutti i tipi elencati.

Interessante è il confronto con il granito dell'intrusione di Cima d'Asta, che risulta simile per chimismo, pur con una maggior tendenza verso un tipo adamellitico. Le differenze maggiori stanno nelle quantità di  $SiO_2$  e  $K_2O$ , per maggior abbondanza degli stessi nel granito da me studiato rispetto alla roccia di Cima d'Asta <sup>(3)</sup>.

b) *Dioriti*. — Costituiscono due masse intrusive, a poca distanza l'una dall'altra, disposte con allineamento SW-NE, lungo la catena Arinàs-S. Antonio, di cui rappresentano gran parte della zona di cresta.

La grana della roccia è in genere piccola, e si fa più grossa soltanto in alcuni punti della zona centrale delle due masse. Frequentemente si riscontra la presenza di inclusi filladici, più o meno completamente digeriti, di dimensioni massime di qualche centimetro, che sono spesso disposti secondo linee allungate, a volte in serie parallele. Costituenti mineralogici essenziali sono plagioclasti al 70 % circa di anortite (angoli di estinzione simmetrica in zona normale a (010) varianti fra  $38^\circ$  e  $45^\circ$ ), augite ( $\alpha \wedge \gamma = 40^\circ-51^\circ$ ), e biotite; subordinati gli anfiboli come minerali primari; essi si fanno però abbondantissimi, derivando da pirosseni per uralitizzazione, in alcuni tipi autometamorfici (camp. 3). Si tratta di termini actinolitico-orneblendici. Quarzo e ortoclasio sono nettamente subordinati. Gli accessori sono i soliti: abbondanti magnetite e apatite.

Ho compiuto l'analisi chimica di tre campioni rappresentanti il tipo medio il 1° della massa sud-occidentale, il 2° della roccia non trasformata della massa nord-orientale, il 3° della parte colpita da trasformazioni pneumatolitico-idrotermali della stessa massa. Di queste analisi dò qui i risultati:

	(1)	(2)	(3)
$SiO_2$ . . . . .	54,50	54,12	53,80
$TiO_2$ . . . . .	0,26	0,52	0,60
$Al_2O_3$ . . . . .	18,43	15,46	15,43
$Fe_2O_3$ . . . . .	4,30	2,98	3,50
$FeO$ . . . . .	4,62	6,78	6,72
$MnO$ . . . . .	0,25	0,28	0,30
$MgO$ . . . . .	5,39	7,86	5,49
$CaO$ . . . . .	7,98	7,94	9,17
$Na_2O$ . . . . .	2,32	2,25	1,98
$K_2O$ . . . . .	1,57	1,38	1,48
$H_2O^-$ . . . . .	0,12	0,20	0,34
$H_2O^+$ . . . . .	0,32	0,30	1,61
	99,9	100,07	100,42

(3) C. ANDREATTA, op. cit.

<i>si</i> . . . . .	156	133,5	140
<i>ti</i> . . . . .	0,5	1	1,5
<i>al</i> . . . . .	28,5	22,5	23,5
<i>fm</i> . . . . .	40,5	49	43,5
<i>c</i> . . . . .	22,5	21	25,5
<i>alc</i> . . . . .	8,5	7,5	7,5
<i>k</i> . . . . .	0,3	0,3	0,35
<i>mg</i> . . . . .	0,5	0,6	0,5
<i>c/fm</i> . . . . .	0,56	0,43	0,58

Come si può vedere, le tre rocce hanno chimismo simile. Le maggiori differenze riguardano le quantità di  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , di  $\text{MgO}$ , e il rapporto  $\text{FeO}/\text{Fe}_2\text{O}_3$ ; inoltre la quantità di  $\text{H}_2\text{O}^+$  per la (3) rispetto alle prime due.

Il confronto del tipo chimico delle rocce studiate con i tipi magmatici di Niggli le fanno ascrivere a gabbrodioriti con passaggi per la (1) verso un tipo gabbrodioritico acido fino ad orbitico, per la (2) verso una mela-gabbrodiorite, e con oscillazioni per la (3) verso un magma mihairitico.

Confronti con le varie differenziazioni della massa centrale del granito di Cima d'Asta non fanno riscontrare alcun tipo simile a queste rocce dioritiche. Si tratta sempre di rocce alquanto più acide di quelle da me esaminate e differenziate piuttosto in senso sienitico che non dioritico <sup>(4)</sup>.

c) *Rocce filoniane*. - Molto frequenti si trovano i filoni entro la massa dioritica dell'Arinàs, a sud. I tipi di gran lunga più frequenti sono costituiti da rocce granitiche e aplitiche, spesso a stretto contatto fra di loro. Non manca qualche raro filone dioritico, non differenziato, che si spinge entro le rocce incassanti. Il mio studio si è particolarmente interessato dei due tipi più comuni; ho compiuto l'analisi chimica di due campioni, uno di granito porfirico e uno aplitico, presi fra i più rappresentativi.

Il granito porfirico è costituito, nella sua struttura porfirica olocristallina, di quarzo, ortoclasio, plagioclasì al 32 % circa di anortite (angolo di estinzione simmetrica in zona normale a  $(010) = 15^\circ$  e indice  $\gamma$  quasi uguale a  $\epsilon$  del quarzo) e biotite come componenti essenziali, cui si aggiungono anfiboli di tipo orneblendico-actinolitico e pirosseni, quasi sempre uralitizzati, in quantità subordinata. Fra gli accessori è abbondante la apatite.

Le rocce aplitiche hanno grana grossa e struttura autallotriomorfa, e sono composte essenzialmente da quarzo e pertite ortoclasica sempre uniti in una stretta implicazione pegmatitica. Subordinati sono i plagioclasì, molto acidi, e la biotite. Gli accessori sono molto scarsi.

Tutte queste rocce presentano forti trasformazioni per lo più di tipo idrotermale con formazione di minerali argillosi, sericite, cloriti, epidoti, uralite.

Dò i risultati delle analisi chimiche:

(4) C. ANDREATTA, ved. op. cit.

	aplite	porfido granitico		aplite	porfido granitico
SiO <sub>2</sub> . . . . .	76,14	68,34	si . . .	486	312
TiO <sub>2</sub> . . . . .	tr.	tr.	al . . .	54	49
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	14,30	18,32	fm . . .	10	17,5
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	0,82	1,34	c . . . .	6	14,5
FeO . . . . .	0,71	2,46	alc . . .	30	19
MnO . . . . .	tr.	tr.	k . . . .	0,5	0,4
MgO . . . . .	0,29	0,48	mg . . .	0,25	0,2
CaO . . . . .	0,88	3,00	clfm . .	0,57	0,84
Na <sub>2</sub> O . . . . .	2,54	2,48			
K <sub>2</sub> O . . . . .	3,46	2,65			
H <sub>2</sub> O <sup>+</sup> . . . . .	0,16	0,32			
H <sub>2</sub> O . . . . .	0,72	0,92			
	100,02	100,34			

Il confronto dei risultati d'analisi con i tipi magmatici stabiliti da Niggli fa classificare il porfido granitico come corrispondente ad un magma farsunditico, e l'aplite ad un magma granitico-aplitico, entrambi però con qualche oscillazione ed incertezza.

**Botanica.** — *Osservazioni morfologiche e fitogeografiche su un paleoendemismo della Sardegna settentrionale: la «Centaurea horrida» Bad<sup>(\*)</sup>.* Nota di LUIGI DESÒLE, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio A. CHIARUGI.

L'importanza geobotanica delle specie endemiche mi hanno spinto a rivolgere la mia attenzione ad un classico endemismo della mia Sardegna: la *Centaurea horrida* Badarò, soprattutto in seguito ad alcune mie osservazioni sulla specie non collimanti con quelle degli Autori che di essa si erano precedentemente occupati.

Con questa Nota riassumerò brevemente il risultato delle indagini, dato l'interesse delle conclusioni a cui sono giunto.

I. *Eterofilillia della «Centaurea horrida»*. — Non appena si vuole determinare la specie, allorché ci si imbatte in essa, soprattutto se all'inizio della primavera, appare manifesto il fatto che nella descrizione della specie si suole tacere completamente di una caratteristica molto importante: l'eterofilillia, di cui del resto il Moris <sup>(1)</sup> aveva fatto parola, la qualcosa fa restar perplessi nella determinazione.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Sassari e nell'Erbario Centrale Italiano di Firenze.

(\*\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) J. MORIS, *Flora Sardo*a... (Taurini ex regio typographeo, vol. II, 445-447) (1840-1843).



Io credo di poter distinguere nella specie tre categorie di foglie e tre categorie di rami che si sviluppano in tempi diversi. Le categorie dei rami sono costituite: I) da normali *macroblasti*, che si sviluppano in primavera alle ascelle delle foglie terminali delle cacciate degli anni precedenti, soprattutto delle più recenti; II) da normali *brachiblasti*, che si sviluppano alle ascelle delle foglie basilari delle cacciate degli anni precedenti solo al momento della ripresa vegetativa, quindi anche nell'autunno quando l'andamento stagionale lo consente. Essi sono pochissimi e portano un ciuffo di foglie partenti quasi da uno stesso nodo; III) da particolari *macroblasti* più corti degli altri, spesso molto più corti degli altri, sviluppantesi a vegetazione inoltrata sulle nuove cacciate dell'anno in corso alle ascelle delle foglie apicali, e terminanti in un capolino.

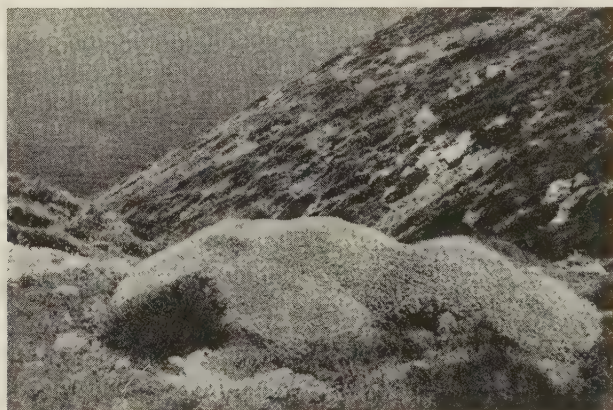


Fig. 1. - *Centaurea horrida* Bad. Grosso pulvino lungo circa m. 2, largo m. 1,60 e alto m. 0,75. Cima di M. Tumarinu (m. 241) al centro dell'Isola Asinara.

Le categorie delle foglie sono costituite: I) da foglie impari-pennato-partite aventi uno, due o tre paia di lacinie, spinescenti (fig. 4); II) da foglie pennato-fesse, membranacee, spesso marcescenti (fig. 4); III) da foglie oblango-lanceolate a margine intero od appena dentellato, membranacee; seccano facilmente, e sono quindi caduche o marcescenti.

Le prime sono sempre persistenti e sempre presenti nei due tipi di macroblasti. Le seconde possono esser presenti egualmente nei due tipi di macroblasti. Le terze sono presenti nei soli brachiblasti.

La ramificazione, che per effetto del tipo suddescritto di eterocladia raggiunge un grado di intensità veramente elevato, e la forte spinosità delle foglie erinacee, danno alla pianta di *C. horrida* l'aspetto di pulvini spinosi che possono raggiungere dimensioni notevoli. La loro frequenza conferisce al paesaggio vegetale l'aspetto di quelle garighe a « frigana » o a « tomillares », che sono frequenti nella regione arida di tutto il Mediterraneo meridionale e orientale per la presenza di analoghe specie spinose a pulvino (*Poterium spinosum*, *Astragalus Tragacantha*, *Euphorbia spinosa* e *E. acanthothamnus*, *Thymus capitatus*, ecc.), e che nella zona costiera della Sardegna

settentrionale acquistano una peculiare facies regionale per la presenza di *C. horrida* (figg. 1-3): La spinosità della specie è dovuta esclusivamente alle foglie, non ai rami, a differenza della *C. spinosa*. L.

Resta quindi chiaro che l'eterofilillia nella *C. horrida* costituisce un carattere diagnostico di primaria importanza e che non può essere taciuto in una Chiave analitica. Pertanto la diagnosi potrebbe essere integrata come segue: «fusti legnosi di varie grandezze fino a 70 cm. di altezza. Fg. spesso di tre forme, le prime alla base di macroblasti pennato-fesse, membranacee, caduche o marcescenti; le seconde poste superiormente alle prime, pennato-partite con 3-5-7 paia di lacinie lesiniformi, spinescenti e persistenti; le terze primaverili o autunnali in numero di 5-7, portate da brachiblasti fortissimi



Fig. 2. — *Centaurea horrida* Bad. Altro grosso pulvino alto oltre 50 cm. a poca distanza da cespugli di *Chamaerops humilis*. Nuova stazione a substrato calcareo a Cala Lioneddu (penisola di Capo Caccia).

posti alla ascella di foglie basilari dei macroblasti adulti, oblungo-lanceolate, intere o quasi, caduche o marcescenti, e in tal caso di colore marrone oscuro ».

II. *Costituzione dei pulvini*. — Una seconda divergenza rispetto agli autori precedenti mi pare di doverla riscontrare nella descrizione dei pulvini. Infatti si afferma che essi possono raggiungere 1-3 dm. d'altezza. Ora è certo che in genere l'essenza forma cuscini più o meno arrotondati di varia grandezza con una dominanza media di quelli alti 30-40 cm., con diametro poco variabile in più o in meno, ma è pur certo che molto spesso, soprattutto in zone ove la pianta sia più rispettata ed abbia maggior possibilità di sviluppo, l'altezza può raggiungere anche i 70 cm. e un diametro di oltre un metro e mezzo. Ne fanno testimonianza le annesse fotografie (figg. 1-3) che ci mostrano esempi di bellissimi cuscini aventi le dimensioni su accennate.

III. *Endemicità assoluta della specie per la Sardegna*. — Notevole divergenza esiste nella letteratura circa la distribuzione della *C. horrida*. Per alcuni

Autori infatti la specie è presente solo nelle isole Asinara e Tavolara, per altri anche in Liguria.

Le ricerche bibliografiche mi hanno portato a concludere innanzi tutto che la specie è stata trovata dal Badarò <sup>(2)</sup> per la prima volta nell'Isola madre e precisamente nei pressi della Tonnara di Stintino, verso l'estremo lembo della Penisola Nurrica, posta a nord-ovest di Sassari; in secondo luogo che l'opinione dell'ubicazione in Liguria è sorta per un semplice equivoco originato nella erronea interpretazione del titolo della Nota annunciante la scoperta della nuova specie nel 1824.

E soprattutto le mie ricerche mi hanno portato a precisare l'intero areale della specie: esso risulta esteso in modo frammentario esclusivamente sulle coste più o meno dirupate e rocciose della Sardegna in 5 zone geogra-



Fig. 3. - *Centaurea horrida* Bad.: Pulvini frammisti a massi e pietrisco calcareo. (Cala Lioneddu su calcare).

ficamente ben distinte e costituite ciascuna da diverse sottostazioni: I) Nei pressi di Capo Caccia (Alghero) sulla costa nord-occidentale della Sardegna, sul calcare; II) Sull'estremo lembo della Penisola della Nurra, nei pressi di Capo Falcone, su scisti; III) Nell'Isola Piana (fra la Nurra e l'Asinara) su scisti; IV) Nell'Isola dell'Asinara, su granito e scisti, con diverse stazioni distinte su tutta la lunghezza dell'isola; V) Nelle due estremità dell'Isola Tavolara presso la costa nord-orientale della Sardegna, dopo un'estesissima interruzione dalle precedenti stazioni, su sfaticcio di calcare e di granito.

Le stazioni relitte di questo endemismo sono pertanto esclusivamente costiere e limitate alla Sardegna settentrionale.

Ma un'altra divergenza esiste tra i vari Autori sulla identità della specie in esame e la sua consorella *Centaurea spinosa* L., endemica dell'Arcipelago greco.

(2) G. B. BADARÒ, *Osservazioni sopra diverse piante della Liguria occidentale e della Sardegna* («Giornale di Fisica», ecc. Pavia, dec. II, tomo VII, p. 367, 1824).



Da un accurato esame sia della letteratura in argomento, sia dei vari disegni, e da un particolare confronto tra esemplari di *Centaurea spinosa*, appositamente richiesti dall'Isola di Creta, e esemplari di *Centaurea horrida* posso dichiarare senza tema di smentita che le due specie sono completamente diverse l'una dall'altra, e che anche qui l'opinione errata ha avuto origine da un equivoco.

Per conseguenza la *C. horrida* è una specie endemica esclusivamente della Sardegna settentrionale.

IV. La «*Centaurea horrida*» non è silicicola. — Era opinione comune — riportata nella *Flora analitica d'Italia* di Adr. Fiori — che la *C. horrida* fosse una specie assolutamente silicicola. In suo suffragio accorrevano soprattutto le

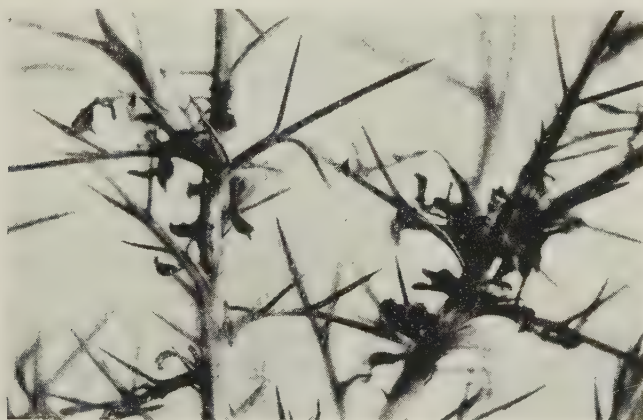


Fig. 4. — *Centaurea horrida* Bad.: Rametti con foglie del primo tipo spinoso e del secondo tipo marcescenti.

affermazioni, molto categoriche in proposito, dell'illustre botanico Augusto Béguinot<sup>(3)</sup>, il quale arrivò a giustificare la presenza della *C. horrida* nella stazione dell'Isola Tavolara per la sola presenza di un affioramento di roccia granitica.

Col mio ritrovamento della specie in ben due estese stazioni di natura prettamente calcarea<sup>(4)</sup> e con il recente accertamento da me fatto nella su accennata stazione dell'Isola Tavolara, dal quale è risultato che essa, pur avendo un basamento granitico, ha un substrato edafico costituito da un conglomerato formato essenzialmente da disfatticcio granitico e calcareo in proporzione varia, ho potuto rendermi conto che la *C. horrida* non può venire considerata specie silicicola, ma semplicemente indifferente.

(3) A. BÉGUINOT e A. VACCARI, *Le piante vascolari sinora note per l'Isola Tavolara e considerazioni fitogeografiche sulle stesse* (« Archivio Botanico », voll. III e V, 1927-1929).

(4) L. DESÒLE, *Presenza della «Centaurea horrida» Bad. su terreno calcareo nella Sardegna nord-occidentale* (« Nuovo Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. LIII, n. 3-4), 1946.



Ciò mi pare molto interessante perché porta un contributo al problema della conoscenza della basifilia o acidofilia delle specie, troppo spesso considerate con molta superficialità.

V. *Cariologia della «Centaurea horrida»*. - Ad integrazione della caratteristiche diagnostiche della specie credo sia ormai indispensabile segnalarne il corredo cromosomico, che ho determinato su striscio di apice radicale ottenuto da semi in germinazione e colorato col metodo del Feulgen. È risultato:  $2n = 18$ ; si tratta quindi di una specie diploide di un genere che possiede  $x = 9$ .

**Botanica.** — *Il tappeto degli ovuli nelle «Gymnospermae»* (\*).  
Nota di ELEONORA FRANCINI, presentata (\*\*) dal Socio A. CHIARUGI.

Con il nome di *spongy tissue* <sup>(1)</sup> o di *schwammige Gewebe* <sup>(2)</sup> viene generalmente indicato uno speciale tessuto che circonda il megarchisporio ed il gametofito femminile dell'ovulo delle *Gymnospermae*. È un tessuto con funzioni di tappeto; secondo taluni la sua origine è sporigena, cioè la sua presenza è da riportarsi ad un archisporio pluricellulare, secondo altri, invece, le sue cellule sono fin dall'origine ben distinte dalle cellule archisporiali.

La Ferguson <sup>(3)</sup>, che lo ha osservato in diverse specie di *Pinus*, ritiene che questo tessuto passi all'endosperma le sostanze nutritive della nucella, non solo, ma che esso stesso sia attivo nella formazione di sostanze nutritive, in quanto spesso si vedono nelle sue cellule numerosi granuli di amido. È inoltre probabile, secondo questa A., che abbia anche un'importanza dal punto di vista meccanico, proteggendo il delicato gametofito nel suo espandersi nella nucella. Anche lo Schnarf (loc. cit.) ammette che molto verosimilmente questo tessuto problematico ha una parte importante nella nutrizione del gametofito femminile.

Ho avuto occasione di fare qualche rilievo sul tappeto degli ovuli durante una ricerca sullo sviluppo del gametofito femminile in *Pinus halepensis* Mill., *Pinus Pinea* L. e *Pinus Pinaster* Sol.; riporto qui per sommi capi i risultati delle mie osservazioni.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Bari.

(\*\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) Cfr. J. M. COULTER and C. J. CHAMBERLAIN, *Morphology of Gymnosperms*, Chicago, Illinois (1925).

(2) Cfr. K. SCHNARF, *Embryologie der Gymnospermen*, «Handbuch der Pflanzenanatomie» di K. LINSBAUER, Bd. X/2 (1933).

(3) M. C. FERGUSON, *Contribution to the knowledge of the life history of Pinus with special reference to sporogenesis, the development of the gametophytes and fertilization*, «Proc. Washington Ac. Sciences», 6, 1-102 (1904).

Al suo primo apparire si vede chiaramente, almeno nella parte più micropilare di esso, l'orientamento delle sue cellule attorno alla cellula madre (fig. 1); mi pare quindi probabile che le sue prime iniziali possano distaccarsi per divisione periclina dalla cellula archisporiale.

Durante la fase apociziale dello sviluppo del gametofito femminile, le cellule del tappeto si accrescono sia di numero per normale divisione cario-cinetica, sia di volume (figg. 2 e 3). Attorno ad esse si rende a poco a poco evidente un alone di cellule nucellari schiacciate, evidentemente perché sottoposte a pressione tangenziale. Questo tessuto tapeziale acquista dimensioni diverse nelle specie di *Pinus* da me osservate; è meno esteso in *Pinus halepensis*, che ha il gametofito più piccolo, e assai più esteso in *Pinus pinea*, che ha il gametofito più grande.

Verso la fine del periodo apociziale del gametofito (fig. 4), quando questo sta per passare allo stadio cellulare, le cellule del tappeto subiscono un forte cambiamento. Divengono più grandi, a citoplasma più denso; più evidente diviene la loro natura ghiandolare, il loro nucleo si divide e si riscontrano cellule binucleate e tetranucleate (figg. 5-7). Queste grosse cellule, strettamente addossate al gametofito, mostrano spesso taluni dei loro nuclei con strane conformazioni, con prolungamenti filiformi, spesso proiettati verso lo strato parietale di citoplasma del gametofito. Tutto lascerebbe supporre che il nucleo, con l'emissione della sua stessa sostanza, prendesse parte alla funzione ghiandolare della cellula, e che si potesse avere in qualche caso addirittura la iniezione di sostanza nucleare nel gametofito. Le cellule binucleate (e forse anche a maggior numero di nuclei) possono fondere i loro nuclei e poi tornare a dividerli. Dalla grossezza di taluni nuclei in divisione, e soprattutto dalla estensione delle masse cromosomiche in metafase ed anafase, si hanno forti indizi di poliploidia in talune cellule del tappeto (cfr. figg. 8-12).

Quando il gametofito è divenuto cellulare (figg. 13 e 14) e si presenta circondato da una evidente membrana (membrana della megaspora), le cellule del tappeto si presentano al termine della loro evoluzione (figg. 15 e 16), con grossi nuclei spesso evidentemente composti, ameboidi, con citoplasma che perde i suoi netti contorni; fra cellula e cellula si riscontrano strisce di particolari granulazioni. Granulazioni simili si trovano dentro le cellule, e spesso si ha l'impressione che anche l'intero nucleo si risolva in un ammasso di granulazioni. Lo stesso tipo di granulazioni si trova addossato alla membrana che riveste il gametofito.

Questo ultimo atto dell'evoluzione del tessuto tapeziale non interessa tutto il suo perimetro attorno al gametofito femminile, in quanto le cellule che stanno in corrispondenza della parte micropilare di questo, in luogo di apparire dense di citoplasma e di aspetto papilloso, si presentano chiare e schiacciate: in definitiva esse esauriscono la loro attività senza aver dato praticamente nessun contributo alla costruzione della membrana, ed il gametofito femminile ci appare così aperto alla sua estremità micropilare.

Non mi pare che vi possa essere dubbio sulla importanza del tappeto nella formazione della membrana della megaspora. Anzi, a questo proposito vedrei una relazione fra la presenza del tappeto nelle Pinacee, che hanno membrana della megaspora ben evidente, e l'assenza di questo tessuto nelle *Taxaceae*, che non l'hanno o l'hanno trascurabile, eccezion fatta per le *Podocarpaceae*, che hanno tessuto tapeziale (in *Phyllocladus*, *Podocarpus*, *Dacrydium* e *Saxagothaea*) ed hanno altresì una membrana della megaspora di tipo normale (cfr. Coulter e Chamberlain, loc. cit.).

Diviene così evidente la somiglianza funzionale fra tappeto del megasporotecio e tappeto del microsporotecio in rapporto alla formazione delle membrane del rispettivo tipo di spore, o comunque al loro rafforzamento. Anche la plurinuclearità che, verso la fine della loro evoluzione, viene raggiunta dalle cellule del tappeto del megasporotecio, la fusione dei nuclei, la tendenza a formare un periplasmodio, richiamano fortemente quello che avviene nel tappeto del microsporotecio delle stesse *Gymnospermae* <sup>(4)</sup>, oltre ad essere fatti ormai ben noti per il tappeto delle antere delle *Angiospermae*.

Mettendo in rilievo la funzionalità del tappeto in rapporto alla formazione della membrana che avvolge il gametofito femminile in *Pinus*, membrana ben evidente e di notevole spessore, eccezion fatta per l'estremità micropilare dello stesso gametofito, non intendo certamente sottovalutare l'importanza di questo tessuto negli stadi anteriori della megasporogenesi e dello sviluppo del gametofito, su cui particolarmente insistono, come ho sopra detto, gli Autori. Del resto l'importanza del tessuto tapeziale in stadi di sviluppo anteriori a quello in cui si verifica l'ispessimento della membrana delle microspore è stata prospettata anche nel caso delle antere <sup>(5)</sup>.

Trattandosi di *Gymnospermae*, negli ovuli ciò è reso ancor più evidente dalla vistosità dei fenomeni legati alla nutrizione ed al rifornimento in acqua di un organo vescicoloso, come è il gametofito femminile, che si trova in condizioni di inferiorità per la sua condizione di aploidia <sup>(6)</sup>, e che può avere, oltre che dimensioni non trascurabili, anche una vita abbastanza protratta nel tempo, con fenomeni evidenti di adattamenti ecologici <sup>(7)</sup>.

È evidente che, pur esistendo una sorta di equilibrio in un certo senso antagonistico fra tappeto e gametofito, che si rivela in una notevole esuberanza delle cellule del primo non appena il secondo dà segno di qualche sofferenza (cfr. fig. 17), il complesso archisporio-gametofito + tappeto è sempre sottoposto allo stesso definitivo destino. Così si riscontra nei due costi-

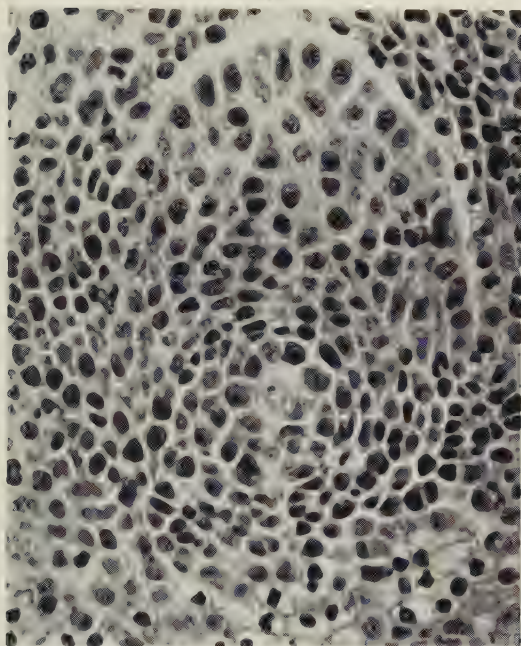
(4) Cfr., oltre che SCHNARF loc. cit., G. TISCHLER, *Allgemeine Pflanzenkaryologie*, 2. Hälfte: *Kernteilung und Kernverschmelzung* in K. LINSBAUER, « Handbuch der Pflanzenanatomie, Zweite Auflage », Bd. II (1951).

(5) R. CORTI, *Il significato del tappeto delle antere al suo primo differenziarsi: Osservazioni in Idesia polycarpa Maxim.*, « Rend. Ac. Naz. dei Lincei », Cl. Sc. fisiche, matematiche e naturali, ser. VIII, 4, 343-346 (1949).

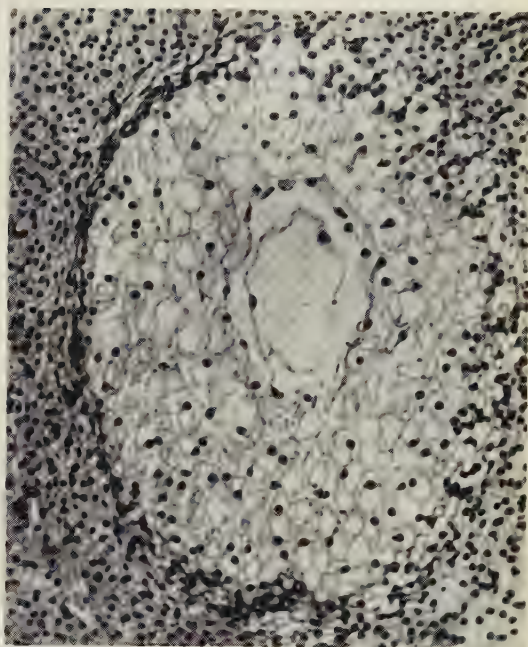
(6) Cfr. A. CHIARUGI, *La poliploidia della generazione aploide femminile delle Fanerogame*, « Caryologia », 3, 149-155 (1950).

(7) E. FRANCINI, *Il Pino d'Aleppo in Puglia*, « Annali della Facoltà di Agraria della Università di Bari », 8, 309-416 (1953).

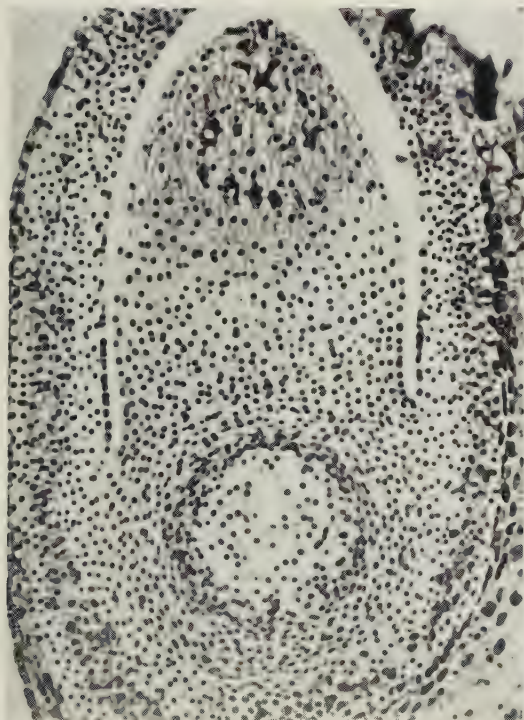




1



2



3

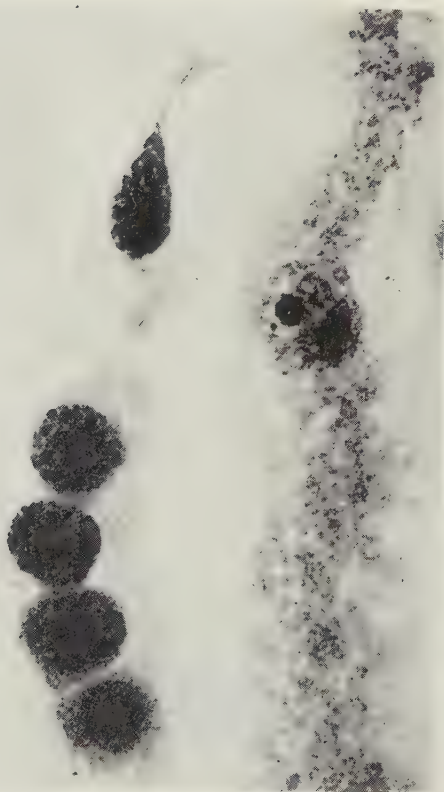




5 a



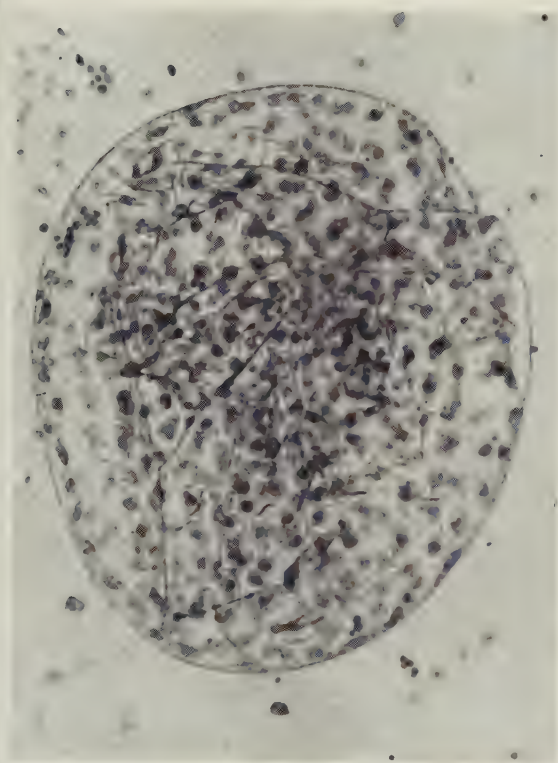
5 b



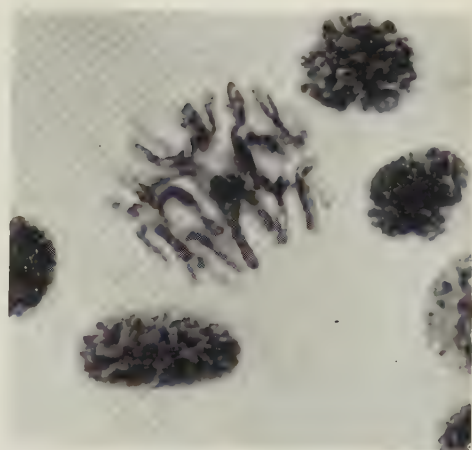
6



7



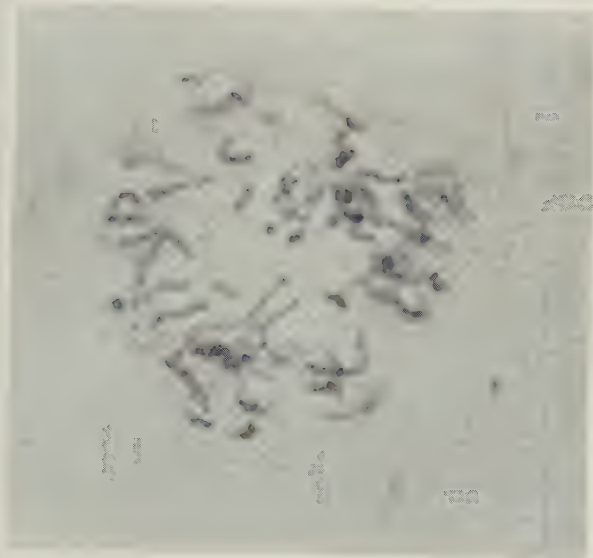
8



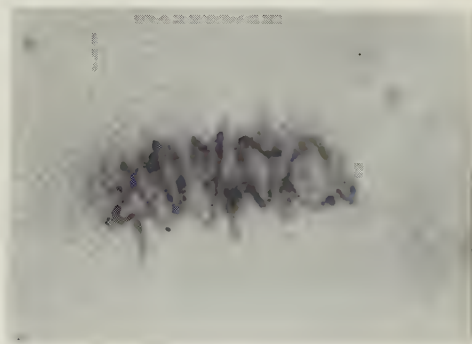
9



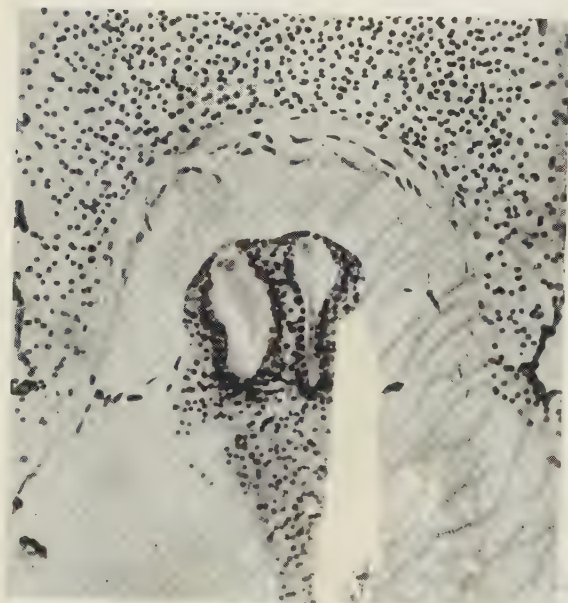
10



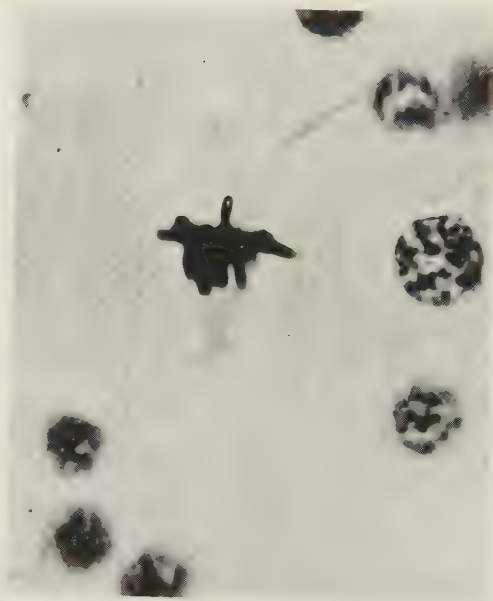
11



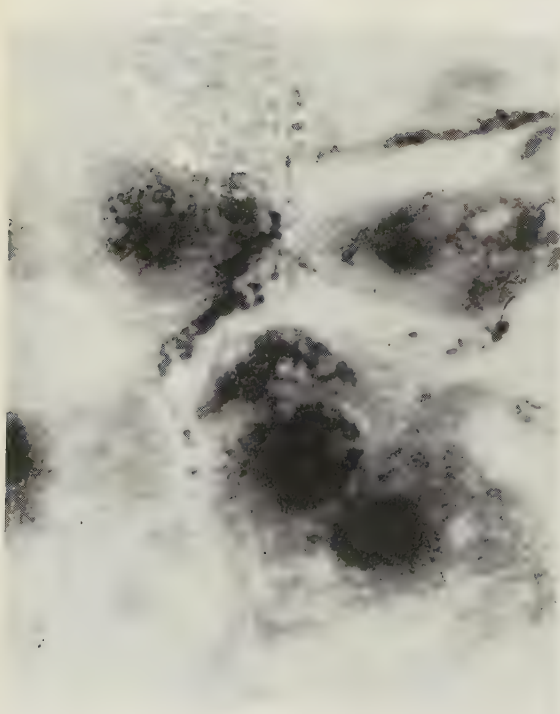
12



13



14

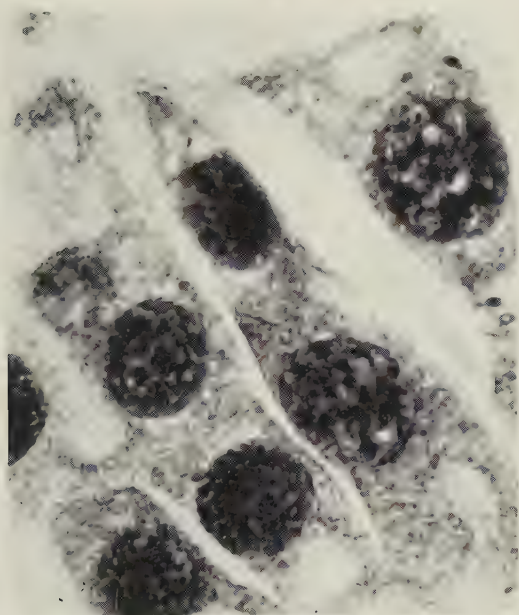


15

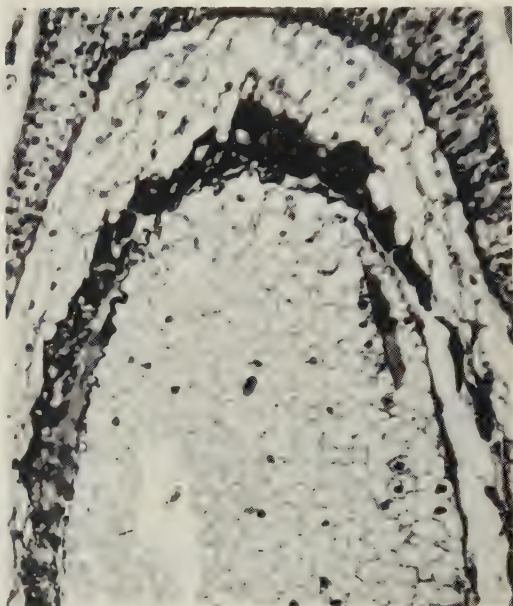


16





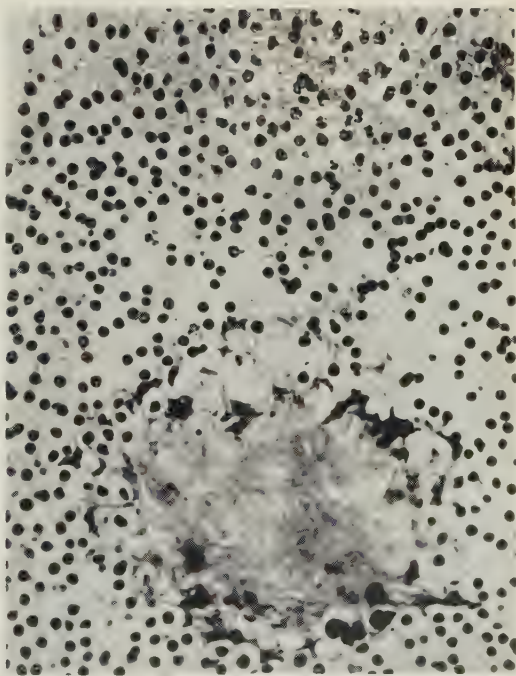
17



18



19



20





tuenti di questo complesso un grado di sensibilità pressoché uguale di fronte ai processi degenerativi che li investono elettivamente in seguito ad impedita impollinazione degli ovuli (fig. 19) o ad impollinazione con polline di altra specie, che non sia riuscito a germinare nella camera pollinica (fig. 20)<sup>(8)</sup>. Particolarmente interessante però mi sembra il caso illustrato nella fig. 18, di interruzione di sviluppo nei primissimi stadi del gametofito cellulare. Deve essere avvenuta una specie di accelerazione degenerativa dello sviluppo del tappeto, che ha provocato il depositarsi di una membrana assai più spessa del consueto attorno al gametofito, e ciò specialmente nella sua parte micropilare. Presumibilmente in conseguenza di questo isolamento non solo precoce, ma anche completo del gametofito, le sue cellule non sono degenerare, ma hanno acquistato un aspetto uniformemente senescente, e soprattutto appare priva di potere prospettico la parte micropilare del gametofito, in cui sarebbero dovuti venirsi a formare gli archegoni. Ciò non solo conferma l'importanza del tappeto nell'elaborazione della membrana, ma mette anche in rilievo la necessità del mantenersi delle comunicazioni fra gametofito e sporofito per il normale svolgersi degli eventi.

## SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

### Tav. I.

Fig. 1. — *Pinus halepensis*. Cellula madre delle megaspore circondata da tre-quattro strati di cellule del tappeto (pinetta del I anno al 20 marzo 1952).  $\times 230$ .

Fig. 2. — *Pinus Pinea*. Megaspore germogliante circondata dal tappeto (pinetta del I anno al 17 settembre 1952).  $\times 98$ .

Fig. 3. — *Pinus Pinea*. Gametofito allo stadio ottonucleato circondato dalle cellule del tappeto (pinetta del II anno al 17 settembre 1952).  $\times 98$ .

Fig. 4. — *Pinus Pinea*. Gametofito a diverse migliaia di nuclei circondato dal tappeto, il quale da una parte appare distaccato dalla nucella (pina del III anno all'8 aprile 1954).  $\times 40$ .

### Tav. II.

Fig. 5 a e b. — *Pinus Pinea*. Cellula tetranucleata del tappeto a due diversi fuochi. Particolare della fig. 4.  $\times 1.100$ .

Figg. 6 e 7. — *Pinus Pinea*. Cellule tetranucleate del tappeto che stanno ai margini del gametofito. Particolari della fig. 4.  $\times 1.100$ .

### Tav. III.

Fig. 8. — *Pinus halepensis*. Gametofito verso la fine dello stadio nucleare, sgusciato da un ovulo colorito in toto secondo Feulgen. Tutti i nuclei sono in profase. Essendo un organo cavo, pieno di liquido, il gametofito appare raggrinzito per la compressione del vetro coprioggetto. Attorno al gametofito si vedono cellule del tappeto libere le une dalle altre (pina del II anno al 24 maggio 1954).  $\times 70$ .

Fig. 9. — *Pinus halepensis*. Cellule del tappeto, come nella fig. 8, di cui una in divisione con numero diploide di cromosomi (presumibilmente 24).  $\times 1.100$ .

(8) Dall'esame di materiale fornitomi da esperimenti in corso del prof. A. De Philippis.

Fig. 10. - Lo stesso che fig. 9, anafase di profilo.  $\times 1.100$ .

Figg. 11 e 12. - Come figg. 9 e 10, ma con corredo cromosomico evidentemente poliploide.  $\times 1.100$ .

Tav. IV.

Fig. 13. - *Pinus halepensis*. Gametofito cellulare con archegoni giovani (pina del II anno al 9 giugno 1952).  $\times 100$ .

Fig. 14. - *Pinus halepensis*. Cellula in divisione con corredo aploide di cromosomi in gametofito cellularizzato, su per giù allo stesso stadio di quello della fig. 13 (pina del II anno al 22 maggio 1950).  $\times 1.100$ .

Figg. 15 e 16. - *Pinus halepensis*. Cellule del tappeto plurinucleate con nuclei in fusione, addossate al gametofito cellulare, circondato da membrana.  $\times 1.100$ .

Tav. V.

Fig. 17. - *Pinus halepensis*. Cellule uninucleate e binucleate del tappeto che si insinuano a guisa di lunghe papille nel gametofito ancora allo stadio nucleare, che non appare in buone condizioni (pina del II anno al 24 maggio 1954).  $\times 1.100$ .

Fig. 18. - *Pinus halepensis*. Gametofito uniformemente cellularizzato, senza iniziali di archegoni al polo micropilare, circondato da cellule del tappeto degenerate (pina del II anno al 23 aprile 1947).  $\times 100$ .

Fig. 19. - *Pinus halepensis*. Degenerazione del complesso archisporio + tappeto in seguito ad impedita impollinazione (pinetta del I anno al 30 aprile 1953).  $\times 160$ .

Fig. 20. - *Pinus Pinea*. Complesso dell'archisporio + tessuto del tappeto completamente degenerato in seguito ad impollinazione con polline di *Pinus Pinaster*, che è tutto degenerato nella camera pollinica (pinetta del I anno al 17 settembre 1952).  $\times 180$ .

**Botanica.** — *Effetti degli antibiotici sui vegetali*. Nota di MARIA VENTURA e GINA PERINI, presentata (\*) dal Socio A. CHIARUGI.

Scopo delle nostre ricerche, di cui la presente è una Nota preliminare, è di studiare le azioni dei vari antibiotici sui vegetali. Nel presente lavoro trattiamo degli effetti della penicillina su cariossidi di *Triticum vulgare* Vill. Già altri Autori si sono occupati di questo argomento: Bustinza e Caballero <sup>(1)</sup> hanno sperimentato che un sale amorfo di Ca in penicillina e sali cristallini di K e Na in penicillina inibiscono la germinazione di semi di *Raphanus sativus*, *Triticum vulgare* var. *lutescens* e *Lactuca sativa* var. *capitata*. Ribeiro <sup>(2)</sup> ha trovato che la penicillina ha inibito la germinazione dei semi di *Lactuca sativa* agendo da fitostatico. Secondo Smith <sup>(3)</sup> questa inibizione sarebbe causata da impurità della penicillina.

(\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) F. BUSTINZA e L. A. CABALLERO, *Contribución al estudio de la influencia de las antibióticos en la germinación de las semillas*, «An. Jard. Bot. Madrid», 7, 177-196 (1946).

(2) RIBEIRO, D. FONSECA, *Penicillin action on the germination of seeds*, «Science», 104, 18 (1946).

(3) SMITH, J. WALTON, *Effect of penicillin on seed germination*, «Science», 104, 411-413 (1946).

Per le nostre esperienze abbiamo usato cariossidi di grano tenero e penicillina sodica G cristallizzata, tamponata, termostabile, purissima, gentilmente fornitaci, dietro cortese interessamento del nostro Maestro prof. Vincenzo Rivera, dalla Società Leo che vivamente ringraziamo.

Le cariossidi, previamente messe a germinare in acqua di fonte, sono state trattate con penicillina quando il germoglio e la radichetta avevano raggiunto la lunghezza totale di tre millimetri.

TABELLA I.

1.000.000 U. I. in 100 cm<sup>3</sup> di acqua distillata.

Prima misurazione			Seconda misurazione			Terza misurazione		
Lunghezza in mm.	Espe- rienza: numero dei semi	Con- trollo: numero dei semi	Lunghezza in mm.	Espe- rienza: numero dei semi	Con- trollo: numero dei semi	Lunghezza in mm.	Espe- rienza: numero dei semi	Con- trollo: numero dei semi
mm. 3	37	3	mm. 3-5	9	1	mm. 11-20	4	—
» 4	18	—	» 6-10	7	3	» 21-30	4	1
» 5	4	7	» 11-15	6	4	» 31-40	6	2
» 6	1	19	» 16-20	9	3	» 41-50	4	2
» 7	—	2	» 21-25	4	2	» 51-60	4	5
» 8	4	5	» 26-30	12	4	» 61-70	7	4
» 9	—	15	» 31-35	4	11	» 71-80	5	3
» 10	5	4	» 36-40	4	8	» 81-90	5	3
» 11	—	4	» 41-45	2	1	» 91-100	4	4
» 12	1	1	» 46-50	1	3	» 101-110	11	2
» 13	—	4	» 51-55	2	4	» 111-120	11	6
» 19	—	2	» 56-60	3	2	» 121-130	2	4
» 20	—	1	» 61-65	1	5	» 131-140	2	12
» 22	—	2	» 66-70	4	6	» 141-150	1	9
» 48	—	1	» 71-75	1	3	» 151-160	—	4
			» 76-80	1	—	» 161-170	—	3
			» 81-90	—	1	» 171-180	—	3
			» 91-95	—	4	» 181-190	—	2
			» 100	—	2	» 191-200	—	1
			» 105	—	1			
			» 112	—	1			
			» 146	—	1			



TABELLA II.

500.000 U. I. in 100 cm<sup>3</sup> di acqua distillata.

Prima misurazione			Seconda misurazione			Terza misurazione		
Lunghezza in mm.	Espe- rienza: numero dei semi	Con- trollo: numero dei semi	Lunghezza in mm.	Espe- rienza: numero dei semi	Con- trollo: numero dei semi	Lunghezza in mm.	Espe- rienza: numero dei semi	Con- trollo: numero dei semi
mm. 3	22	—	mm. 3- 5	12	8	mm. 3- 10	6	—
» 4	7	—	» 6- 10	11	—	» 11- 20	9	—
» 5	9	12	» 11- 15	4	4	» 21- 30	5	2
» 6	3	7	» 16- 20	3	3	» 31- 40	4	2
» 7	1	3	» 21- 25	—	6	» 41- 50	3	9
» 8	3	3	» 26- 30	3	1	» 51- 60	1	5
» 9	5	1	» 31- 35	6	1	» 61- 70	1	1
» 10	7	7	» 36- 40	1	5	» 71- 80	1	3
» 11	1	1	» 41- 45	2	1	» 81- 90	3	—
» 12	3	6	» 46- 50	1	1	» 91-100	3	3
» 13	2	12	» 51- 55	3	1	» 101-110	1	4
» 14	2	2	» 56- 60	4	3	» 111-120	5	2
» 15	1	2	» 61- 65	1	5	» 121-130	5	3
» 16	1	—	» 66- 70	4	1	» 131-140	8	6
» 18	1	1	» 71- 75	6	2	» 141-150	7	6
» 22	1	1	» 76- 80	3	5	» 151-160	6	3
» 23	—	1	» 81- 85	1	3	» 161-170	1	7
» 25	—	3	» 86- 90	2	4	» 171-180	—	8
» 30	—	1	» 91- 95	2	2	» 181-190	1	3
» 33	—	1	» 96-100	1	1	» 191-200	—	1
» 37	—	1	» 101-105	—	2	» 201-210	—	2
» 40	1	1	» 106-110	—	2			
» 42	—	1	» 111-115	—	2			
» 44	—	1	» 116-120	—	1			
» 45	—	1	» 121-125	—	2			
» 53	—	1	» 126-135	—	1			
			» 136-140	—	2			
			» 141-145	—	1			

TABELLA III.  
200.000 U. I. in 100 cm<sup>3</sup> di acqua distillata.

Prima misurazione			Seconda misurazione			Terza misurazione		
Lunghezza in mm.	Espe- rienza: numero dei semi	Con- trollo: numero dei semi	Lunghezza in mm.	Espe- rienza: numero dei semi	Con- trollo: numero dei semi	Lunghezza in mm.	Espe- rienza: numero dei semi	Con- trollo: numero dei semi
mm. 3	4	—	mm. 3-5	15	1	mm. 3-10	7	—
» 4	19	1	» 6-10	12	6	» 11-20	6	—
» 5	32	14	» 11-15	12	10	» 21-30	2	5
» 7	7	10	» 16-20	17	5	» 31-40	6	1
» 8	1	11	» 21-25	2	5	» 41-50	3	5
» 9	1	—	» 26-30	2	1	» 51-60	5	5
» 10	6	2	» 31-35	4	6	» 61-70	12	5
» 11	—	5	» 36-40	5	1	» 71-80	13	2
» 12	—	8	» 41-45	1	2	» 81-90	9	1
» 13	—	19	» 46-50	—	5	» 91-100	4	3
			» 51-55	—	7	» 101-110	3	3
			» 56-60	—	6	» 111-120	—	3
			» 61-65	—	7	» 121-130	—	7
			» 66-70	—	7	» 131-140	—	7
			» 71-75	—	1	» 141-150	—	10
						» 151-160	—	8
						» 161-170	—	4
						» 171-180	—	1

Abbiamo fatto tre gruppi di esperienze:

1° Usando una soluzione di un milione di unità di penicillina sciolta in 100 cm<sup>3</sup> di acqua distillata;

2° con una soluzione di 500.000 unità di penicillina in 100 cm<sup>3</sup> di acqua distillata;

3° con una soluzione di 200.000 unità in 100 cm<sup>3</sup> di acqua distillata.

Ogni gruppo è stato diviso in sette esperienze di dieci cariossidi ciascuna e altrettante di controllo, usando capsule Petri tutte della stessa misura e la stessa quantità di soluzione per ognuna. Le cariossidi di controllo sono state trattate con una uguale quantità di acqua distillata.

Perciò sono state impiegate in totale 70 cariossidi per ogni gruppo e altrettante per i controlli.

Le esperienze sono state condotte a temperatura ambiente. Le cariossidi il cui germoglio e radichetta avevano raggiunto 3 millimetri di lunghezza totale venivano tenute nella soluzione di penicillina per 24 ore, passate le quali, si faceva loro subire un altro trattamento, pure di 24 ore con una nuova soluzione di penicillina: perciò le cariossidi permanevano in penicillina per 48 ore al termine delle quali si procedeva alla prima misurazione. Dopo tre giorni si faceva una seconda misurazione, dopo altri tre giorni una terza e poi una quarta (i cui risultati per brevità abbiamo omessi in questa Nota preliminare). In questo tempo le cariossidi venivano ogni tanto annaffiate con acqua distillata in quantità uguale per ogni capsula.

Dai risultati delle misurazioni che esponiamo nelle annesse tabelle si vede che la penicillina provoca un ritardo nell'accrescimento, in confronto del controllo, anche nelle cariossidi che avevano iniziato la germinazione in acqua di fonte. Oltre il ritardo nell'accrescimento del germoglio, anche nel sistema radicale si nota inibizione causata dalla penicillina: le piantine trattate con questa presentano un numero minore di radici laterali e più corte. In qualche caso la radice non si è sviluppata affatto ma è rimasta allo stadio iniziale. Dopo la quarta misurazione si è visto che le differenze tra piante trattate e quelle di controllo si vanno man mano attenuando fino a scomparire quasi del tutto. Si ha dunque, cessata l'azione della penicillina, una ripresa della vegetazione.

CONCLUSIONE. - Soluzioni di penicillina sodica in diverse concentrazioni ritardano l'accrescimento della piantina in cariossidi di grano che avevano iniziato la germinazione in acqua di fonte. Anche il sistema radicale si presenta ridotto nelle piante trattate. Dopo un certo tempo, cessata l'azione della penicillina, la pianta riprende l'accrescimento normalmente.

**Fisiologia vegetale.** — *Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico.* - X. *Variazioni quantitative dell'acido ascorbico in coleoptili di avena e in segmenti di internodio di « Pisum » trattati con acido indol-acetico* (\*). Nota di ERASMO MARRÈ, presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

Precedenti ricerche di Tonzig e collaboratori hanno messo in luce un'azione dell'acido ascorbico antagonista a quella che l'auxina esplica sulla crescita per distensione<sup>(1)</sup>, sulla viscosità del plasma<sup>(2)</sup>, sulla proliferazione cellulare<sup>(3)</sup>, e sul ricambio idrico<sup>(4)</sup>. L'interesse di queste caratteristiche di « antiauxina » dell'ascorbico appare sottolineato dalla considerazione che, unico tra le molte sostanze, naturali o sintetiche, dotate della capacità di

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) S. TONZIG e F. TREZZI, « N. Giorn. Bot. It. », n. s., 57, 535 (1950); 57 549 (1950).

(2) S. TONZIG e F. TREZZI, *ibid.*, 57, 515 (1950).

(3) S. TONZIG e L. BRACCI, *ibid.*, 58, 237 (1951).

(4) S. TONZIG, F. TREZZI e E. NAVA, *ibid.*, 50, 171 (1952).

controllare e controbattere gli effetti dell'auxina, esso risulta di generalissima diffusione: fatto che giustifica l'attribuzione a questo composto della funzione di regolatore generale dell'azione dell'auxina nella cellula vegetale <sup>(5)</sup>.

D'altro lato, da altre ricerche svolte in questo Istituto, un ulteriore motivo di interesse per la fisiologia dell'ascorbico sembra derivare dalla sua posizione di anello terminale nella catena ossido-riduttiva che media il trasporto dell'idrogeno, staccato da diversi substrati per opera delle deidrogenasi a trifosfopiridinnucleotide (TPN), all'ossigeno, per la via TPN - glutatione riduttasi - glutatione - ascorbico riduttasi - ascorbico - ascorbico ossidasi; via ossidoriduttiva largamente rappresentata nei tessuti in fase di crescita <sup>(6)</sup>, e in evidente competizione con quella che passa per le flavoproteine e i citocromi.

Un possibile collegamento tra l'importanza dell'ascorbico in quanto antiauxina e la sua funzione di catalizzatore di processi ossidoriduttivi di tipo respiratorio sembra potersi intravedere in base a un terzo complesso di dati, che tendono alla dimostrazione sperimentale di un effetto diretto dell'auxina sull'attività deidrogenasica, *in vivo* <sup>(7)</sup> come in estratti acellulari <sup>(8)</sup>. Questi dati prospettano infatti la possibilità che l'azione dell'indolacetico e quella antagonista dell'ascorbico convergano su quegli stessi sistemi enzimatici che risultano intimamente collegati con l'utilizzazione dell'ascorbico nei fenomeni di ossidoriduzione.

Queste considerazioni, suggerendo l'opportunità di un ulteriore approfondimento dello studio dei rapporti tra i due antagonisti, mi hanno indotto alla presente ricerca, intesa a definire le ripercussioni del trattamento auxinico sul metabolismo dell'ascorbico nei tessuti. Appariva infatti probabile che l'azione attivante dell'auxina sulle deidrogenasi dovesse in qualche modo ripercuotersi sul comportamento dell'acido ascorbico, ad esse così strettamente collegato; ed era, d'altra parte, evidente l'interesse che un'eventuale azione dell'auxina sul tenore in ascorbico avrebbe assunto, proprio in considerazione della capacità dell'acido ascorbico di influenzare, a sua volta, l'effetto generale dell'auxina stessa sulla fisiologia della cellula.

**MATERIALI E METODI.** - Nelle esperienze ho utilizzato sia sezioni decapitate e defoliate di coleottili di *Avena sativa*, var. Victory, lunghe 10 mm., e tratte da piantine coltivate all'oscuro, a temperatura di 25 gradi C su carta da filtro, scelte quando il coleoptile aveva raggiunto una lunghezza di 2,5-3 cm.; sia segmenti lunghi 10 mm. tratti dalla parte apicale del terzo internodio di piantine di *Pisum sativum*, var. Alaska, coltivate all'oscurità e a 25°C su vermiculite, e utilizzate quando la distanza tra l'estremo distale del terzo internodio e la gemma apicale non superava i 0,5 cm. In entrambi i casi le sezioni, rapidamente sciacquate in acqua distillata, venivano distribuite, in lotti di 20, in capsule di Petri contenenti acqua distillata, per i

(5) S. TONZIG, *ibid.*, 57, 468 (1950).

(6) E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », fasc. precedente (1954).

(7) E. MARRÈ e C. BIAGI, « N. Giorn. Bot. It. », n. s. (1954) (in corso di stampa).

(8) E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 15, 433 (1953).



controlli, o soluzioni di acido indolacetico, per i saggi, in ragione di 1 cc. per sezione. In alcune esperienze le sezioni venivano distribuite in capsule contenenti acqua e, rispettivamente, soluzione auxinica solo dopo un soggiorno di 24 ore in acqua distillata. Le capsule contenenti le sezioni venivano mantenute al buio e a temperatura di 25 gradi C per tutto il periodo tra inizio del trattamento e prelevamento per la determinazione dell'acido ascorbico. L'uso di acqua distillata anziché delle normali soluzioni nutritive contenenti K, Mn e saccarosio mi è parso consigliato sia dal fatto che su entrambi i materiali l'attivazione della crescita da parte dell'auxina appariva ottima, anche in assenza di questi cofattori, sia dall'opportunità di studiare il fenomeno, in queste prime ricerche d'ordine orientativo, nella sua espressione più semplice.

Il contenuto in ascorbico nei segmenti variamente trattati è stato determinato, dopo estrazione con acido metafosforico 5 % mediante la consueta tecnica di titolazione al 2-6 diclorofenol-indofenolo <sup>(9)</sup>.

TABELLA I.

*Azione dell'acido indolacetico (IA) sul tenore in ascorbico (AA) in coleoptili decapitati di «avena». I dati rappresentano le medie di dati in doppio di due esperienze condotte in parallelo.*

Trattamento	AA/20 coleoptili
Inizio dell'esperienza . . . . .	55-57
30 primi in H <sub>2</sub> O diist . . . . .	56-57
30 primi in IA $4 \cdot 10^{-6}$ . . . . .	59-60
6 ore in H <sub>2</sub> O . . . . .	47-45
6 ore in IA . . . . .	64-62
24 ore in H <sub>2</sub> O . . . . .	27-27
24 ore in IA . . . . .	49-46
24 ore in H <sub>2</sub> O, quindi 30 primi in H <sub>2</sub> O . . . . .	22-25
24 ore in H <sub>2</sub> O, quindi 30 primi in IA . . . . .	36-38
24 ore in H <sub>2</sub> O, quindi 60 primi in H <sub>2</sub> O . . . . .	15-17
24 ore in H <sub>2</sub> O, quindi 60 primi in IA . . . . .	35-36

ESPERIENZE E RISULTATI. - I dati delle Tabelle I e II e il grafico della fig. 1 illustrano il comportamento dell'ascorbico in funzione della presenza o meno di acido indolacetico. Tanto per le sezioni di coleoptili di avena che per i segmenti di internodi di pisello si osserva che:

a) nei controlli in acqua distillata l'acido ascorbico subisce una progressiva diminuzione, tanto che dopo una permanenza di 24 ore nelle cap-

(9) *Methods of Vitamin assay, Interscience*. New York (1951).

sule vengono raggiunti valori del 50 %, per l'avena, e del 27 %, per il pisello, inferiori a quelli iniziali;

b) nei saggi trattati con indolacetico tale diminuzione nel tenore in ascorbico appare pressoché totalmente inibita;

c) nei saggi preventivamente mantenuti in acqua distillata per 24 ore, e cioè fino ad un momento in cui già sensibilissima appariva la caduta del tenore in ascorbico, l'acido ascorbico non solo non subisce una ulteriore diminuzione, ma aumenta rapidamente (in misura assai maggiore nell'avena, ma pure ben evidente nel pisello) durante i primi 30 primi di contatto con l'auxina, per poi stabilizzarsi sui nuovi livelli raggiunti.

#### TABELLA II.

*Azione dell'acido indolacetico sul tenore in ascorbico in segmenti di terzo internodio di « Pisum ». I dati rappresentano le medie di determinazioni in doppio.*

Trattamento	AA/20 segmenti
Inizio dell'esperienza . . . . .	175
1 ora in H <sub>2</sub> O . . . . .	169
1 ora in IA 10 <sup>-5</sup> . . . . .	175
3 ore in H <sub>2</sub> O . . . . .	171
3 ore in IA . . . . .	185
6 ore in H <sub>2</sub> O . . . . .	153
6 ore in IA . . . . .	172
24 ore in H <sub>2</sub> O . . . . .	120
24 ore in IA . . . . .	164
24 ore in H <sub>2</sub> O, quindi 30 primi in H <sub>2</sub> O . . . .	108
24 ore in H <sub>2</sub> O, quindi 30 primi in IA . . . .	127
24 ore in H <sub>2</sub> O, quindi 60 primi in H <sub>2</sub> O . . . .	96
24 ore in H <sub>2</sub> O, quindi 60 primi in IA . . . .	125

DISCUSSIONE. — I risultati sopra esposti dimostrano l'efficace azione dell'auxina sul metabolismo dell'acido ascorbico in tessuti su cui l'auxina esplica un intenso effetto di stimolo della crescita.

La rapidità di quest'azione risulta evidente dal fatto che essa si manifesta ben chiara, nel caso delle sezioni mantenute in acqua per un lungo periodo prima del trattamento, già dopo 30 primi di contatto con l'indolacetico. Una tale rapidità di risposta suggerisce che alla base del fenomeno siano, nel nostro caso, cause ben distinte da quelle in giuoco nelle esperienze di Newcomb <sup>(10)</sup>, che ha osservato, in tessuto di tabacco coltivato *in vitro*, un'attivazione dell'ascorbico-ossidasi in seguito a prolungato trattamento con indolacetico.

(10) E. H. NEWCOMB, « Am. Journ. Bot. », 37, 264 (1950).

Tra le varie ipotesi possibili circa il meccanismo dell'azione di protezione esplicata, in questi esperimenti, dall'auxina sull'acido ascorbico, la più probabile, allo stadio attuale delle nostre conoscenze, sembra derivi direttamente dalle premesse prospettate nell'introduzione di questo lavoro. Numerosi dati inducono a pensare che uno dei primi effetti dell'auxina possa consistere nell'attivazione di sistemi deidrogenasici, tra cui attivissimi appaiono, nei tessuti in fase di crescita, quelli a TPN <sup>(11)</sup>. È quindi ragionevole supporre che a una tale attivazione debba corrispondere un aumento del TPN ridotto; e quindi del mantenimento nella forma ridotta sia del glutatione, sia dell'acido ascorbico. Ammettendo, come sembra legittimo, che la caduta

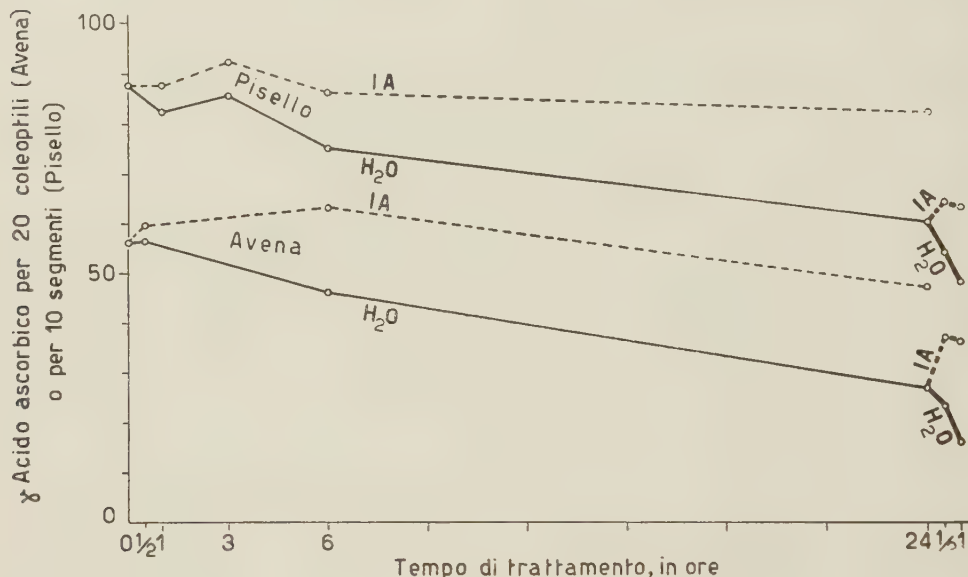


Fig. 1. - Variazioni del contenuto in acido ascorbico in coleotili d'avena e in segmenti di internodio di pisello portati in acqua distillata o in soluzione di acido indolacetico. Alla 24<sup>ma</sup> ora, gruppi di coleotili e segmenti, prima in acqua, sono stati trasferiti in altre capsule, contenenti rispettivamente ancora acqua o acido indolacetico.

del tenore in ascorbico nei segmenti mantenuti in acqua dipenda da una progressiva ossidazione dello stesso ad acido deidroascorbico, e alla successiva demolizione anche di quest'ultima forma, molto più labile di quella ridotta, l'azione di protezione dell'auxina sull'ascorbico potrebbe spiegarsi come un effetto indiretto, tramite l'attivazione dei sistemi deidrogenasici. Tale ipotesi appare confermata dal fatto del rapido passaggio dell'ascorbico alla forma ossidata in internodi di pisello infiltrati nel vuoto, e quindi in condizione di parziale asfissia; come pure dalla diversa reazione all'auxina da parte dei segmenti di pisello e d'avena, a seconda che essi siano stati, prima del trattamento, mantenuti o meno in acqua per un periodo sufficiente a determinare una rilevante caduta del tenore in ascorbico: reazione rapida e intensa nel primo caso, quasi insensibile nel secondo. Il che sembra da

(11) E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16 (1950).

interpretarsi nel senso che nei segmenti appena recisi la reazione sia mascherata dal fatto che già inizialmente quasi tutto l'ascorbico è presente nella forma ridotta: mentre nei segmenti mantenuti a lungo in acqua una notevole parte dell'ascorbico, progressivamente passato alla forma ossidata, è ancora suscettibile di essere rapidamente ridotta dall'idrogeno che giunge al TPN, e quindi al glutatione, in seguito all'attivazione indotta dall'auxina sui sistemi deidrogenasici.

In via alternativa, un'altra ipotesi sembra possibile, e particolarmente interessante per gli sviluppi che potrebbe suggerire. Per l'antagonismo auxina-ascorbico è stata precedentemente prospettata una base competitiva (Trezzi e Tonzig <sup>(12)</sup>); e questo sia in seguito a considerazioni d'ordine generale, sia in base a risultati sperimentali attualmente in corso di pubblicazione (Tonzig e Trezzi) che rivelano un aumento dell'auxina libera estraibile in tessuti trattati con acido ascorbico. D'altro lato, in base ad altri dati ottenuti in questo Istituto (Tonzig, Marrè, Trezzi e Laudi) sembra potersi concludere che alla azione attivante dell'auxina sui sistemi deidrogenasici ne corrisponde una inibente, esplicita dall'acido ascorbico sugli stessi sistemi. Si delinerebbe così la possibilità di localizzare a livello di un unico sistema enzimatico l'incontro dell'auxina e dell'ascorbico, possibilità che, se confermata, potrebbe fornire la chiave per la comprensione non solo del meccanismo per cui i due composti agiscono, sulla cellula, inducendo reazioni fisiologiche opposte, ma anche di quello per cui essi reciprocamente si influenzano l'un l'altro per quanto riguarda la loro concentrazione, distribuzione nella cellula, ed efficienza fisiologica.

**Fisiologia.** — *Sulle cause del disordine funzionale del cuore nell'inanizione. L'indipendenza dai bioregolatori esogeni, dal tasso glicemico e dall'intensità delle combustioni tissulari. Il rapporto con i quozienti di combustione protidica* <sup>(\*)</sup>. Nota di GAETANO LIVREA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. G. AMANTEA.

In due precedenti Note <sup>(1) (2)</sup>, abbiamo già reso conto di alcuni fatti osservati nel corso di una nostra metodica indagine circa il comportamento funzionale del cuore durante l'inanizione acuta e cronica e, in particolare, l'inanizione da dieta orizanica.

Per una migliore comprensione di quanto ora esporremo, è opportuno riportare i punti principali scaturiti dalle ricerche già pubblicate:

1° Il disordine della nutrizione, che sta a base del disturbo cardiaco dei colombi tiaminodeficienti, è diverso dal disordine nutritivo, che sta a base

(12) F. TREZZI e S. TONZIG, *Rapports et communications de l'VIII Congrès int. de Bot.*, Paris, 1954.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Messina.

(\*\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) G. LIVREA, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 15, ser. 8ª, fasc. 6 (1953).

(2) G. LIVREA e L. CRAXI, « Ibidem », 16, ser. 8ª, fasc. 4 (1954).



della polinevrite; in altri termini, nel mentre la condizione determinante della polinevrite è la tiaminodeficienza, la condizione determinante del cuore cosiddetto beriberico dei colombi appare essere quella stessa del cuore da inanizione;

2° Nell'organismo del Colombo si può verificare una carenza di determinati principi indispensabili per il normale metabolismo e quindi la normale funzione del sistema specifico del cuore, anche allorquando v'è uno squilibrio inapprezzabile o appena apprezzabile tra i processi di assimilazione e di catabolismo;

3° Tale carenza, almeno nel Colombo, non può o solo per poco tempo può essere ovviata con la nutrizione endogena, cioè con la ricerca dei principi indispensabili al sistema specifico del cuore attraverso la distruzione delle sostanze proprie dell'organismo;

4° Il cuore, forse a causa del suo incessante lavoro in forma ritmica, è capace solo parzialmente di adattarsi agli squilibri del bilancio calorico-nutritivo, dei quali risente non meno, anzi più e più precocemente di qualsiasi altro organo o muscolo;

5° Il cosiddetto cuore beriberico è un cuore da inanizione non solo funzionalmente, ma anche istopatologicamente, in quanto che nei due casi si riscontra un substrato istopatologico ed istochimico stupefacentemente identico;

6° Tale substrato non va ricercato nelle fibre muscolari e nell'interstizio strutturato, bensì nella sostanza fondamentale (edema e PAS positività) e nelle cellule del Purkinje (diverso grado di PAS positività e lesioni evolutive fino alla necrosi dell'elemento cellulare);

7° Nell' inanizione, la causa dell'alterazione trofica della sostanza fondamentale e della cellula del Purkinje verosimilmente risiede nel disordine nutritivo protidico del cuore: difatti, nel nostro caso, si possono avanzare argomenti, secondo i quali la PAS positività non andrebbe riferita ad accumulo di glicogeno o di derivati lipidici contenenti il gruppo idrossichetonico, ma alla presenza di determinati protidi contenenti gruppi idrossiamino attivi.

Dopo quanto precede, non c'è sembrato ingiustificato supporre la possibilità che la carenza responsabile del disordine funzionale del cuore durante l' inanizione sia verosimilmente da circoscrivere ai protidi e forse a determinati protidi indispensabili. In altre parole, in base ai dati raccolti a tutt'oggi, si potrebbe pensare che le proteine tissulari cardiache sarebbero coinvolte nel catabolismo protidico connesso con l' inanizione assoluta o con l' inanizione da dieta orizantica e la distruzione delle proteine tissulari a livello degli altri organi o tessuti non sarebbe, o solo per poco tempo sarebbe capace di fornire al cuore i protidi necessari a compensare le perdite corrispondenti al dispendio azotato endogeno specifico dell'organo, donde la necessità dell'apporto esogeno di un minimo di determinati aminoacidi.

In vista degli anzidetti fatti e delle considerazioni cui essi si prestano e nell'intento di approfondire la conoscenza delle cause e del meccanismo determinante del disordine funzionale del cuore durante l' inanizione, c'è sem-

brato importante analizzare il ruolo svolto dalle sostanze plastiche e dalle sostanze che regolano le trasformazioni di materia e di energia e contemporaneamente studiare gli eventuali rapporti tra l'insorgenza e l'accentuazione del disordine cardiaco e le modificazioni qualitative e quantitative dei processi nutritivi proprie dell'inanizione.

Nell'avviarci all'indagine dei rapporti tra il biochimismo dell'inanizione e il comportamento cardiaco, ci siamo lasciati guidare da queste riflessioni:

a) è noto (D'Arcangelo<sup>(3)</sup>) che durante le prime due fasi dell'inanizione acuta del colombo il tasso glicemico aumenta gradatamente, per cadere in modo più o meno critico in coincidenza dell'inizio dell'ultima fase. V'è un qualche rapporto tra comportamento della glicemia e comportamento cardiaco?

b) è noto che durante l'inanizione, la produzione di  $\text{CO}_2$ , il consumo di  $\text{O}_2$ , il QR ed il dispendio energetico per Kg/ora si abbassano in maniera evidente (Capraro ed al.<sup>(4)</sup>) ed è noto pure, inoltre, che la determinazione del QR ci ragguaglia, entro certi limiti, sulle proporzioni relative dei principi immediati che simultaneamente bruciano nell'organismo. Mediante lo studio degli scambi gassosi respiratori, è possibile precisare l'eventuale rapporto fra intensità e modalità delle combustioni tissulari ed insorgenza e comportamento del disordine cardiaco?

c) se la causa del cuore da inanizione va ricercata nel disordine nutritivo protidico del cuore, mediante lo studio elettroforetico e cromatografico delle modificazioni qualitative e quantitative dei protidi serici, è possibile cogliere nel corso dell'inanizione l'eventuale rapporto tra queste modificazioni e l'insorgenza e l'evoluzione del disordine funzionale cardiaco?

Per comodità di ricerca abbiamo diviso i diversi esperimenti progettati in due parti e precisamente abbiamo studiato 1) in un lotto di animali, il ruolo svolto dai bioregolatori esogeni e gli eventuali rapporti tra il disordine funzionale cardiaco ed il comportamento del tasso glicemico e degli scambi gassosi respiratori e 2) in un altro lotto, il ruolo svolto da determinate sostanze plastiche, cioè da alcune proteine, da alcuni idrolisati proteici e da varie miscele di aminoacidi, nonché gli eventuali rapporti tra il disordine cardiaco ed il comportamento elettroforetico e cromatografico dei protidi serici.

Nelle pagine che seguono, per necessità di spazio, esponiamo sinteticamente soltanto i risultati della prima parte delle indagini.

Gli esperimenti sono stati condotti su 16 colombe provenienti dall'agro messinese o dal commercio, di ambo i sessi, di diversa età, ma tutti sessualmente maturi. Gli animali sono stati suddivisi in 8 lotti di 2, associando, quando è stato possibile, un maschio con la femmina. Ciascun lotto è stato mantenuto in gabbia separata, in ambiente riparato a temperatura di stanza ed alimentato per diversi giorni con grano e granturco *ad libitum*, ritirando, però, il cibo dopo l'imbrunire e ridandolo al mattino, dopo il controllo del peso. In questo

(3) P. D'ARCANGELO, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 25, 1133 (1949).

(4) V. CAPRARO, « Quad. della Nutr. », 8, 352 (1941-42).

periodo preparatorio di durata variabile, tra 5 e 15 giorni, a seconda della provenienza degli animali, ciascuno di essi è stato esaminato per quanto riguardava il comportamento cardiaco, la glicemia e gli scambi gassosi (ad ingluvie vuota). Indi ciascun lotto è stato posto ad una diversa condizione di inanizione e precisamente:

I lotto: digiuno con acqua a volontà;

II lotto: digiuno con acqua a volontà e somministrazione di sali minerali;

III lotto: digiuno con acqua a volontà e somministrazione delle vitamine chimicamente note;

IV lotto: digiuno con acqua a volontà e somministrazione contemporanea di sali minerali e vitamine chimicamente note;

V lotto: digiuno con acqua a volontà e somministrazione di sali minerali, dopo l'insediamento del disordine cardiaco;

VI lotto: digiuno con acqua a volontà e somministrazione delle vitamine chimicamente note, dopo l'insediamento del disordine cardiaco;

VII lotto: digiuno con acqua a volontà e somministrazione delle vitamine e dei sali minerali, dopo l'insediamento del disordine cardiaco;

VIII lotto: dieta orizantica sino all'insediamento del disordine cardiaco, indi somministrazione dei sali minerali e delle vitamine chimicamente note.

Durante il periodo d'inanizione sono stati controllati quotidianamente il peso, la frequenza e il ritmo cardiaco e più volte, in genere al 1°, 3°, 6° o 8°, 14° o 16° giorno, il tasso glicemico e gli scambi gassosi.

La frequenza e il ritmo sono stati stabiliti con l'ascoltazione e con l'elettrocardiografo, i valori del tasso glicemico col micrometodo di Hagedorn e Jensen e l'entità degli scambi respiratori, a neutralità termica, con apparecchio a circuito chiuso, basato sulla determinazione volumetrica dell'O<sub>2</sub> assorbito e sulla determinazione ponderale del CO<sub>2</sub> eliminato in 60'. Il valore calorico dell'O<sub>2</sub> per QR inferiore a 0,707 è stato calcolato sulla base dei dati ricavati dalla tavola di Lusk <sup>(5)</sup>. Durante la rialimentazione, allorché la quantità di alimento (grano o granone), talvolta sminuzzato e somministrato per imbeccamento, era di 10 g, le determinazioni della frequenza cardiaca e degli scambi sono state eseguite ripetutamente e quelle riportate si riferiscono alla 4ª ora circa dalla somministrazione dell'alimento per la frequenza e alla 12ª circa per gli scambi gassosi. Per quantità superiori di alimento, tutte le determinazioni sono state eseguite dopo 16 ore circa dalla somministrazione. Talvolta la rialimentazione è stata sospesa o fortemente ridotta dopo 1 o 2 giorni e per 1 o 2 giorni sono stati controllati gli effetti cardiaci del nuovo digiuno o dell'ipotalimentazione, che coglieva l'organismo già profondamente depauperato.

I sali minerali sono stati somministrati quotidianamente sotto forma di ceneri di una quantità di grano (g. 30), che sapevamo capace di evitare l'insorgenza dei fenomeni cardiaci. Le ceneri sono state preparate preventivamente, calcinando con cautela al calore rosso scuro l'adatta quantità di grano. La resa è stata di circa g 19.5/Kg di grano. La quantità da somministrare (circa 600 mg) veniva impastata all'atto della somministrazione con poche gocce di acqua.

Nel caso dello studio dell'eventuale azione preventiva delle vitamine chimicamente note, queste sono state somministrate *per os*, a giorni alterni, a dosi elevate, precisamente circa le seguenti: acetato di axeroftolo mg 1.5; vitamina D mg 6; acetato di tocoferolo mg 7; cloridrato di tiamina mg 1.5; riboflavina mg 1.5; nicotamide mg 5; cloridrato di piridossina mg 0.15; pantotenato di calcio mg 1.5; citrato di diidrocolina mg 3; inositolo mg 15; acido folico mg 0.3; vitamina B12 mcg 1; acido ascorbico mg 15; rutina mg 8.

Nel caso dello studio dell'azione combinata delle vitamine e dei sali minerali, abbiamo somministrato le vitamine di cui sopra allo stesso dosaggio ed in più o le ceneri di grano alla dose predetta o circa 20 mg. di una miscela salina contenente: solfato ferroso mg 10; ioduro

(5) Sulla base dei dati ricavabili dalla tavola di Zuntz-Schumburg o dei dati di Cathcart e Cuthberton si hanno valori leggermente diversi. E. P. CATHCART e D. P. CUTHBERTSON, « J. of Physiol. », 72, 349 (1931).

di potassio mg. 0.5; fosfato basico di calcio mg. 145; borato sodico mg 0.1; ossido di rame mg 1; fluoruro di calcio mg 0.1; biossido di manganese mg 1; ossido di magnesio mg 1; solfato di potassio mg 5; ossido di zinco mg 0.5; fosfato di calcio secondario mg 110.

Per non superare il limite di spazio assegnato, siamo costretti a dare per ora solo una parziale documentazione dei risultati ottenuti (ved. tabella e grafici). Dal suo insieme però risultano egualmente con evidenza i punti principali apparsi dall'esame di tutti i risultati <sup>(6)</sup> e precisamente:

1° la frequenza cardiaca incomincia talvolta a diminuire già nella prima fase del digiuno, subisce sempre uno spiccato abbassamento nella fase dell'inanizione fisiologica e, accompagnata spesso da aritmia, raggiunge la massima diminuzione quasi sempre verso la fine di questa fase o al principio della terza; talvolta l'aritmia precede la bradicardia;

2° su questo comportamento i bioregolatori esogeni non esercitano alcuna influenza;

3° all'opposto, un'adeguata somministrazione di alimento indirizza con prontezza il disordine verso la norma e a questo riguardo il granturco è sembrato nel complesso più atto del grano a ristabilire la frequenza e il ritmo e a mantenerli, nel caso di una nuova sottrazione o riduzione dell'alimento;

4° il disordine è indipendente dal comportamento del tasso glicemico: difatti, se è vero che nel corso dell'inanizione acuta si verifica un aumento, molto spesso regolare, del tasso, è anche vero che non di rado si verificano pronunciate oscillazioni del tasso senza parallele modificazioni della frequenza e, se è presente, dell'aritmia;

5° tra l'intensità delle combustioni tissulari e l'insorgenza e l'accentuarsi del disordine funzionale cardiaco non v'è una diretta, stretta correlazione: difatti, nel periodo della fame, è possibile talvolta cogliere una peculiare condizione, in cui alla diminuzione dell'eliminazione del  $\text{CO}_2$ , del consumo di  $\text{O}_2$  e del dispendio energetico (DE) per Kg/h non si accompagna una diminuzione della frequenza cardiaca (ved. fig. 1) e, all'opposto, verso la fine della seconda fase, è possibile osservare un aumento del consumo di  $\text{O}_2$  e del DE, cui si accompagna non un aumento, bensì un'ulteriore diminuzione della frequenza (ved. fig. 2);

6° esiste invece un chiaro rapporto tra insorgenza ed accentuazione del disordine funzionale cardiaco e ben determinati valori del quoziente di combustione: difatti la diminuzione della frequenza non si osserva mai con un quoziente di combustione superiore a 0.80, si annuncia talvolta con quozienti oscillanti tra 0.75 e 0.80, si asserisce nettamente con i valori di 0.65-0.60, è sempre pronunciatissima con i valori di 0.50 e anche più bassi, minimo 0.30, da noi talvolta riscontrati in alcuni animali alla fine della seconda o nella terza fase del digiuno;

(6) Ringrazio vivamente la prof.ssa A. D'Agostino e la dr.ssa C. Zannelli per la cortese assistenza nella preparazione delle tabelle e dei grafici relativi ai diversi animali.



TABELLA

Numero dell'animale	Condizione sperimentale	peso corporeo durante l'esperimento g	Giorno del digiuno	Fase del digiuno	Perdita peso corporeo %	Frequenza cardiaca		Glicemia	
						Valore assoluto <i>m'</i>	Variazione percentuale	Valore assoluto g <sup>o</sup> /100	Variazione
2	Grano e granturco ad libitum	450	—	—	—	184	—	2.08	—
	Digiuno con acqua . . . . .	430	1	I	4.4	192	4.3	—	—
		390	3	I	13.3	160	— 13.1	1.97	—
		370	6	II	17.7	104 <sup>a</sup> *	— 43.5	2.14	+
		310	14	III	31.1	80 <sup>a</sup>	— 56.5	2.18	+
	Granturco g 10 . . . . .	308	—	—	31.5	128 <sup>a</sup>	— 30.4	2.48	+
	Granturco g 20 . . . . .	315	—	—	30.0	180	— 2.2	—	—
3	Grano e granturco ad libitum	415	—	—	—	200	—	1.95	—
	Digiuno con acqua e sali min.	400	1	I	3.6	168	— 16	—	—
		380	3	I	8.4	150	— 25	1.98	—
		350	8	II	15.6	130	— 35	2.22	—
		307	16	III	26.0	98 <sup>a</sup>	— 51	2.00	+
	Grano g 10 . . . . .	300	—	—	27.7	110 <sup>a</sup>	— 45	—	—
	Grano g 25 . . . . .	310	—	—	25.3	168 <sup>a</sup>	— 16	2.08	+
6	Grano e granturco ad libitum	410	—	—	—	196	—	1.95	—
	Digiuno con acqua e vitamine chimicamente note . . . .	383	1	I	6.5	184	6.1	—	—
		372	2	I	9.2	180	8.1	2.12	+
		350	6	II	14.6	132	32.6	2.21	+
		324	8	II	20.9	108	44.9	2.50	+
	Granturco g 25 . . . . .	330	—	—	19.5	176	10.2	1.98	+
8	Granturco ad libitum . . .	445	—	—	—	180	—	2.04	—
	Digiuno con acqua, vitamine chim. note e sali min. . .	430	1	I	3.3	180	0	—	—
		375	6	II	15.7	104	— 42.2	2.22	+
		340	10	II	23.5	100 <sup>a</sup>	— 44.4	2.28	+
		310	14	II	30.3	100 <sup>a</sup>	— 44.4	2.47	+
		275	16	III	38.2	75 <sup>a</sup>	— 58.3	1.97	—
	Granturco g 10 . . . . .	270	—	—	39.3	160 <sup>a</sup>	— 11.1	—	—

\* *a* = aritmico.

PUNTALE	O <sub>2</sub> totale consumato g/h	QR		CO <sub>2</sub> Kg/h		O <sub>2</sub> Kg/h		DE Kg/h	
		Valore assoluto	Variazione percentuale	Valore assoluto g	Variazione percentuale	Valore assoluto g	Variazione percentuale	Valore assoluto	Variazione percentuale
31	0.719	0.89	—	1.957	—	1.597	—	5.495	—
38	0.678	0.81	— 9	1.762	— 10	1.576	— 1.3	5.313	— 3.3
33	0.568	0.64	— 28.1	1.289	— 34.1	1.456	— 8.8	4.695	— 14.5
23	0.482	0.64	— 28.1	1.143	— 41.6	1.302	— 18.5	4.197	— 23.6
22	0.470	0.62	— 30.3	1.296	— 33.8	1.516	— 5.1	4.862	— 11.5
10	0.403	0.92	+ 3.3	1.655	— 15.4	1.308	— 18.1	4.537	— 17.4
56	0.550	0.87	— 2.3	2.082	+ 6.3	1.746	+ 9.3	5.976	+ 8.7
34	0.638	0.91	—	1.937	—	1.537	—	5.316	—
34	0.598	0.77	— 15.4	1.585	— 18.1	1.495	— 2.7	4.987	— 6.1
30	0.495	0.63	— 30.8	1.131	— 41.6	1.302	— 15.2	4.186	— 21.2
16	0.466	0.65	— 28.6	1.188	— 38.6	1.331	— 13.4	4.306	— 19.0
03	0.458	0.64	— 29.7	1.312	— 32.2	1.491	— 3.0	4.805	— 9.6
56	0.550	1.00	+ 9.8	2.438	+ 25.8	1.774	+ 15.4	6.273	+ 11.8
40	0.810	1.02	—	2.780	—	1.975	—	7.001	—
30	0.696	0.86	— 15.6	2.167	— 22.0	1.817	— 8.0	6.205	— 11.4
62	0.499	0.82	— 19.6	1.510	— 45.6	1.341	— 32.1	4.535	— 35.2
35	0.471	0.67	— 34.3	1.242	— 55.3	1.345	— 31.9	4.370	— 37.6
25	0.488	0.63	— 38.2	1.311	— 52.9	1.506	— 23.7	4.843	— 30.8
50	0.513	0.92	— 9.8	1.969	— 29.2	1.554	— 21.3	5.383	— 23.1
35	0.592	1.02	—	1.876	—	1.330	—	4.714	—
13	0.556	0.80	— 21.5	1.425	— 24.0	1.293	— 2.7	4.349	— 7.8
90	0.459	0.77	— 24.5	1.306	— 30.3	1.224	— 7.9	4.087	— 13.3
25	0.456	0.68	— 33.3	1.250	— 33.3	1.341	+ 0.8	4.373	— 7.2
90	0.449	0.63	— 38.2	1.258	— 32.9	1.448	+ 8.8	4.655	— 1.2
15	0.398	0.57	— 44.1	1.145	— 38.9	1.447	+ 8.7	4.580	— 2.9
10	0.385	0.96	— 5.8	1.888	+ 0.6	1.425	+ 7.1	4.988	+ 6.0

7° ristabilita l'alimentazione, il consumo di  $O_2$ , la produzione di  $CO_2$ , il DE per Kg/ora, il QR e, come già dicevamo, la frequenza cardiaca si elevano con prontezza. A questo riguardo bisogna notare che, al primo inizio, l'aumento del consumo di  $O_2$  e del DE è sempre proporzionalmente meno spiccato dell'aumento di eliminazione del  $CO_2$  e, quindi, il rapido balzo del QR, rioscillante subito intorno a 0.90-1, sta soprattutto in rapporto con l'acuta ripresa dell'eliminazione del  $CO_2$ . Conseguentemente, nella quasi generalità dei casi, al primo inizio della rialimentazione, il comportamento della frequenza cardiaca è più strettamente legato al comportamento del  $CO_2$  e del QR che non a quello del consumo di  $O_2$  e del DE.

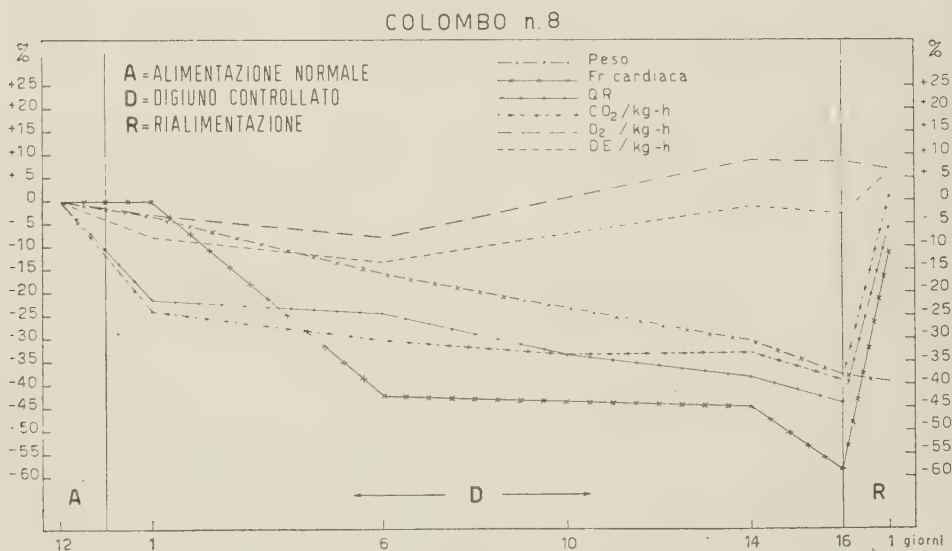


Fig. 1.

Concludendo, possiamo dire che il disordine funzionale del cuore nell'inanizione è indipendente dall'azione dei bioregolatori esogeni noti e dalla variazione del tasso glicemico, sembra essere largamente indipendente dall'intensità delle combustioni tissulari ed è, invece, strettamente legato con l'abbassamento del quoziente di combustione.

Il punto più significativo di queste ricerche sembra essere appunto questo: il rapporto da noi rilevato tra modificazioni dello scambio gassoso e insorgenza ed accentuazione del disordine funzionale cardiaco.

Se il valore del QR ci ragguaglia sulle proporzioni relative dei principi immediati che bruciano nell'organismo e se tale valore può darci, quindi, anche utili indicazioni sui processi del metabolismo intermedio, dobbiamo dire che il disordine funzionale insorge allorquando nelle combustioni prevale l'impegno delle sostanze proteiche e si accentua allorquando nell'organismo, prolungandosi il digiuno, si accentua il catabolismo protidico, anche per la necessità di convertire le proteine in altre categorie di corpi non azotati.

È difatti indubbio che i quozienti di combustione protidica variano da 0.75 a 0.81 ed è del pari indubbio che tali quozienti cadono molto più giù nella formazione, inevitabile nel digiuno prolungato, di glicoso dalle proteine.

Ma questa forse non è la sola causa dell'abbassamento eccessivo del QR durante l'inanizione. Un'altra causa potrebbe stare verosimilmente nella utilizzazione del  $\text{CO}_2$ . L'uso degli isotopi radioattivi ha dimostrato che la  $\text{CO}_2$

## COLOMBO n.6

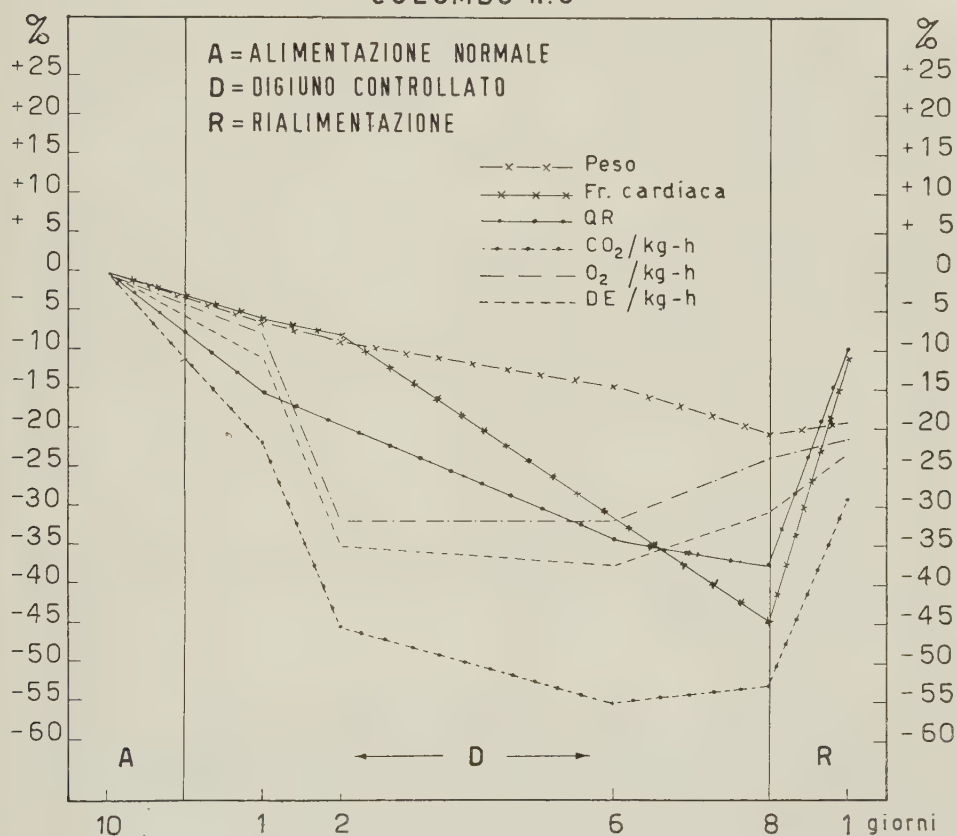


Fig. 2.

può essere usata nei processi metabolici in inaspettata quantità, per esempio nella formazione anaerobica dell'acido malico, fumarico e succinico e può persino essere utilizzata nella sintesi epatica del glicogeno<sup>(7-10)</sup>. Non è improbabile che tali possibilità metaboliche e altre, sempre basate sull'utilizzazione del  $\text{CO}_2$ , compaiano e si esaltino nell'inanizione.

(7) C. H. WERKMAN e H. C. WOOD, «Advances in Enzimology», 2, 135 (1942).

(8) H. A. KREBS, «Ann. Rev. Bioch.», 12, 529 (1943).

(9) H. C. WOOD, «Physiol. Rev.», 26, 198 (1946).

(10) A. BONSIGNORE, «Aggiornamenti di Fisiologia», 1, 123 (1950).



In conseguenza, la notevole diminuzione dell'eliminazione del  $\text{CO}_2$ , osservabile non di rado nel digiuno prolungato, scompagnata da una parallela diminuzione del consumo di  $\text{O}_2$ , sarebbe espressione non di una diminuzione delle ossidazioni, ma dell'assimilazione di  $\text{CO}_2$  da parte dei tessuti dell'animale in inanizione. In questo caso l'abbassamento del QR sarebbe soltanto apparente in quanto non dovuto a modificazione delle combustioni<sup>(11)</sup>.

Una volta ristabilita l'alimentazione, l'organismo affrancato dalla necessità di ricorrere ad insolite biosintesi, si libererebbe dal  $\text{CO}_2$  momentaneamente ritenuto e si spiegherebbe così l'acuto aumento dell'eliminazione del  $\text{CO}_2$ , osservabile all'inizio della rialimentazione, e la brusca elevazione del QR, la quale pure sarebbe soltanto apparente, in quanto anch'essa non dovuta a modificazione delle combustioni.

Ma, tralasciando per ora queste considerazioni, rimane l'indubbio rapporto tra l'insorgenza del disordine cardiaco e i quozienti di combustione protidica. Tale rapporto ci permette forse di riaffermare più validamente l'induzione che in via ipotetica già traemmo nell'altra Nota e cioè che il disordine funzionale del cuore nell'inanizione sarebbe in rapporto col catabolismo protidico e, in base ai dati sinora raccolti, sarebbe l'espressione del disordine nutritivo protidico del cuore. L'alterazione della funzione cardiaca e l'alterazione istopatologica ed istochimica, che sta alla sua base<sup>(2)</sup>, sarebbero la conseguenza della mancata copertura dei bisogni globali del cuore in azoto e forse più particolarmente in azoto differenziato, cioè sotto forma di aminoacidi indispensabili, che l'organismo non potrebbe nè sintetizzare nè porre a disposizione del cuore in quantità sufficiente attraverso il catabolismo protidico degli altri organi o tessuti.

Nelle prossime Note vedremo se è possibile dare qualche prova diretta di ciò.

(11) Acquista qui un particolare significato il ricordare che la strada alle ricerche, che hanno poi condotto alla dimostrazione dell'assimilazione del  $\text{CO}_2$  da parte dei tessuti animali, è stata aperta da Evans, allorquando trovò che proprio il fegato di piccione, partendo dal piruvato, è capace di operare la sintesi degli acidi  $\text{C}_4$  dicarbossilici e dell'acido  $\alpha$ -chetoglutarico, anche in presenza di malonato. Poiché l'unica reazione malonico-resistente conosciuta dalla letteratura per la sintesi degli acidi  $\text{C}_4$  dicarbossilici dall'acido piruvico, è la reazione di fissazione di  $\text{CO}_2$  di Wood e Werkman, il reperto di Evans sta a dire che il fegato di piccione possiede un meccanismo, confermato e precisato poi da ricerche numerose di altri Autori, il quale è capace di operare la carbossilazione del piruvato, analogamente a quanto avviene ad opera dei batteri della fermentazione propionica (Bonsignore).

**Farmacologia.** — *Azione dell'ossitettraciclina e dell'eritromicina sul metabolismo fosforato dello «Staphilococcus aureus».* Nota di PIETRO BENIGNO, ADOLFO PORRO e LORENZO CIMA, presentata (\*) dal Socio E. MENEGHETTI,

Confrontando l'azione dell'ossitettraciclina e dell'eritromicina sulle colture in sviluppo di *Staphilococcus aureus*, abbiamo di recente osservato che questi due antibiotici presentano numerose analogie: essi infatti riducono il consumo di  $O_2$ , rallentano l'accrescimento, inibiscono la divisione e, pur provocando una sensibile battericidia, non modificano l'assunzione di fosforo da parte della cellula batterica (1).

Proseguendo in tale tipo di indagine abbiamo ora studiato alcuni aspetti dell'influenza esercitata da tali antibiotici sulla sintesi o l'accumulo nelle cellule degli acidi nucleinici e della frazione di fosforo organico acido solubile — processi con i quali è strettamente connessa la sintesi delle proteine batteriche (2), (3), (4) — per cercare di approfondire il raffronto delle modalità con cui l'ossitettraciclina e l'eritromicina ostacolano l'accrescimento dello *S. aureus*.

**TECNICA.** — In queste ricerche è stato adoperato lo *Staphilococcus aureus*, ceppo Oxford, coltivato in brodo comune.

Negli esperimenti di controllo e in quelli in cui furono impiegati gli antibiotici (ossitettraciclina — Terramicina Pfizer, Eritromicina Lilly), il terreno, a 38°, fu inoculato con germi di 24 h, separati per centrifugazione dal liquido nutritivo. Dalla coltura, mantenuta in agitazione (66 oscillazioni per minuto), a tempi stabiliti furono prelevati volumi tali da raccogliere la massa di microrganismi necessaria per le singole determinazioni.

Per seguire le variazioni del numero dei germi vivi si impiegò il metodo del conteggio in piastra; le modificazioni della massa batterica (accrescimento) furono stabilite valutando il peso secco a  $105^\circ$  dei microrganismi per cc 100 di coltura.

Per il dosaggio dell'acido ribonucleinico (RNA) eseguito attraverso la determinazione colorimetrica del ribosio liberato per idrolisi a caldo, (colorimetro a cellula fotoelettrica di Hellige, filtro m $\mu$  660), abbiamo seguito

(\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) P. BENIGNO, T. BERTI, L. CIMA, *Antibiotics and Chemotherapy*, 1954 (in corso di stampa).

(2) P. D. MITCHELL, « J. Gen. Microbiol. », 4, 399 (1950).

(3) P. D. MITCHELL, J. MOYLE, « J. Gen. Microbiol. », 5, 421 (1951).

(4) H. CHANTRENNE, *Symposium sur la biogénèse des protéines*, Ed. Sedes, Parigi, 85 (1952).

le indicazioni tecniche di Morse e Carter <sup>(5)</sup>. Per la curva di taratura abbiamo adoperato una preparazione commerciale di RNA.

Per il dosaggio degli acidi nucleinici totali (NA) e dei composti purinici e pirimidinici estraibili con acido tricloroacetico a freddo (« nucleotidi liberi » o Nt), ci siamo serviti della tecnica spettrofotometrica (apparecchio Beckman, modello DU) messa a punto da Mitchell <sup>(2)</sup> e da Mitchell e Moyle <sup>(3)</sup>.

In un altro gruppo di ricerche, che non ci ha però permesso attendibili valutazioni quantitative, abbiamo cercato di riconoscere gli aminoacidi liberi presenti nella cellula batterica, adoperando il metodo cromatografico unidimensionale ascendente su carta Schleicher e Schüll 2043 b (solventi: n-butanolo-acido acetico e fenolo tamponato <sup>(6)</sup>). Gli aminoacidi vennero estratti dalle cellule lavate e seccate a freddo sotto vuoto con acetone al quale era stato aggiunto 1% di HCl 10 N, seguendo le modalità descritte da Boulanger e Biserte <sup>(7)</sup>. Il residuo secco dell'estratto acetone fu ripreso con volumi opportuni di una soluzione acquosa di alcool isopropilico al 10%: cc 1 di tale soluzione corrispondeva a mg 5 (peso secco) della massa batterica usata per l'estrazione. Le macchie del cromatogramma ottenuto con tale tecnica indicano che dalla cellula si possono estrarre numerosi aminoacidi; tra questi abbiamo individuato con sicurezza la glicina, la serina, l'acido glutammico e il gruppo della leucina.

**RISULTATI SPERIMENTALI.** - Il primo gruppo di ricerche è stato dedicato allo studio delle variazioni nella concentrazione in RNA dello *S. aureus* sottoposto all'azione di quantità di ossitettraciclina ( $\gamma$  10/cc) e di eritromicina ( $\gamma$  10/cc) le quali rallentano in modo sensibile l'accrescimento e determinano una considerevole battericidia. Il risultato medio di tre esperimenti, che non differivano sensibilmente l'uno dall'altro, è riassunto nella fig. 1.

Nel corso di queste ricerche noi abbiamo costantemente osservato che la quantità di RNA presente nelle colture di 24 h (confronta la fig. 1) era sempre inferiore a quella misurata al tempo 0. Tale differenza, che risulta anche dai dati di esperimenti analoghi riferiti nei lavori di Morse e Carter <sup>(5)</sup> e di Mitchell e Moyle <sup>(3)</sup>, è verosimilmente da mettere in rapporto con il fatto che dal momento dell'*inoculum*, che veniva effettuato in terreno a 38°, a quello del prelievo del tempo 0, passavano circa 5 minuti, necessari per rendere omogenea la sospensione e per misurare i volumi di liquido prelevati per la determinazione dello RNA e del peso secco.

Da queste prove risulta che l'accumulo di RNA nelle cellule è molto rapido nelle prime fasi dello sviluppo fisiologico e che esso non è sensibilmente influenzato dalla presenza di quantità di ossitettraciclina e di eritromicina che esplicano una notevole azione antibatterica; si può quindi concludere che l'aumento nella concentrazione del fosforo totale (PT), ante-

(5) M. L. MORSE, C. E. CARTER, « J. Bact. », 58, 317 (1949).

(6) H. K. BERRY, L. CAIN, « Arch. Biochem. », 24, 179 (1949).

(7) P. BOULANGER, G. BISERTE, « Bull. Soc. Chim. Biol. », 31, 696 (1949).

cedentemente osservato in analoghe condizioni sperimentali<sup>(2)</sup>, è attribuibile, almeno in parte, alla sintesi dello RNA.

È però da rilevare che proprio nel primissimo periodo di sviluppo dello *S. aureus* si ha anche un rapido aumento della frazione del P organico solubile a freddo nell'acido tricloroacetico che, secondo Mitchell e Moyle<sup>(3)</sup>, è dovuta alla sintesi o all'accumulo nella cellula dei nucleotidi liberi o dei « frammenti di acidi nucleinici ». Ci è pertanto sembrato interessante approfondire il raffronto dell'azione esercitata dai due antibiotici, estendendola

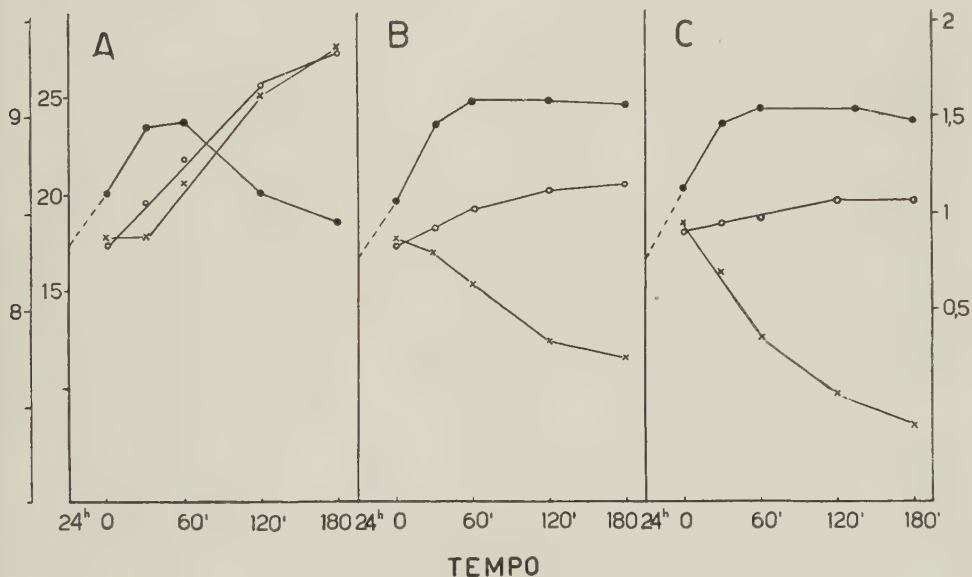


Fig. 1. — *Inoculum* da colture di *S. aureus* di 24 h.

Ordinate: a sinistra all'esterno, log del numero dei germi per cc x—x—x; all'interno, RNA % del peso secco ●—●—●; a destra, log del peso secco delle cellule di cc 100 di brodo C—C—O; A = controlli; B = germi coltivati in presenza di ossitettraciclina ( $\gamma$  10/cc); C = germi coltivati in presenza di eritromicina ( $\gamma$  10/cc).

allo studio di tale processo, seguito con il metodo spettrofotometrico messo a punto dagli autori citati.

I risultati di questi esperimenti sono riferiti nella fig. 2. In quest'istogramma la curva dello NA corrisponde alle variazioni, in funzione del tempo, nella concentrazione percentuale, riferita al peso secco della massa batterica, di tutte quelle sostanze di natura purinica e pirimidinica che assorbono a 260 m $\mu$ ; la curva dello Nt corrisponde alla frazione estraibile con acido tricloroacetico a freddo; sottraendo quest'ultimo valore allo NA si ottiene la concentrazione degli acidi nucleinici che non si estraggono con l'acido tricloroacetico a freddo (curva NA-Nt). Infine negli stessi grafici sono riportate le variazioni del rapporto Nt/NA-Nt in funzione del tempo.

I risultati di questi esperimenti confermano che anche quando sono presenti gli antibiotici, nelle prime fasi dello sviluppo si ha un aumento nella



concentrazione degli acidi nucleinici ed esiste in conseguenza una stretta analogia tra l'andamento delle curve che esprimono le variazioni dello RNA (fig. 1) e dello NA-Nt (fig. 2)<sup>(8)</sup>. Viene però alterato l'equilibrio tra gli NA e gli Nt presenti nella cellula; infatti, mentre nei controlli la concentrazione in Nt è massima all'inizio dello sviluppo e poi rapidamente decresce con l'aumentare degli acidi nucleinici (NA-Nt), nelle prove nelle quali sono presenti l'ossitettraciclina e l'eritromicina, la concentrazione in Nt, specialmente con il primo dei due farmaci, rimane elevata e in conseguenza il rapporto Nt/NA-Nt si mantiene alto. A ciò aggiungasi che, con tutta verosi-

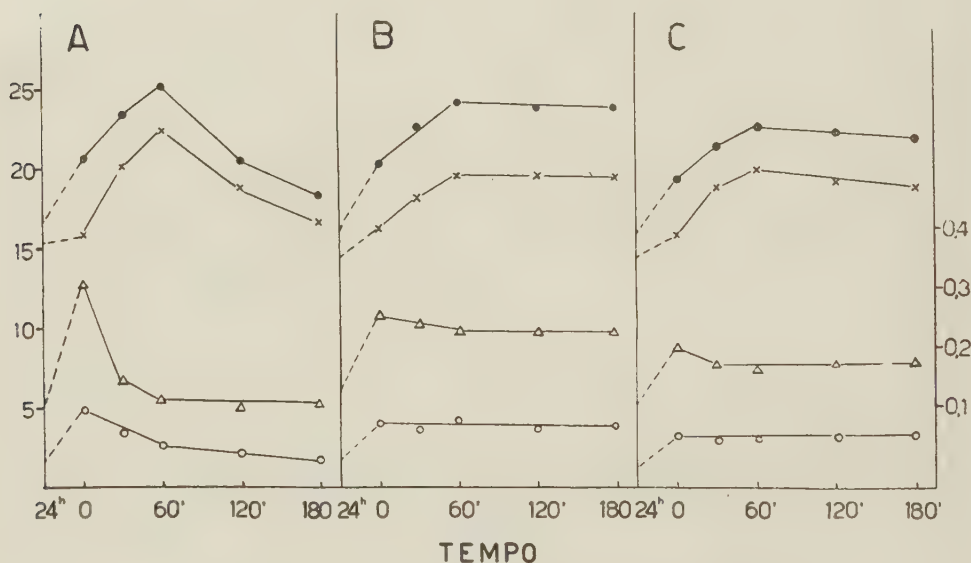


Fig. 2. - *Inoculum* da colture di *S. aureus* di 24 h.

Ordinate: a sinistra, % del peso secco della massa batterica dello NA ●—●—●, Nt ○—○—○, NA-Nt ×—×—×; a destra, rapporto Nt NA-Nt Δ—Δ—Δ. A = controlli; B = germi coltivati in presenza di ossitettraciclina ( $\gamma$  10/cc); C = germi coltivati in presenza di eritromicina ( $\gamma$  10, cc).

miglianza, si ha anche una variazione nella composizione dei nucleotidi liberi, poiché dall'analisi spettrofotometrica risulta che, mentre nei controlli il massimo di assorbimento durante la fase logaritmica di sviluppo si ha a

(8) Un raffronto quantitativo tra i valori dello RNA e quelli dello NA-Nt non è possibile perché per le curve di taratura dello RNA abbiamo usato una preparazione commerciale di acido ribonucleinico che conteneva delle impurità. Noi abbiamo comunque osservato costantemente che i valori della concentrazione massima di NA-Nt erano superiori nei controlli e lievemente inferiori nelle colture trattate con gli antibiotici, mentre l'inverso si osserva nel caso dello RNA. Pur essendo difficile l'interpretazione di tale differenza, forse imputabile al fatto che le variazioni di dimensione del germe nel corso dello sviluppo possono influire sui valori misurati allo spettrofotometro (si veda il lavoro di Mitchell e Moyle<sup>(3)</sup>), rimane il fatto che né l'ossitettraciclina, né l'eritromicina ostacolano l'aumento nella concentrazione degli acidi nucleinici cellulari.

260 m $\mu$ , nelle prove in cui fu aggiunta l'ossitettraciclina esso rimane costantemente a 265 m $\mu$  e in quelle nelle quali si è adoperata l'eritromicina tende a spostarsi ulteriormente verso il rosso (vedi tabella I).

TABELLA I.

« *Inoculum* » da colture di « *S. aureus* » di 24 h. Valori della densità ottica della frazione di P organico solubile in acido tricloroacetico a freddo estratta da mg 1 di peso secco di cellule.

m $\mu$	controllo						ossitettraciclina					eritromicina				
	24 h	0	30'	60'	120'	180'	0	30'	60'	120'	180'	0	30'	60'	120'	180'
275	45	75	48	42	39	37	120	115	122	85	107	72	77	88	80	90
270	63	110	78	70	50	57	141	141	149	106	136	92	<b>95</b>	<b>110</b>	<b>112</b>	125
265	<b>66</b>	<b>115</b>	85	75	55	<b>64</b>	<b>143</b>	<b>144</b>	<b>151</b>	<b>125</b>	<b>146</b>	<b>96</b>	<b>95</b>	109	<b>112</b>	<b>127</b>
260	62	100	<b>86</b>	<b>77</b>	<b>59</b>	59	132	137	147	113	142	90	90	105	102	115
255	55	90	77	71	55	55	124	120	128	104	128	80	75	88	90	103
250	30	76	52	63	48	44	105	101	106	75	91	59	50	65	70	88

Queste variazioni dei massimi di assorbimento osservate in presenza dei due antibiotici starebbero a indicare una modificazione nello equilibrio tra purine e pirimidine libere e i corrispondenti nucleosidi e nucleotidi nella direzione di un aumento della concentrazione: nucleosidi più nucleotidi <sup>(3)</sup>.

Le ricerche sul contenuto in aminoacidi liberi endocellulari hanno dimostrato che le macchie del cromatogramma messe in evidenza nei vari periodi dello sviluppo avevano una disposizione analoga sia nei controlli che nelle prove in cui erano presenti i due antibiotici. Nessun giudizio possiamo invece dare sulla variazione nella concentrazione poiché il metodo adoperato non ci ha permesso una attendibile valutazione quantitativa.

CONCLUSIONI. — Gli esperimenti riferiti in questa Nota avvalorano le osservazioni antecedenti dalle quali risulta l'esistenza di una certa analogia tra le modalità con cui l'ossitettraciclina e l'eritromicina esplicano la loro azione sullo *S. aureus*, poiché dimostrano che l'aumento della percentuale in PT della massa protoplasmatica, messo in evidenza adoperando concentrazioni attive dei due antibiotici <sup>(1)</sup>, è, almeno in parte, da mettere in rapporto con una maggiore concentrazione in NA alla quale si accompagna una modificazione dell'equilibrio tra NA e Nt. I due farmaci inoltre non provocano variazioni qualitative nel contenuto in aminoacidi liberi endocellulari.

Più difficile è valutare il significato che questi dati possono avere nella interpretazione dell'intimo meccanismo con cui i due composti agiscono sui germi. Essi non inibiscono la rapida sintesi di RNA che si verifica nelle prime fasi dello sviluppo e, nel caso della ossitetraciclina, i nostri dati concordano con le vedute di Gale<sup>(9)</sup>,<sup>(10)</sup>: questo autore infatti classifica l'ossitetraciclina tra gli antibiotici che ostacolano la sintesi proteica senza alterare quella degli acidi nucleinici. È però da rilevare che, se è vero che si può creare uno sfasamento tra questi due processi - ne fanno fede tra l'altro quegli esperimenti dai quali risulta che aggiungendo alle colture in sviluppo di *Proteus* del cobalto-ione si ha un arresto dell'accrescimento mentre non viene praticamente influenzata la sintesi dello RNA<sup>(11)</sup>,<sup>(12)</sup> - oggi si tende ad ammettere che gli acidi nucleinici intervengano nella sintesi delle proteine<sup>(4)</sup>. Certo la relazione tra questi due aspetti del biochimismo cellulare non è chiara, tuttavia alcuni dati sperimentali porterebbero a concludere che l'influenza esercitata dalla ossitetraciclina sul metabolismo possa essere messa in rapporto con un blocco nella utilizzazione delle riserve di acido nucleinico<sup>(13)</sup>, con una interferenza nei processi di fosforilazione che intervengono nell'assimilazione<sup>(14)</sup>,<sup>(15)</sup> o ancora con la diminuzione di legami fosforici ricchi di energia<sup>(16)</sup>.

Alla luce di queste considerazioni possono acquistare significato i nostri dati dai quali risulta che mentre nei controlli i fenomeni di accrescimento si accompagnano a una diminuzione dello Nt e a un probabile aumento relativo delle purine e pirimidine, nei germi trattati con i due antibiotici la concentrazione in Nt permane alta per tutta la durata dell'esperimento e forse in essa prevalgono i nucleosidi e i nucleotidi: questi fenomeni potrebbero essere in rapporto con la minore utilizzazione di legami fosforici ricchi in energia.

(9) E. F. GALE, *Symposium sur le mode d'action des antibiotiques*, Ed. Sedes, Parigi, 5 (1952).

(10) E. F. GALE, « J. Gen. Microbiol. », 8, VII proc. (1953).

(11) H. B. LÉVY, E. T. SKUTCH, A. L. SCHADE, « Arch. Biochem. », 24, 199 (1949).

(12) H. B. LÉVY, E. T. SKUTCH, A. L. SCHADE, « Arch. Biochem. », 24, 206 (1949).

(13) R. PRATT, J. DUFRENOY, « Texas Repts. Biol. and Med. », 9, 76 (1951).

(14) F. BERNHEIM, W. E. DE TURK, « J. Pharmacol. Exptl. Therap. », 105, 246 (1952).

(15) A. KARP, J. C. SNYDER, « Proc. Soc. Exptl. Biol. Med. », 79, 216 (1952).

(16) Y. MIURA, Y. NAKAMURA, H. MATSUDAIRA, T. KOMEIJI, « Antibiotics and Chemotherapy », 2, 152 (1952).

**Microbiologia.** — *I fagi dei micobatteri patogeni. Un nuovo fago attivo sul tubercolare umano: «Phagus fromani» n. sp.<sup>(\*)</sup>*. Nota preliminare di GIUSEPPE PENSO e MARIO PRINCIVALLE, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. VERNONI.

In questi ultimi anni siamo riusciti a indurre uno dei nostri fagi, il *Phagus lacticola* su due specie patogene di micobatteri:

Il *Mycobacterium* sp. Battaglini è un acido resistente patogeno molto vicino al tubercolare aviario ma non del tutto identificabile con questo, particolarmente per il fatto che questo ultimo non è attaccato dal *Phagus lacticola* var. Battaglini. Patogeneticamente il *Mycobacterium* sp. Battaglini dà nelle cavia, conigli e suini lesioni istologiche analoghe a quelle del tubercolare aviario pur non essendo patogeno per gli uccelli (fatto di non eccessiva importanza, giacché molti tubercolari aviari mantenuti in coltura perdono, col tempo, questa proprietà); metabolicamente il Battaglini differisce leggermente dagli aviari. Per queste sue varie particolari caratteristiche non abbiamo ancora classificato con esattezza questa specie della quale possediamo più ceppi: uno di origine umana, uno da cavia morta spontaneamente e due da collezione. Il suo studio procede di concerto con quello dei tubercolari aviari e sarà fonte di una prossima monografia. Fin da tempo presentammo a questa Accademia (seduta del 14 maggio 1949) una Nota preventiva sul ceppo in questione.

Il *Phagus lacticola* var. Battaglini — che morfologicamente è identico al fago d'origine — ha permesso a uno di noi (Penso) di studiare il ciclo di sviluppo di un fago nell'interno della cellula ospite.

Il *Mycobacterium minetti* è un acido resistente patogeno sul quale pubblicammo una Nota preventiva a questa Accademia (seduta dell'8 dicembre 1951) e la monografia definitiva nei « Rendiconti dell'Istituto Superiore di Sanità » (vol. XV, anno 1952, p. 491-548).

Il *Phagus lacticola* var. *minetti* è stato già ampiamente illustrato nello studio sulla « demolizione fagica del *Myc. minetti* » (« Rend. Istituto Sup. di Sanità », vol. XV, anno 1952, p. 544). Anche questo fago conserva la morfologia originaria del *Phagus lacticola*.

Recentemente il dott. Froman, dell'Olive View Sanatorium negli Stati Uniti, isolava un nuovo fago attivo sui micobatteri patogeni ed inviava gentilmente a noi tale fago perché lo studiassimo.

Abbiamo potuto constatare come tale fago attacchi molti micobatteri e precisamente il *Myc. tuberculosis* var. *hominis* anche in ceppi di recente

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Microbiologia dell'Istituto Superiore di Sanità.

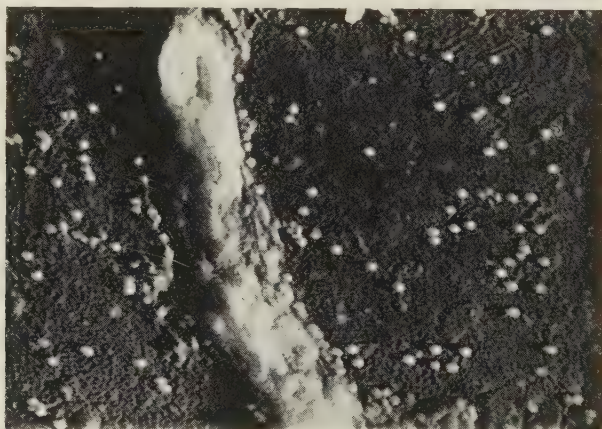
(\*\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.



isolamento, il *Myc. tuberculosis* var. *bovis* (su tre ceppi di collezione), il *Myc. avium*, il *Myc. smegmatis*, il *Myc. sp.* ceppo Rabinowitsch. Negativo sul *Myc. minetti*, *Myc. sp.* Battaglini, *Myc. phlei*.

Il fago in questione, studiato al microscopio elettronico, si mostra notevolmente diverso dagli altri fagi attivi sui micobatteri; esso è, infatti, molto più piccolo degli altri, ha il corpo leggermente a oliva ed il ciglio cortissimo. Le sue dimensioni sono di circa  $\mu 0,03 \times 0,02$  per il corpo e di circa  $\mu 0,1$  per la lunghezza del ciglio.

Le placche prodotte dal fago variano con la specie su cui agisce: molto grandi per il tubercolare umano e in continua evoluzione sino alla lisi di



*Mycobacterium tuberculosis* var. *hominis*, ceppo H 37 RV, lisato da *Phagus fromani* (preparato metallizzato al cromo,  $\times 20.000$ , controtipo).

tutta la superficie di coltura; sono molto più piccole se prodotte sull'aviarico o su altri micobatteri.

Il fago è molto virulento.

Per studiarlo abbiamo impiegato la seguente tecnica: uno strato di agar glicerinato sormontato da un secondo strato di agar patata molle (terreno di Penso) il tutto mantenuto in apposite fiaschette piatte e che permettessero una lunga permanenza in termostato.

La lisi del tubercolare umano comincia ad essere visibile dopo 8-15 giorni.

Proseguiamo intanto lo studio del fago in questione per conoscerne il completo ciclo biologico, le caratteristiche immunologiche e la sua morfologia.

Nella convinzione di essere di fronte a una nuova specie fagica proponiamo per essa il nome di *Phagus fromani* in onore del dott. Froman che ci ha gentilmente inviato il materiale da studiare.

**Biologia.** — *Differenziazione e accrescimento della cartilagine di abbozzi scheletrici studiati con l'impiego del radiosolfo*<sup>(\*)</sup>. Nota di RODOLFO AMPRINO, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. LEVI.

Recenti ricerche sul destino del radiosolfo iniettato come solfato di sodio, hanno stabilito che nei mammiferi nel periodo prenatale e postnatale il solfo si fissa soprattutto alla cartilagine<sup>(1)</sup>, essendo, con molta verosimiglianza, incorporato nella sintesi del solfato di condroitina del condromucoide<sup>(2)</sup>, per intervento di enzimi<sup>(3)</sup>; dai dati di Boström e Månsson risulterebbe escluso che il radio solfato possa introdursi nella sostanza fondamentale della cartilagine per un semplice processo fisico di scambio ionico. La localizzazione del radiosolfo è stata precisata con la tecnica autografica di contrasto; la fissazione si manifesta, oltre che nella cartilagine, in quantità minore, ma sempre ragguardevole, in altri tessuti ed organi, nei quali si produce sintesi di mucopolisaccaridi solforati: parete delle arterie, tessuto fibroso della sclerotica e della cornea, cellule mucipare dell'intestino, cellule granulose basofile del connettivo, ecc.<sup>(4)</sup>. Tuttavia non è stato ancora compiuto uno studio della distribuzione del radiosolfo in rapporto alle modificazioni strutturali che si manifestano nell'accrescimento di tessuti ed organi, nei quali ha luogo appunto un elevato metabolismo di mucopolisaccaridi solforati; è presumibile che si riuscirebbero in tal modo ad obbiettivare variazioni della entità e della velocità della sintesi di composti solforati in parti diverse di un determinato tessuto od organo. Ad esempio, nelle cartilagini, nelle quali i processi di accrescimento si estendono per un lungo periodo della vita postnatale, si potrebbero forse chiarire dei particolari ancora incerti, relativi alle variazioni di struttura e di tingibilità della sostanza fondamentale ed ai rapporti fra accrescimento apposizionale ed accrescimento interno (intusseppzionale). Infatti già dai risultati autoradiografici di Dziewiatkowski e di Davies e Young<sup>(5)</sup> risulterebbe che il metabolismo del solfato di con-

(\*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia umana normale dell'Università di Torino.

(\*\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) D. D. DZIEWIATKOWSKI, R. E. BENESCH e R. BENESCH, « J. biol. Chem. », 178, 931 (1949); L. L. LAYTON, « Cancer. », 3, 725 (1950); D. CAMPBELL e B. H. PERSSON, « Experientia », 7, 304 (1951); H. BOSTRÖM, « J. biol. Chem. », 196, 477 (1952); H. BOSTRÖM, E. ODEBLAD e U. FRIBERG, « Arch. Bioch. a. Biophys. », 38, 283 (1952); U. FRIBERG e N. R. RINGERTZ, jr. « Experientia », 10, 67 (1954).

(2) D. D. DZIEWIATKOWSKI, « J. Biol. Chem. », 189, 187 (1951); H. BOSTRÖM e S. ÅQVIST, « Acta Chem. Scand. », 6, 1557 (1952).

(3) H. BOSTRÖM e B. MÅNSSON, « J. biol. Chem. », 196, 483 (1952).

(4) E. ODEBLAD e H. BOSTRÖM, « Acta pathol. et microb. Scand. », 31, 339 (1952); H. BOSTRÖM e E. ODEBLAD, « Anat. Rec. », 115, 505 (1953).

(5) D. D. DZIEWIATKOWSKI, « J. exp. Med. », 93, 451 (1951); 95, 489 (1952); D. V., DAVIES, e L. YOUNG, « J. Anat. », 88, 174 (1954).

droitina è più elevato in quelle parti della cartilagine jalina degli abbozzi scheletrici, le quali devono essere sostituite da tessuto osseo: cartilagine di coniugazione, strato interno della cartilagine epifisaria a contatto con il nucleo di ossificazione endocondrale. Dziewiatkowski suppone che l'intensa sintesi di solfato di condroitina in queste regioni delle cartilagini destinate al riassorbimento sia in qualche modo connessa alla calcificazione del tessuto osseo, il quale sostituisce la cartilagine.

Mi sono proposto pertanto di analizzare con metodo autoradiografico di contrasto la distribuzione del radiosolfo nella cartilagine dei segmenti scheletrici in rapporto alla struttura istologica, in embrioni, a partire dalle fasi di blastema precartilagineo con sostanza fondamentale scarsa ed acidofila fino alla sostituzione della cartilagine con tessuto osseo.

Ho instillato goccia a goccia sull'area extraembrionaria dell'uovo di pollo (vasi vitellini o vasi della corioallantoide) 0.25 oppure 0.50 cc. di una soluzione di solfato di sodio con S 35 (attività totale di 5 e, rispettivamente, 10  $\mu$ C.). In tal modo, il solfato radioattivo è assunto rapidamente in circolo; una parte passa nell'albume, nel tuorlo e nel liquido amniotico. L'attività dell'albume e del tuorlo diminuisce progressivamente nei giorni successivi al trattamento senza però ridursi a zero; si deve quindi ammettere che una certa quantità di radiosolfato rimane a disposizione dei tessuti dello embrione per parecchi giorni dopo un singolo trattamento. Trattando serie di embrioni rispettivamente del 4°, 5°... 10° giorno ecc. e sacrificando esemplari delle singole serie a distanza varia di tempo dall'instillazione (da 2-12 ore fino a 10-12 giorni), è possibile seguire nell'autoradiografie la distribuzione della sintesi del solfato di condroitina nei vari momenti della differenziazione e dell'accrescimento degli abbozzi scheletrici. Il materiale fu fissato in miscela di Rossmann a 0°C, incluso in paraffina; le sezioni, attaccate col metodo giapponese a vetrini coprioggetti flessibili, sparaffinate e portate fino all'alcool a 70°, essiccate a temperatura ordinaria, erano esposte sotto pressione contro l'emulsione di lastre Ilford Nuclear Research C<sub>2</sub>, con emulsione spessa 25  $\mu$ .

Tralasciando alcuni dati sui quali ho riferito in altra sede <sup>(6)</sup>, mi limiterò a ricordare che la fissazione del radiosolfo è di grado elevato già in embrioni di 4-5 giorni in quelle parti dei blastemi mesenchimali che sono destinate a differenziarsi in precartilagine e in cartilagine fra il 6° e l'8° giorno. L'entità della fissazione del radiosolfato aumenta considerevolmente in tali regioni, parallelamente alla comparsa di una sempre più spiccata basofilia della sostanza fondamentale, cioè quando la precartilagine si trasforma in cartilagine vera e propria ed il condromucoide viene a mascherare progressivamente le fibre collagene della sostanza intercellulare. La radioattività risulta intensissima in tali cartilagini nel corso del 7° ed 8° giorno; la sintesi di solfato di condroitina deve prodursi molto rapidamente, perché si otten-

(6) R. AMPRINO, «C. r. Ass. Anat.», 41 Réun., Gênes 1954 (in stampa); «Experientia», 10, 1954 (in stampa).



gono immagini di forte contrasto già dopo poche ore di trattamento dello embrione con radiosolfato (da 2 a 10 ore). Paragonando le autografie con le sezioni colorate con i comuni metodi, risulta che l'entità della radioattività varia in stretto rapporto con variazioni della basofilia e della metacromasia della sostanza fondamentale.

Come è noto, i processi di accrescimento e di differenziazione, caratterizzati dall'aumento numerico delle cellule per divisione, inoltre dall'incremento della sostanza fondamentale e della sua basofilia, non si manifestano in modo uniforme nelle varie regioni di un determinato abbozzo scheletrico, ma procedono secondo un piano ben definito e con ritmo diverso nei segmenti corrispondenti alla futura diafisi, alle metafisi ed alle epifisi. Le parti centrali

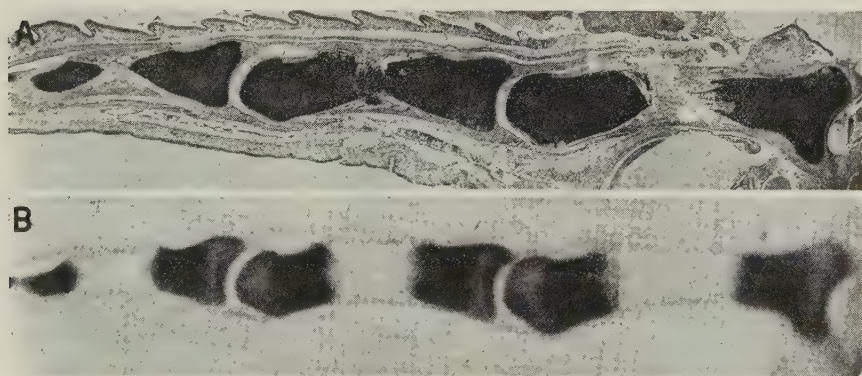


Fig. 1. — Falangi dell'arto pelvico di embrione di pollo di 14 giorni, 10 ore dopo trattamento con radiosolfato. A, sezione colorata; B, autoradiografia della sezione. Ingr. 13×. La regione centrale della diafisi cartilaginea in via di ossificazione, non risulta radioattiva; intensa la radioattività delle porzioni distali della diafisi e delle metafisi. Minore e non uniforme radioattività delle epifisi.

dell'abbozzo cartilagineo delle ossa lunghe presentano costantemente un grado di differenziazione maggiore che le epifisi; probabilmente in rapporto con tale circostanza, anche la sostituzione con tessuto osseo segue un ordine topografico preciso, dal centro della diafisi estendendosi verso le metafisi, mentre le epifisi si conservano cartilaginee per un periodo di tempo assai maggiore.

La distribuzione del radiosolfato, la quale è funzione, evidentemente, di uno solo dei processi di accrescimento accennati — cioè della sintesi di condromucoide — presenta pure differenze cospicue da regione a regione. Per tale studio sono opportuni gli esperimenti di breve durata, cioè l'analisi autoradiografica di abbozzi cartilaginei di embrioni sacrificati a distanza di poche ore dall'instillazione del radiosolfato; in queste condizioni infatti, soltanto quelle parti nella cartilagine, nelle quali l'aumento del condromucoide avviene con grande intensità, producono una netta impressione sulla lastra; nelle altre regioni, la densità dell'immagine autoradiografica è tanto



meno intensa quanto più scarsa è stata, durante il periodo di trattamento, l'entità della neoproduzione di acido condroitinsolforico.

Risulta dunque che, mentre in un primo tempo l'assunzione di radiosolfo si manifesta per tutta l'estensione dell'abbozzo cartilagineo ma più intensamente a livello della diafisi, essa diminuisce progressivamente in quest'ultima regione e si riduce ad un valore assai basso quando si depone l'astuccio osseo pericondrale ed inizia la distruzione della cartilagine diafisaria; processo che negli uccelli non è preceduto, come invece nei mammiferi, da calcificazione della matrice cartilaginea. Da questo periodo e per un certo tempo, il radiosolfo si deposita in maggior quantità nelle regioni metafisarie e, in grado assai minore, a livello delle epifisi (fig. 1). Nelle teste articolari del-

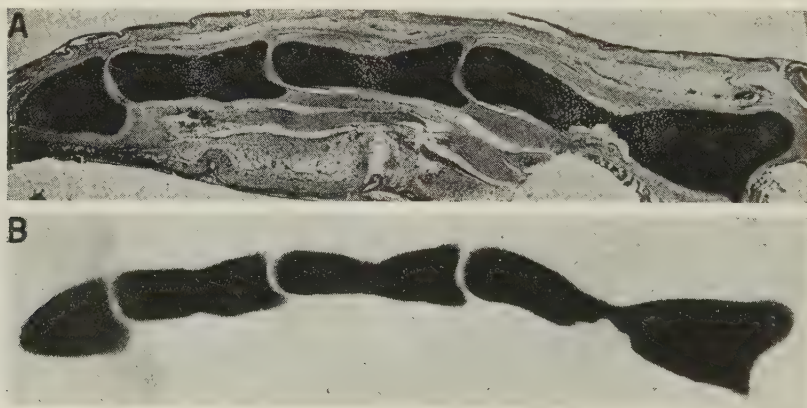


Fig. 2. - Falangi dell'arto pelvico di embrione di pollo di 14 giorni. 5 giorni dopo trattamento con radiosolfato. A, sezione colorata; B, autografia della sezione. Ingr. 19 $\times$ . Intensa radioattività degli abbozzi cartilaginei in tutta la loro estensione. Non si apprezzano nella stampa positiva le piccole differenze di radioattività fra diafisi ed epifisi, che risultano invece nella lastra autoradiografica.

l'omero e del femore, in particolare, si apprezza nelle autoradiografie un brusco passaggio fra l'attività modesta delle epifisi e quella assai maggiore della metafisi; passaggio che corrisponde all'esistenza di una netta demarcazione fra la struttura istologica di queste due regioni: sostanza fondamentale più abbondante e più intensamente basofila nella metafisi in confronto alla epifisi.

Invece, negli esperimenti di lunga data, cioè quando gli embrioni vengono sacrificati a distanza di 5-10 giorni dal trattamento con radiosolfo, le differenze nella distribuzione della radioattività non sono così appariscenti o tendono a cancellarsi (fig. 2); in queste condizioni, si apprezza infatti per così dire, il risultato della somma algebrica delle differenze di sintesi di solfato di condroitina che si succedono nelle singole regioni di un determinato segmento scheletrico. Però anche in questi casi, la radioattività risulta in genere più spiccata nella porzione diafisaria e metafisaria che nelle epifisi;

e, fatto di un certo interesse, quando ha luogo la sostituzione della cartilagine diafisaria con tessuto osseo, i residui di cartilagine, i quali persistono per qualche tempo aderenti alla faccia interna dell'astuccio pericondrale o in seno al cavo midollare, conservano un'elevata radioattività finché tali frammenti non scompaiono in conseguenza del riassorbimento (fig. 3); essi corrispondono a parti della cartilagine nelle quali si era prodotta sintesi di solfato di condroitina dal primo abbozzarsi della sostanza fondamentale fino al momento in cui si forma l'astuccio pericondrale.

Un'analoga corrispondenza fra processi di accrescimento analizzabili istologicamente, ed entità dell'assunzione di radiosolfato, si manifesta anche, *mutatis mutandis*, nei segmenti scheletrici di mammiferi (cavia e ratto), di



Fig. 3. — Metatarsi di embrioni di pollo di 14 giorni. 10 giorni dopo trattamento con radiosolfato. A, sezione colorata; B, autoradiografia della sezione. Ingr. 11 X. Intensa radioattività dei frammenti di cartilagine diafisaria, temporaneamente risparmiati dal processo di ossificazione endocondrale; attività di grado più lieve e non uniforme delle regioni metafisarie ed epifisarie.

cui ho esaminato feti, individui di poche settimane di vita e soggetti adulti. Sempre ho riscontrato uno stretto parallelismo fra basofilia della sostanza fondamentale ed entità dell'assunzione di radiosolfo. Come già Dziewiatkowski e Davies e Young avevano messo in luce, la cartilagine di coniugazione fra diafisi ed epifisi è costantemente più radioattiva dopo trattamento con radiosolfato, che la cartilagine epifisaria. Differenze sempre connesse al diverso grado di basofilia, si rintracciano in strati diversi della cartilagine di coniugazione e della cartilagine articolare: in quest'ultima, l'attività maggiore si manifesta nello strato in più diretto rapporto con il tessuto osseo ed il midollo. Anche nelle cartilagini laringee e tracheali, nelle cartilagini costali di ratti prossimi al termine dell'accrescimento, la radioattività è assai maggiore nelle regioni superficiali adiacenti al pericondrio, regioni nelle quali si produce accrescimento apposizionale — e quindi sintesi di condromucoide — nel periodo postnatale.

**Biologia.** — *Osservazioni citologiche e citochimiche sulla oogenesi di « Mytilus edulis » L.* <sup>(\*)</sup>. Nota di LEA URBANI-MISTRUZZI e GIUSEPPE SCOLLO-LAVIZZARI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

I problemi citochimici della oogenesi sono stati oggetto di numerose ricerche tra le quali quelle eseguite nel nostro Istituto sugli acidi nucleici negli oociti in crescita. Particolarmente studiati in questi lavori sono stati i rapporti tra acido ribonucleico e determinate formazioni citoplasmatiche quali le fasce vitellogene, nuclei vitellini, ecc. <sup>(1)</sup>.

Cotronei (1910-1911) <sup>(2)</sup> nei suoi studi sull'oocite in crescita di *Antedon rosacea* aveva sostenuto che le formazioni basofile citoplasmatiche che si organizzano nella costituzione della fascia vitellogena fossero indice dei rapporti tra nucleo e citoplasma nelle attività metaboliche che precludono alla sintesi del vitello.

L'estensione delle osservazioni di Cotronei ad altri materiali e lo studio citochimico hanno mostrato che le fasce vitellogene ed i nuclei vitellini, pur nella loro diversa morfologia inerente alle varie specie animali, sono unificati dalla presenza, almeno in qualche zona, di ARN; il che dà una convalida citochimica alla ipotesi del loro intervento nella sintesi del vitello.

Che l'acido ribonucleico raggiunga il massimo di concentrazione nell'ooplasma nelle fasi precedenti la comparsa delle prime sferule di tuorlo è un fenomeno ormai generalmente accettato, e le osservazioni qualitative e i dosaggi quantitativi eseguiti concordano nel mostrare questo risultato <sup>(3)</sup>. Le fasce vitellogene che contengono sempre una quantità di RNA superiore a quella dell'ooplasma sarebbero, perciò, secondo l'idea di Cotronei, degli indicatori dei rapporti metabolici che si svolgono prima e durante la vitellogenesi tra nucleo e citoplasma. Dato il ruolo generalmente attribuito all'acido ribonucleico nei fenomeni di sintesi, il fatto che le fasce vitellogene presentino questo composto, autorizza a pensare che esse intervengano nella sintesi del tuorlo.

Gli ovai di *Mytilus edulis* Linn. costituiscono un materiale molto interessante per questo genere di osservazioni sulla oogenesi, e i primi risultati ottenuti sono esposti nella presente Nota.

Nonostante si tratti di materiale molto comune, non abbiamo trovato, nella letteratura recente, dati inerenti alla citochimica della vitellogenesi, ma solamente dei lavori riguardanti lo sviluppo delle gonadi, le modificazioni sessuali stagionali, la deposizione delle uova e l'inversione del sesso

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » della Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) E. URBANI, « Riv. di Biol. », 47, 331 (1949).

(2) G. COTRONEI, « Boll. Soc. Nat. Napoli », 24, 155 (1910) e « Arch. Zool. », 5, 41, (1911).

(3) E. URBANI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 14, 559 (1953) e 15, 304 (1953).



nei Lamellibranchi in genere (Loosanoff 1942, Coe e Turner 1938)<sup>(4)</sup>,<sup>(5)</sup>. Altri lavori hanno come oggetto la fecondazione e lo sviluppo delle uova di *Mytilus* (Berg. 1950, Berg e Kutzky 1951)<sup>(6)</sup>,<sup>(7)</sup>.

Esistono invece, numerose ricerche citochimiche sulla oogenesi di altri molluschi, tra le quali ricordiamo quelle di Bretschneider sulla *Lymnaea* (1946)<sup>(8)</sup>, Gabe su *Pterotrachea mutica* (1950)<sup>(9)</sup>, Gabe e Prenant sui Polyplacofori (1949)<sup>(10)</sup>, Arvy su *Lymnaea* e su *Dentalium* (1949)<sup>(11)</sup>, Serra e Lopes su alcune specie di *Helix* (1945)<sup>(12)</sup>, Ranzoli su *Patella* (1953)<sup>(13)</sup>.

Meritano inoltre di essere ricordati i lavori citologici sull'ovaio dei Lamellibranchi di Retzius (1910-1914)<sup>(14)</sup>, nei quali è studiata la struttura del protoplasma di *Modiola*, *Cyprina* e *Pecten* e viene messo in particolare evidenza il comportamento dei nucleoli, dei cromosomi e del condrioma durante l'oogenesi.

L'ovaio di *Mytilus edulis* Linn. (Coe 1943)<sup>(15)</sup> è costituito da follicoli che si diramano per il corpo dell'animale e sono prevalentemente costituiti da cellule gametogene.

I follicoli sono in rapporto con tessuto connettivale vescicolare la cui quantità è in relazione con lo sviluppo della gonade, nel senso che quanto più la gonade è matura, tanto meno tessuto vescicolare si trova interposto tra i vari follicoli e viceversa, per cui si è attribuita una funzione nutritiva alle cellule vescicolari (Roughley 1933, Coe e Turner 1938, Loosanoff 1942)<sup>(16)</sup>,<sup>(17)</sup>.

Quando le uova mature sono eliminate, i follicoli si retraggono ed i gameti che restano vengono attaccati da fagociti che invadono l'organo, cosicché, in breve tempo, il lume dei follicoli si riduce fino a scomparire mentre il tessuto connettivo vescicolare torna a svilupparsi.

Le ovaie di *Mytilus edulis* Linn., da noi studiate, sono state prelevate durante i mesi di marzo-aprile-maggio, e, mentre alcune erano nella massima attività oogenetica, altre avevano da poco eliminato le uova, per cui, nell'organo, si sono osservati oociti, ricchi di tuorlo, con evidenti segni di degenerazione, ed altri, ancora aderenti alla parete follicolare, più piccoli, ed altri ancora che erano in avanzato stato di regressione funzionale perché i follicoli erano molto ridotti con oociti piccoli alle pareti.

(4) V. L. LOOSANOFF, « Biol. Bull. », 82, 195 (1942).

(5) W. R. COE e H. J. TURNER, « Journ. Morph. », 62, 91 (1938).

(6) W. E. BERG, « Biol. Bull. », 98, 128 (1950).

(7) W. E. BERG e P. B. KUTZKY, « Biol. Bull. », 101, 47 (1951).

(8) Da *Research in Holland-Elsevier Publ.*, 1946, di M. W. WOERDEMAN e Chr. P. RAVEN.

(9) M. GABE, « La Cellule », LIV, 7 (1950).

(10) M. GABE e M. PRENANT, 53, 99-116 (1949).

(11) L. ARVY, « Arch. Biol. », 61, 187-196 (1950); « C. R. Ac. Sci. », 228.

(12) J. A. SERRA e A. QUEIROZ LOPES, « Portugaliae acta Biologica », 1, 51 (1945).

(13) F. RANZOLI, « Caryologia », V, 1953.

(14) G. RETZIUS, « Biol. Unt. », XV, 1910; Ibidem, vol. XVIII (1914).

(15) W. R. COE, « The Biol. Bull' », 84, 178 (1943).

(16) T. C. ROUGLEY, « Proc. Linn. Soc. New South Wales », 58, 279 (1933).

(17) COE e TURNER, e LOOSANOFF vedi (4), (5).



Il materiale è stato fissato in Carnoy, Bouin, alcool acetico, Zenker, Helly, Regaud.

Le sezioni, di 7 micron, sono state colorate con Emallume di Mayer-eosina, Ematossilina ferrica, Mallory-Azan, Cresilvioletto, Bleu di toluidina, Verde di metile-pironina secondo la tecnica di Brachet, con controllo con acido perclorico o ribonucleasi, Feulgen e Bleu di bromofenolo per la messa in evidenza di sostanze proteiche (Mazia, Brewer, Alfert)<sup>(18)</sup>.

In una gonade in piena attività funzionale, si osservano piccoli oociti (20  $\mu$  di diam. mass.), aderenti alle pareti, che si distinguono dalle cellule follicolari per avere il nucleo rotondo, con cromatina disposta in filamenti piuttosto lassi, mentre le cellule follicolari presentano nuclei allungati con

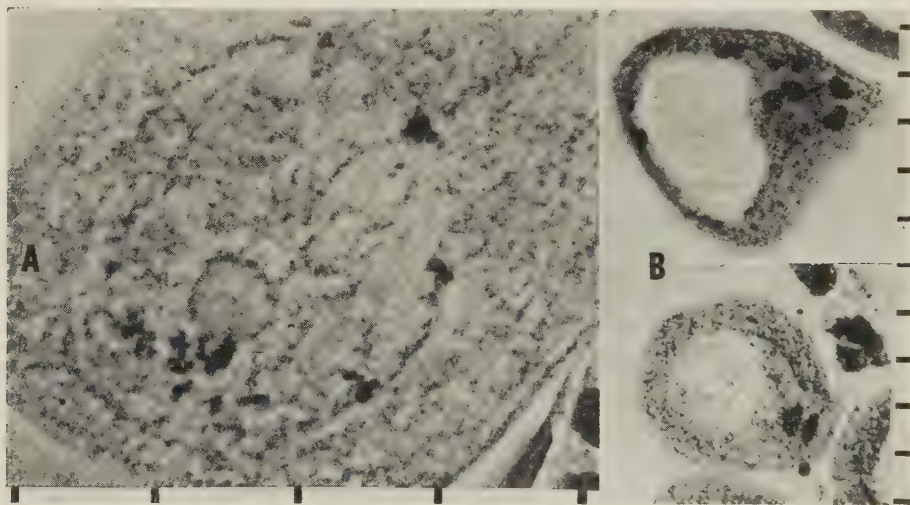


Fig. 1. - A: vescicola germinativa di oocite di *Mytilus*, reazione di Feulgen. Sono visibili i cromosomi Feulgen positivi. B: oociti nel citoplasma dei quali sono evidenti le formazioni basofile, colorazione con Bleu di toluidina. Le unità della scala a fianco delle fotografie hanno il valore di 10  $\mu$ .

cromatina ammassata; inoltre il citoplasma dei piccoli oociti è fortemente basofilo (Bleu di toluidina, Pironina).

Gli oociti più grandi (40-60  $\mu$  diam. mass.) presentano sempre una zona di adesione al follicolo ed in questa si osservano, al di sotto del nucleo, delle formazioni, di aspetto ergastoplasmatico, che sono omologabili alle fasce vitellogene. Rappresentano zone di protoplasma molto più compatto (si vedono benissimo anche senza essere colorate, con il microscopio a contrasto di fase).

Il numero di queste formazioni è variabile; e, con l'accrescimento dell'oocite, si risolvono in strutture aventi un aspetto lamellare con disposizione concentrica intorno ad una parte di citoplasma meno rifrangente. Queste formazioni si distribuiscono nell'ooplasma e si dissolvono gradualmente con l'inizio della formazione del tuorlo.

(18) D. MAZIA, P. A. BREWER e M. ALFERT, « Biol. Bull. », 104, 57 (1953).

Le tecniche da noi adoperate per la rivelazione dell'ARN mostrano la presenza di questo composto, e, dopo l'azione della ribonucleasi, o dell'acido perclorico, non si ha più basofilia, ma le strutture possono essere messe in evidenza o con l'Ematossilina ferrica, o con altri coloranti.

Questo dimostra che, al pari della fascia vitellogena di *Antedon*, sono costituite da uno stroma, di natura proteica (non abbiamo eseguito, per il momento, osservazioni sui lipidi) come lo indica la colorazione con il Bleu di bromofenolo e che nella loro composizione chimica entra l'acido ribonucleico. Vi è perciò un parallelismo e nella natura chimica e nel comportamento, tra queste formazioni e le tipiche fasce vitellogene.

Altro dato interessante, che si è potuto rilevare adoperando miscele di Verde metile-pironina a vari pH (Gerola e Vannini)<sup>(19)</sup>, è che il nucleolo e le formazioni vitellogene si colorano con tonalità diverse il che autorizza a ritenere, come già prospettato da Urbani<sup>(20)</sup>, per l'*Antedon*, che gli acidi nucleici presenti nel nucleolo e nelle formazioni in questione sono, non solo quantitativamente, ma anche qualitativamente, differenti.

Lo studio citochimico del nucleo ha mostrato che la reazione di Feulgen è positiva. È questo uno dei pochi casi nei quali è rilevabile ADN nei cromosomi durante la vitellogenesi.

È noto che nella maggior parte dei casi il DNA non è rilevabile, con la tecnica di Feulgen, nel nucleo degli oociti in crescita, e fanno eccezione gli oociti degli Urodeli, nei quali, i cromosomi piumosi, sono Feulgen positivi, e gli oociti di alcuni insetti (Bauer)<sup>(21)</sup>.

Sempre con la reazione di Feulgen risulta positiva una zona del nucleolo che evidentemente rappresenta la *nucleolus associated chromatin* di Caspersen ed altri Autori e che mostra rapporti morfologici di connessione con i cromosomi.

Nucleo e nucleolo subiscono modificazioni evidenti durante l'accrescimento oocitario. Mentre il nucleo si accresce proporzionalmente al citoplasma, il nucleolo mostra un ritmo di accrescimento suo proprio, in accordo con quanto è stato dimostrato da Vannini<sup>(22)</sup> su *Antedon*, da Stockinger<sup>(23)</sup> e da Ranzoli<sup>(13)</sup> su *Patella*. Non discutiamo qui, per il momento, le questioni relative ai rapporti tra accrescimento del nucleolo e fenomeni della vitellogenesi rimandando, per la questione, agli estesi lavori del Vannini.

La colorazione con Verde di metile-pironina a pH diversi (Gerola e Vannini), come già accennato precedentemente, mostra che il nucleolo dei piccoli e medi oociti prende (pH 9-10-11) una colorazione rosso brillante mentre nel nucleolo dei grandi oociti, si osserva una parte centrale, rosso vivo, circondata da una zona violacea, di tonalità quasi eguale a quella delle formazioni vitellogene citoplasmatiche. Abbiamo compiuto una analisi spet-

(19) M. GEROLA e E. VANNINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 5, 77 (1948).

(20) E. URBANI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 14, 559 (1953) e 15, 309 (1953).

(21) H. BAUER, « Zeitschr. für Zellf. », 18, 264 (1933).

(22) E. VANNINI, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 24, 292 (1953).

(23) L. STOCKINGER, « Protoplasma », LII, p. 365 (1953).

trofotometrica, con l'apparecchio di Urbani, del nucleolo, citoplasma e formazioni basofile di oociti colorati con Verde di metile-pironina a pH 9, ed i risultati mostrano (fig. 2) che le curve di estinzione sono diverse per il nucleolo da una parte e per il citoplasma e formazioni basofile dall'altra.

Durante il passaggio degli oociti da una grandezza media (20-40  $\mu$  diam.

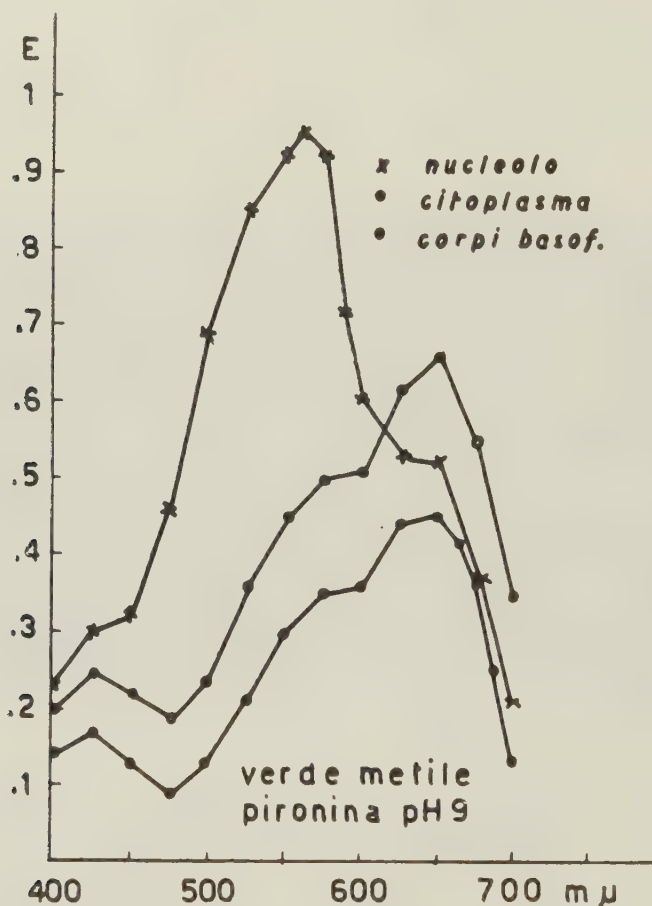


Fig. 2. - Curve di estinzione ottenute con l'analisi del nucleolo, del citoplasma e delle formazioni basofile di oocite di *Mytilus edulis*, sezioni di 7  $\mu$  colorate con verde di metile pironina a pH 9. In ordinate l'estinzione, in ascisse le varie lunghezze d'onda alle quali è stato condotto l'esame. Si noti come il nucleolo dia una curva completamente diversa da quelle del citoplasma e delle formazioni basofile.

mass.) ad una maggiore (40-65  $\mu$  diam. mass.), il nucleolo gemma nucleoli più piccoli che migrano verso la membrana nucleare.

Questi nucleoli figli, nei grandi oociti, sono rarissimi o assenti, e, perciò, si ha l'impressione che la loro sostanza sia diffusa attraverso la membrana nucleare. Anche Serra e Lopes hanno visto, negli oociti di *Helix* osservati, *in vivo*, la produzione dei nucleoli figli, e la descrizione che danno del fenomeno è simile a quella riscontrata sul nostro materiale.

La struttura complessa e variabile del nucleolo, che prima della gemmazione presenta nel suo interno vacuoli o corpi che hanno una particolare rifrangenza o intensità di colore, oltre che con la pironina, è rivelata dalla Ematossilina ferrica, dall'Emallume, dal Mallory, dal Bleu di bromofenolo. Con il Bleu di toluidina esso si colora come i cromosomi metacromaticamente in verde più intenso nei piccoli oociti, più pallido in quelli grandi, mentre le fasce vitellogene si colorano in bleu intenso <sup>(24)</sup>.

Nei Lamellibranchi, ed in particolare nel *Pecten maximus* L. ed in *Modiola modiolus*, già Retzius (1910-1914) aveva osservato queste modificazioni della colorazione del nucleolo durante le diverse fasi dell'accrescimento oocitario, e le variazioni, durante lo stesso processo, del condrioma e della reazione del citoplasma in rapporto alla vitellogenesi, e, pur dichiarando di non avere ancora a sua disposizione sufficienti documentazioni, suppose che vi fosse una relazione tra la sostanza nucleolare ed alcune bolle e sferule che si trovavano nel nucleo e nel citoplasma.

Le osservazioni di Bretschneider sulla *Lymnaea* e di Serra e Lopes su *Tachea* ed *Helix* parlano pure in favore di una migrazione della sostanza nucleolare dal nucleo al citoplasma, e gli anfinucleoli sono considerati come la forma attiva dei nucleoli. La formazione dei nuclei vitellini ha luogo, come in *Mytilus*, anche negli *Helicidae*, durante la produzione attiva dei nucleoli figli.

CONCLUSIONI. — Le osservazioni citologiche e citochimiche illustrate nella presente Nota ci hanno permesso di trarre le conclusioni seguenti: negli oociti di *Mytilus edulis* Linn. sono presenti, ad un certo stadio di accrescimento delle formazioni basofile ooplasmatiche, che, per la loro composizione chimica e per il comportamento caratteristico, sono omologabili alla fascia vitellogena di *Antedon*, *Pholcus*, ed alle *couches vitellogénès* dei nuclei vitellini di altri animali.

L'acido ribonucleico che entra nella costituzione di queste formazioni si rivela, all'esame spettrofotometrico, qualitativamente e quantitativamente diverso da quello del nucleolo, come anche in *Antedon*.

Il nucleolo, nel quale è evidente la *nucleolus associated chromatin*. Feulgen positiva, mostra dei cambiamenti nella sua basofilia durante l'accrescimento dell'oocite.

A questi cambiamenti delle proprietà tintoriali s'accompagna la gemmazione dei nucleoli figli, come già visto da altri Autori in oociti di Gastropodi e da noi in *Mytilus*.

La vescicola germinativa mostra delle zone Feulgen positive, ed anche i cromosomi, ben visibili durante l'auxocitosi, svelano la presenza di ADN.

L'evoluzione delle formazioni basofile, che si disgregano con la comparsa delle prime sferule di tuorlo, e la presenza dell'ARN, autorizzano a pensare che questi corpi basofili, al pari delle fasce vitellogene, intervengano nella vitellogenesi.

(24) Si veda, a proposito della metacromasia degli acidi nucleici con Bleu di toluidina, il recente lavoro di F. GHIARA, *Convegno di Genetica*, Suppl. « La ricerca scientifica », XXIII, 1953.



**Biologia.** — *Fattore spaziale e organizzazione strutturale nel differenziamento dei neuroni dei lobi ottici e del cervelletto in impianto allanto-coriale nel pollo* (\*). Nota di ALBERTO STEFANELLI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Questi risultati fanno seguito a quelli già pubblicati in questi « Rendiconti » relativi al differenziamento di vari tipi di cellule nervose in frammenti di embrione di pollo isolati allo stadio di vescicola ottica primaria (a circa 50 ore di incubazione) e coltivati in impianto allanto-coriale (Stefanelli e Chiti, Chiti) <sup>(1)</sup>. Anche per queste esperienze mi sono valso della valida collaborazione tecnica di L. Chiti.

Dimostrato che in questi frammenti, isolati prima che si manifesti ogni segno del differenziamento specifico particolare, i neuroni assumono le caratteristiche strutturali specifiche particolari (cellule a neurite ricorrente del tetto, cellule di Purkinje, cellule motorie spinali, cellule gangliari spinali) in modo quasi del tutto normale, perfettamente conforme a quanto avevo già potuto osservare per i neuroni di Mauthner degli Anfibi <sup>(2)</sup>, neuroni a differenziamento specifico particolare spiccatissimo, è venuto facile trarre la conclusione che tale differenziamento si attui per fattori intrinseci acquisiti dal neuroblasta al momento della determinazione istogenetica, escludendo fattori estrinseci, da molti invocati, tra cui i fattori funzionali o fisiologici.

Rimando il lettore ad un mio articolo sulla rivista « Scientia » ove ho sinteticamente esposte le conclusioni a cui sono giunto senza qui, data la limitazione di spazio, dovermi ripetere <sup>(3)</sup>.

Dalle esperienze già eseguite risultava tuttavia che, se per le caratteristiche principali i neuroni differenziati in isolamento si presentavano simili ai neuroni sviluppati in sede normale, tuttavia potevano presentare delle alterazioni più o meno palesi, pur rimanendo sempre perfettamente riconoscibili, che potevano far pensare ad una qualche influenza dell'ambiente.

Già da esperienze passate mie e di allievi (Rossetti, Forti) <sup>(4)</sup> sul differenziamento in espianto della cellula di Mauthner degli Anuri avevo potuto porre in evidenza l'importanza della dimensione del frammento: nei fram-

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Università di Roma con un contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) STEFANELLI ALBERTO e L. CHITI, questi « Rend. », vol. XVI, p. 287 (1954); L. CHITI questi « Rend. » (in corso di stampa).

(2) STEFANELLI ALBERTO, « Mem. Acc. Naz. Lincei », vol. I (1946) 1947; « Ric. di Morfol. », XXII (1947).

(3) STEFANELLI ALBERTO. « Scientia », in corso di stampa (1954).

(4) STEFANELLI ALBERTO, « Boll. Soc. ital. Biol. Sperim. », XX (1945); « Mem. Acc. Naz. Lincei », vol. I (1946) 1947; F. ROSSETTI, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », XXIII (1947). L. FORTI, questi « Rend. », VIII (1947).

menti piccoli le cellule apparivano più piccole e globose; in quelli più grandi e soprattutto in quelli di forma vescicolare, che venivano a rispettare una certa polarità tra superficie interna ed esterna, la forma e le dimensioni erano assai più prossime a quelle tipiche. Tuttavia, avevo già fatto notare nella mia Memoria del 1946 <sup>(2)</sup> come un fattore della massima importanza nella attribuzione della grandezza del pirenoforo, fosse la possibilità o meno delle cellule nervose di filare la propria fibra, possibilità che negli espianti veniva fortemente compromessa.

In altre parole, come per il differenziamento organologico devono essere considerati dei «fattori spaziali» (messi in luce da Cotronei, 1915, 1919) <sup>(5)</sup>, così fattori simili devono essere considerati anche nel campo della differenziazione istologica (vedi Mem. citata, p. 86). Un altro lato molto importante nel differenziamento dei neuroni in frammenti isolati è il comportamento della fibra nervosa nel suo pur limitato accrescimento.

Da queste premesse risultava pertanto utile uno studio dei processi del differenziamento di neuroni già studiati in impianto allanto-coriale riducendo gradualmente la dimensione del frammento.

Come nelle passate esperienze i frammenti furono prelevati da embrioni di pollo allo stadio di vescicola ottica primaria (a circa 50 ore di incubazione) e impiantati su allanto-corion di un ospite di circa 5-6 giorni di incubazione, quando già vi è una ricca rete vascolare nella membrana allanto-coriale. I frammenti venivano poi fissati dopo 18-19 giorni, allestendo quindi i preparati con metodo argenteo Cajal-De Castro.

Ho riassunto nella tavola (fig. 1) i risultati di queste esperienze. Nella colonna A è indicato, in nero, l'embrione normale allo stadio operato e il frammento mesencefalico di varia ampiezza prelevato e impiantato in allanto-corion nelle varie esperienze. In B è schematicamente raffigurata la sezione del tetto ottico normale e dei frammenti (delimitati con tratto grosso). Nella colonna C sono disegnate le cellule bipolari a neurite ricorrente normali e le loro alterazioni di struttura nei diversi espianti. La fig. 2 mostra in microfotografia l'aspetto dei neuroni a neurite ricorrente, A di tetto normale, B di frammento pari ad un intero emimesencefalo, C e D di frammento pari ad un terzo ed E pari ad un quarto di emimesencefalo come è indicato negli schemi della colonna A della fig. 1.

Risulta molto evidente da queste figure (una più ampia documentazione sarà portata in un lavoro in preparazione) come nei frammenti grandi, pari ad un intero lobo ottico, si abbia una differenziazione dei neuroni, notevolmente simile al normale e con una tipica condizione ricorrente del neurite. Una differenza con il normale consiste nella disposizione in genere più rarefatta dei neuroni e nell'allineamento, seppure notevole, un poco meno regolare. Ma, pur in questa condizione di isolamento, il neurite ricorrente è presente e, unica differenza evidente, è la condizione in genere un

(5) G. COTRONEI, questi « Rend. », ser. V, XXIV, p. 295 (1915) e ser. V, XXVIII, p. 206 (1919).

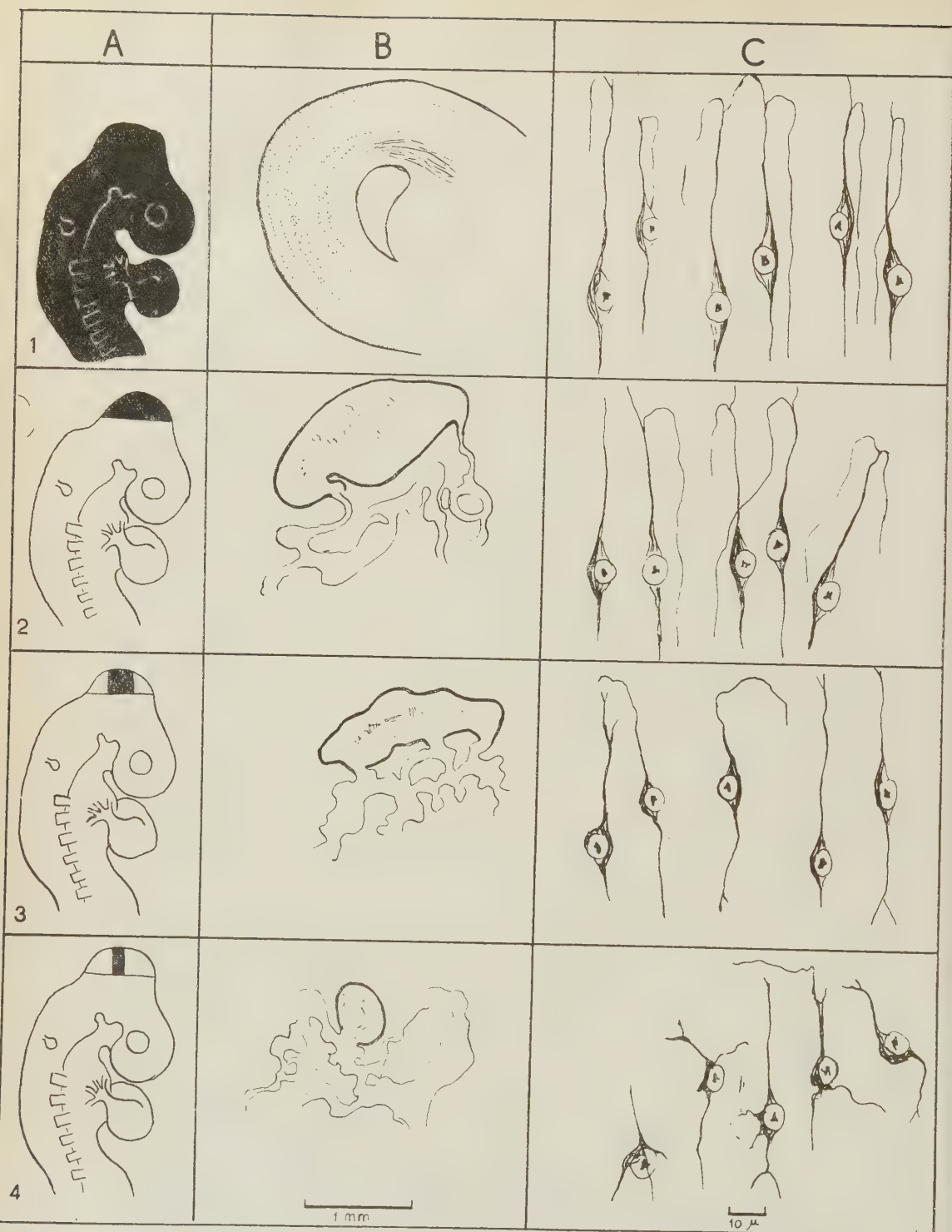


Fig. 1. — Schema delle esperienze e dei risultati del differenziamento dei neuroni fusiformi a neurite ricorrente in frammenti di lobo ottico di pollo impiantato allo stadio embrionale di vescicola ottica primaria in allanto-corion. Metodo Cajal-De Castro.

Colonna A: in nero embrione normale e entità del frammento isolato; B: aspetto e dimensioni degli impianti paragonati al lobo ottico normale; C: aspetto delle cellule a neurite ricorrente nei vari casi. Altre spiegazioni nel testo.

poco più larga della sua curvatura. Se il differenziamento istologico è molto simile al normale, così non è per la distinzione dei vari strati del tetto: appare infatti *grosso modo* una unica pluristratificazione di cellule che è anche notevolmente disturbata da una ricca vascolarizzazione che compenetra il frammento; tuttavia la polarità del frammento è ben conservata con una superficie esterna ed una superficie interna. I neuroni fusiformi sono orientati regolarmente normali a queste superfici (fig. 2 B).

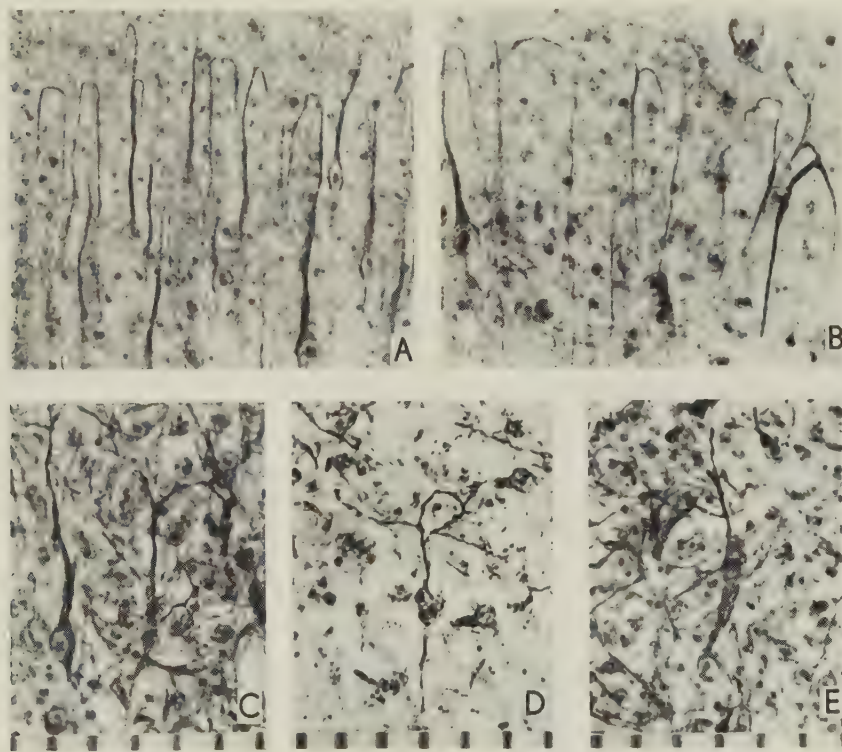


Fig. 2. — Microfotografie delle cellule del tetto dopo 19 giorni di incubazione.

A, normale; B, di frammento pari ad un abbozzo completo di lobo ottico; C, di frammento pari ad un terzo; D, E, di frammento pari ad un quarto di lobo ottico. Ogni divisione della scala in calce = 10  $\mu$ . Met. Cajal-De Castro.

Nei frammenti più piccoli pari ad un terzo di un lobo ottico le malformazioni strutturali ora indicate sono ancora più evidenti e, pur conservandosi ancora una polarità del frammento, l'allineamento dei neuroni è ancor più irregolare; l'orientamento è invece per lo più abbastanza buono, con l'asse delle cellule normale ai piani di superficie, ma si notano in determinate sedi neuroni completamente disorientati e distorti.

Se, per lo più, l'orientamento è buono, meno regolare è la presenza dei neuriti ricorrenti che presentano una curvatura decisamente più ampia e irregolare e sovente lungo la curvatura stessa partono dei collaterali, cosa rarissima nei neuroni normali e del caso precedente (fig. 2 C).



Nei frammenti molto piccoli, pari circa ad un quarto di un lobo ottico, si osserva un accrescimento a palla per cui viene a perdersi ogni polarità nel frammento e non sono più identificabili una superficie esterna ed una interna. Nell'interno del frammento i neuroni specifici del tetto, pur in queste condizioni, si differenziano, ma appaiono notevolmente disorientati e distorti. Sovente anche l'aspetto fusiforme è compromesso per l'emissione di altri prolungamenti dal corpo cellulare che tendono a far assumere alla cellula un aspetto multipolare (fig. 2 E); ma più di sovente vi è la tendenza a conservare la condizione bipolare anche se poi la cellula non risulta orientata secondo una definita direzione. A volte, di cellule più tipicamente fusiformi, sono identificabili con chiarezza neuriti ricorrenti (fig. 2 D).

Queste esperienze, se da un lato dimostrano in modo inequivocabile l'autonomia del differenziamento dei neuroni fusiformi del tetto dopo che sia intervenuta la determinazione istogenetica, indipendentemente da ogni influenza funzionale e da ogni attività di campo neurobiotattico attivato da condizioni fisiologiche, e se dimostrano che anche il caratteristico comportamento ricorrente del neurite è indipendente da stimoli orientativi di campi funzionali, dimostrano tuttavia, come, per la normale acquisizione dei caratteri morfologici specifici siano necessarie determinate condizioni di ampiezza (fattori spaziali di Cotronei) e di struttura del frammento in cui si sviluppano. La condizione di polarità del frammento risulta soprattutto fondamentale per l'orientamento dei neuroni e questo orientamento è fondamentale per il decorso ricorrente dei neuriti. Per quel che riguarda il peculiare decorso dei neuriti di questi neuroni si può pertanto concludere che i fattori orientativi non vanno ricercati in stimoli di attività fisiologica, evidentemente assenti nei frammenti, ma in stimoli di natura morfologica quali quelli di polarità del substrato e di polarità della cellula stessa che agiscono su un prolungamento intrinsecamente suscettibile a questi stimoli.

L'importanza della struttura polarizzata del frammento per l'orientamento dei neuroni appare evidente anche da una serie di esperienze di impianti corion-allantoidei di frammenti di grandezza decrescente dell'abbozzo cerebellare.

Si è visto (Chiti) che nell'abbozzo cerebellare isolato si ha un differenziamento delle cellule di Purkinje del tutto simile a quello normale con un tipico allineamento monostratificato delle cellule e un tipico orientamento con la parte dendritica rivolta verso lo strato molecolare. L'osservazione fatta al 19° giorno di incubazione dimostra come nel pollo la condizione iniziale pluristratificata comune al cervelletto embrionale di molti vertebrati (Augusto Stefanelli, 1931<sup>(6)</sup>) sia di breve durata.

(6) STEFANELLI AUGUSTO, « Arch. It. Anat. Embriol. », XXIX, p. 231 (1931).

Anche in frammenti più piccoli di quelli considerati da Chiti si ha un differenziamento molto simile al normale, sebbene la ricca vascolarizzazione abnorme del frammento provochi un notevole disturbo sulla regolarità dell'allineamento; ma la polarità è sempre rispettata (fig. 3 B).

Ma in frammenti cerebellari molto piccoli (fig. 3 C) in cui non vi è più una superficie esterna definita e non si ha una stratificazione regolare degli strati, pur conservandosi una straordinaria tendenza delle cellule di Purkinje a disporsi in un solo allineamento e regolarmente distanziate, si perde il loro orientamento polarizzato così che, per lo più il polo dendritico è rivolto verso una delle cellule di Purkinje vicine. Contemporaneamente vi è un minor sviluppo volumetrico delle cellule specialmente dovuto ad un minor sviluppo del polo dendritico.

Da queste esperienze di impianti allanto-coriali di frammenti di abbozzo di lobo ottico e di cervelletto di pollo, di dimensioni gradualmente ridotte, si possono trarre le seguenti conclusioni. Il differenziamento specifico particolare di neuroni altamente specializzati, quali quelli a neurite ricorrente dei lobi ottici e le cellule di Purkinje del cervelletto, si attua anche in completo isolamento (coltura in allanto-corion) morfologico e funzionale. Tale differenziamento è pertanto l'estrinsecazione di una qualità, acquisita con la determinazione istogenetica particolare, che si attua in modo autonomo. Le condizioni di alterazione strutturale rispetto alla condizione normale, controllata in frammenti di volume ridotto, dimostrano come per tale

estrinsecazione sia molto importante, in primo luogo, una certa ampiezza del substrato in cui il neurone si sviluppa e in cui si accrescono i prolungamenti; ciò mette in luce come il concetto di «fattore spaziale», considerato da Cotronei per i processi di morfogenesi embrionale, sia valido anche per quelli di istogenesi. Inoltre di grande importanza risulta anche la condizione di polarità che può essere acquisita dal frammento. La polarità del frammento, per cui si vengono ad identificare una superficie interna ed una esterna, è fattore di orientamento di quei neuroni che di norma sono orien-

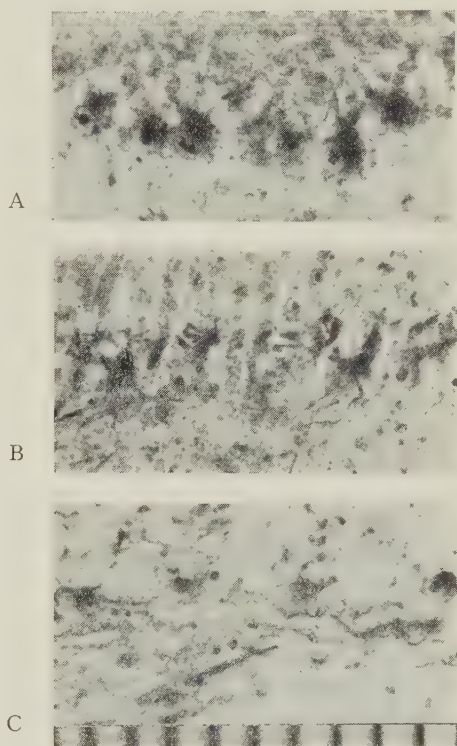


Fig. 3. — Cellule di Purkinje di embrione normale di 19 giorni di incubazione (A) paragonate a quelle sviluppate in frammenti grandi (B) e piccoli (C) dell'abbozzo cerebellare alla stessa età. Met. Cajal-De Castro.

tati rispetto a queste superfici, quali i neuroni da me considerati in queste esperienze. Così pure risulta fondamentale per l'orientamento ricorrente del neurite delle cellule del tetto l'orientamento delle cellule normalmente alla superficie del frammento.

Queste osservazioni estendono anche agli Uccelli quelle condizioni di differenziamento autonomo messe da me in evidenza per neuroni specializzati degli Anfibi (cellule di Mauthner) e Teleostei (neuroni del tetto di pesci ciechi)<sup>(7)</sup>, facendo prevedere essere questa una condizione generale del differenziamento delle cellule nervose dei Vertebrati.

**Biologia.** — *Sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare.* — I. Osservazioni sulla morfogenesi<sup>(\*)</sup>. Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

È noto che in alcuni centri del sistema nervoso centrale di Vertebrati superiori le mitosi cessano molto presto, per cui il numero dei neuroni è precocemente fissato (ad esempio gangli spinali: Morpurgo e Tirelli 1892, Held 1909, Busacca 1923, Olivo, Porta e Barberis 1932, Pilati 1938, Levi-Montalcini e Levi 1942<sup>(1)</sup>), in altri centri, invece, le mitosi possono durare molto più a lungo, anche dopo la nascita; tale è il caso del midollo spinale e della corteccia cerebrale di ratti (Allen 1912<sup>(2)</sup>), ma specialmente della corteccia cerebellare di vari Mammiferi (Sclavunos 1899<sup>(3)</sup>, Hamilton 1901<sup>(4)</sup>, Addison 1911<sup>(5)</sup>, Allen 1912<sup>(2)</sup>, Raaf e Kernohan 1944<sup>(6)</sup>, Preto Parvis 1949<sup>(7)</sup>).

Nel corso di uno studio morfologico e comparativo sul differenziamento e la citomorfosi di peculiari neuroni del sistema nervoso centrale di Mammiferi, sono emersi alcuni dati sulla morfogenesi del cervelletto che ritengo degni di nota.

Da osservazioni embriologiche ed anatomo-comparative è noto che il cervelletto si forma da un ispessimento laminare impari mediano della volta metencefalica; dagli elementi ependimali della lamina si differenzia uno strato cellulare (detto: «strato granulare interno»), ma la più cospicua sorgente di elementi proviene dalla migrazione di elementi ependimali dalla

(7) STEFANELLI ALBERTO, questi «Rend.», XVI (1954).

(\*) Ricerca eseguita nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma, diretto dal prof. Al. Stefanelli.

(\*\*) Nella seduta del 9 giugno 1954.

(1) Ved. G. LEVI, *Accrescimento e Senescenza*, Firenze 1946.

(2) E. ALLEN, «Journ. Comp. Neurol.», 22°, p. 547 (1912).

(3) G. SCLAVUNOS, «Anat. Anz.», 16°, p. 467 (1899).

(4) A. HAMILTON, «Journ. Comp. Neurol.», 11°, p. 297 (1901).

(5) W. H. F. ADDISON, «Journ. Comp. Neurol.», 21°, p. 459 (1911).

(6) J. RAAF e J. W. KERNOHAN, «Amer. Journ. Anat.», 75°, p. 151 (1944).

(7) V. PRETO PARVIS, «Biol. Latina», 2°, p. 330 (1949).



regione anteriore della superficie ventricolare del midollo allungato (Löwe 1880; Herrick 1895): essi si dispongono nella superficie posteriore della lamina in uno strato continuo (detto: «strato dei granuli embrionali», o meglio: «strato granulare esterno»).

Avendo osservato differenze nella frequenza delle mitosi tra i due strati ed elementi in degenerazione nello strato granulare interno, ho ritenuto di un certo interesse eseguire dettagliate osservazioni in merito.

Materiale di queste osservazioni è un Mammifero (*Felis domestica* Gemlin) a varî stadi di sviluppo. Lo studio dei fenomeni è stato compiuto su encefali completi (dal feto al neonato) o su parti del sistema nervoso centrale (dal neonato all'adulto), fissati in Carnoy ed in Helly, impregnati in celloidina-paraffina e sezionati in serie dalla norma sagittale ( $5\mu$  di spessore). Le sezioni dei pezzi fissati in Carnoy sono state trattate col reattivo di Schiff (secondo il metodo di Feulgen) e quelle di controllo senza idrolisi; le sezioni dei pezzi fissati in Helly, sono state trattate con verde di metile-pironina a pH 6 (secondo Brachet) e con bleu di toluidina a pH 4,5 e quelle di controllo sono state previamente sottoposte ad idrolisi acida (secondo Di Stefano). I conteggi delle mitosi sono state eseguite su 20 superficie di  $1\text{ mm}^2$  da sezioni sagittali mediali.

Il primo differenziamento della lamina cerebellare è apparso in un feto di 25 mm di lunghezza (a circa 28 giorni di sviluppo), caratterizzato dall'ispessimento della volta metencefalica.

In feti a  $2/3$  di gestazione (85 mm di lunghezza, circa a 45 giorni di sviluppo) il cervelletto mostrò i primi accenni della formazione dei solchi: spicca in questo stadio con particolare evidenza la 1<sup>a</sup> incisione o solco di Bolk, che delimita la porzione anteriore da quella posteriore del cervelletto. Mentre in altri centri esaminati (corteccia cerebrale, diencefalo, mesencefalo, rombencefalo) le mitosi sono scomparse (ne ho osservate sporadiche solo nello strato granulare esterno della corteccia cerebrale), nel cervelletto esse sono molto evidenti e frequenti, sia nello strato granulare esterno che in quello interno (fig. 1, I): tenendo conto solo delle mitosi a cromosomi evidenti ed in stadi di metafase e anafase (trascurando le profasi e le piccole mitosi a cromosomi associati ed indistinti dello strato granulare interno, ved. Hamilton 1901 <sup>(4)</sup>) ne ho contate in egual numero (30 in media) sia nello strato granulare interno che in quello esterno; molto rare, invece, appaiono le mitosi nella porzione periferica dello strato granulare interno, al livello degli elementi di Purkinje (7 mitosi per  $\text{mm}^2$ ) che si presentano ancora non differenziati, pluristratificati ma già riconoscibili per le notevoli dimensioni del loro nucleo.

Successivamente le mitosi dello strato granulare esterno aumentano notevolmente di numero (fino a 90 per  $\text{mm}^2$  in media), tant'è vero che alla nascita lo strato si presenta notevolmente sviluppato, sia per l'avvenuta formazione di numerosi solchi che per l'aumento di spessore (circa 10 strati cellulari); le mitosi dello strato granulare interno, invece, diminuiscono (alla nascita se ne rinvennero 5 per  $\text{mm}^2$  in media); nel neonato al livello degli elementi di Purkinje non si rinvennero che sporadiche mitosi (ved. fig. 2).



Alla nascita, inoltre, dallo strato granulare esterno inizia la imponente migrazione di elementi per la formazione dello strato molecolare, come appare dall'aspetto delle stratificazioni più profonde i cui elementi sono incolonnati (fig. 1, 2).

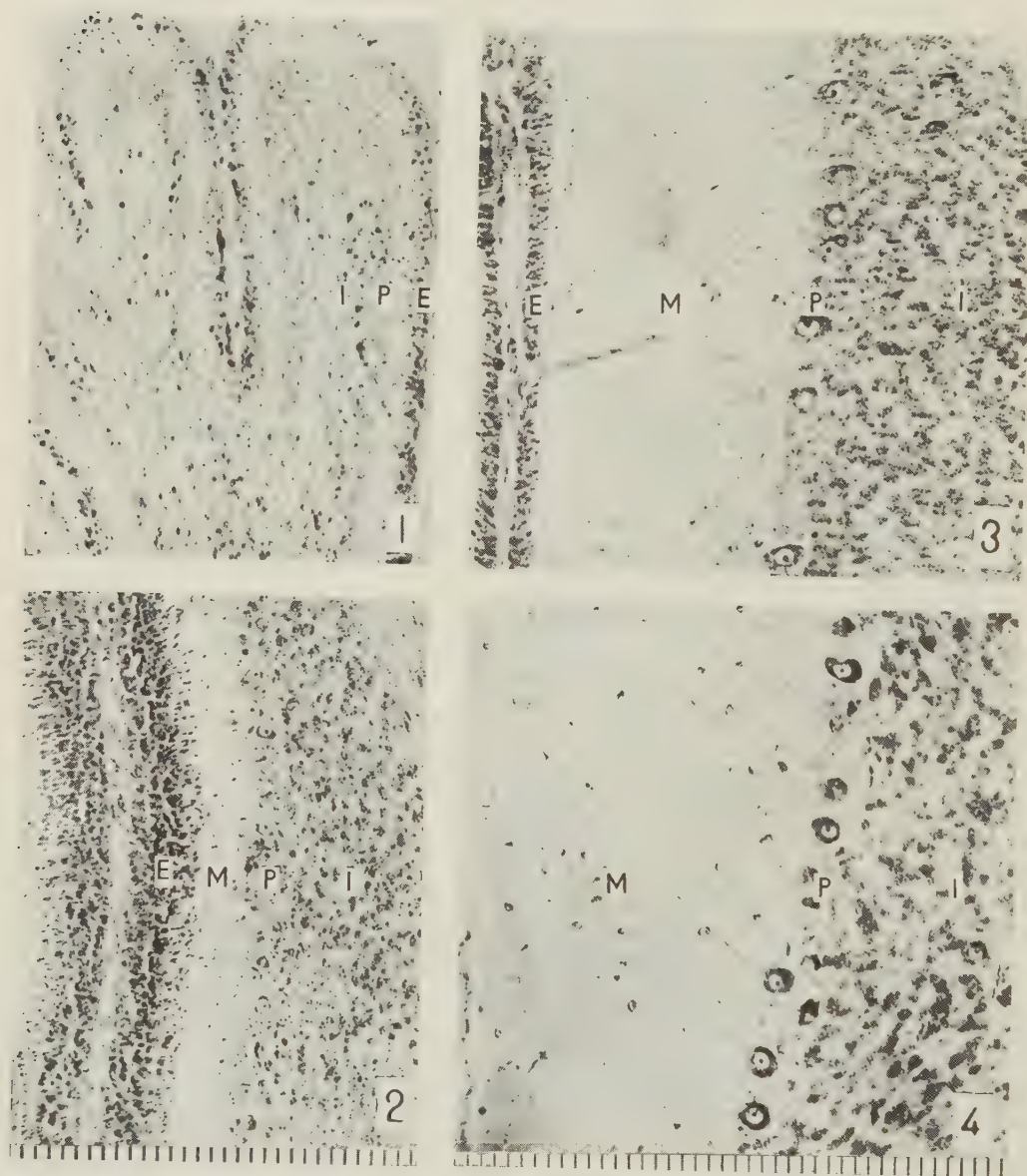


Fig. 1. - Morfogenesi del cervelletto.

1. In feto di 85 mm. (45 giorni di sviluppo); 2. In neonato (65 giorni di sviluppo); 3. In gattino di un mese dalla nascita; 4. In adulto di tre anni (Met. Nissl.). (I = strato granulare interno, E = strato granulare esterno, P = elementi di Purkinje, M = strato molecolare). (Ogni intervallo delle scale in calce = 10  $\mu$ )

In gattini di due mesi e negli adulti lo strato granulare esterno è affatto scomparso, mentre lo strato molecolare è completamente sviluppato (fig. 1, 4).

Anche quando lo strato granulare esterno è ridotto ad una formazione bi-tristratificata (in gattini di 1 mese, fig. 1, 3), l'attività mitotica, per quanto ovviamente ridotta a causa dell'attiva migrazione degli elementi cellulari, perdura (7 mitosi per  $\text{mm}^2$  in media); perciò si può concludere che le mitosi dello strato granulare esterno persistono fino al termine della migrazione dei suoi elementi.

Da queste osservazioni anzitutto risulta che il numero degli elementi del cervelletto si stabilisce molto tardi nello sviluppo, a differenza di altri elementi nervosi (specie quelli di centri vegetativi: gangli spinali, alcuni centri del midollo spinale ed allungato, elementi dei lobi olfattori, già ben differenziati nel feto di 85 mm). Aggiungo che i neuroni di Purkinje, che sono tra i primi elementi del cervelletto che si differenziano, continuano a differenziarsi anche dopo la nascita (ved. fig. 1).

Inoltre la persistenza e la alta frequenza mitotica dello strato granulare esterno del cervelletto rivestono un notevole interesse per la morfogenesi cerebellare, provocando lo sviluppo in superficie della corteccia cerebellare, preparando e contribuendo alla formazione dei solchi e, in un secondo momento, a quella dello strato molecolare; ho notato in proposito che mentre nello strato granulare interno le mitosi non presentano un particolare orientamento, quelle dello strato granulare esterno in un primo periodo fetale si presentano orientate prevalentemente (nella proporzione di 3 : 2) con i fusi paralleli alla superficie cerebellare (aumento in superficie per la formazione dei *folia* cerebellari) e, verso la fine del periodo fetale e dopo la nascita, quando i solchi sono in avanzato sviluppo, esse si presentano prevalentemente orientate (3 : 1) con i fusi perpendicolari alla superficie cerebellare (aumento in spessore per la formazione dello strato molecolare).

Il precoce affievolirsi delle mitosi nello strato granulare interno, e nel contempo il suo continuo e notevole sviluppo anche dopo che in esso è cessata ogni attività proliferativa (1 mese dopo la nascita), conferma la supposizione che lo strato granulare esterno, oltre alla formazione dello strato molecolare del cervelletto adulto (Roncoroni 1905<sup>(8)</sup>, Raaf e Kernohan 1944<sup>(6)</sup>), partecipi alla formazione dello strato granulare interno (Lugaro 1894<sup>(9)</sup>, Cajal 1911<sup>(10)</sup>, Jakob 1928<sup>(11)</sup>).

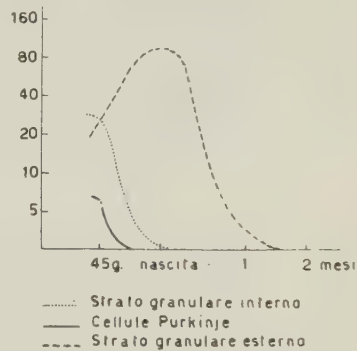


Fig. 2. - Frequenza mitotica nei vari strati del cervelletto durante lo sviluppo (le coordinate in scala logaritmica).

(8) L. RONCORONI, « Arch. Psychiatr. Neuropatol. », 26°, p. 416 (1905).

(9) E. LUGARO, « Monit. Zool. Ital. », 5°, p. 152 (1894).

(10) S. RAMON Y CAJAL, *Histologie du système nerveux de l'homme et des vertébrés*, Paris 1909-11.

(11) A. JAKOB, in: G. VON MÖLLENDORF, *Handbuch der mikroskopischen Anatomie des Menschen. « Das Zentralnervensystem »*, 4°, Berlin 1928.

Negli embrioni di 85 mm e nei neonati, oltre alle mitosi, in corrispondenza del fondo delle incisure, nello strato granulare interno, ho costantemente osservato alcuni elementi in degenerazione tipicamente picnotici: talora ne ho osservati lungo i solchi, in corrispondenza ai luoghi in cui si formeranno successivamente altre introflessioni; analoghi fenomeni, sebbene meno accentuati, li ho osservati nella corteccia cerebrale, quando ancora mancano le circon-

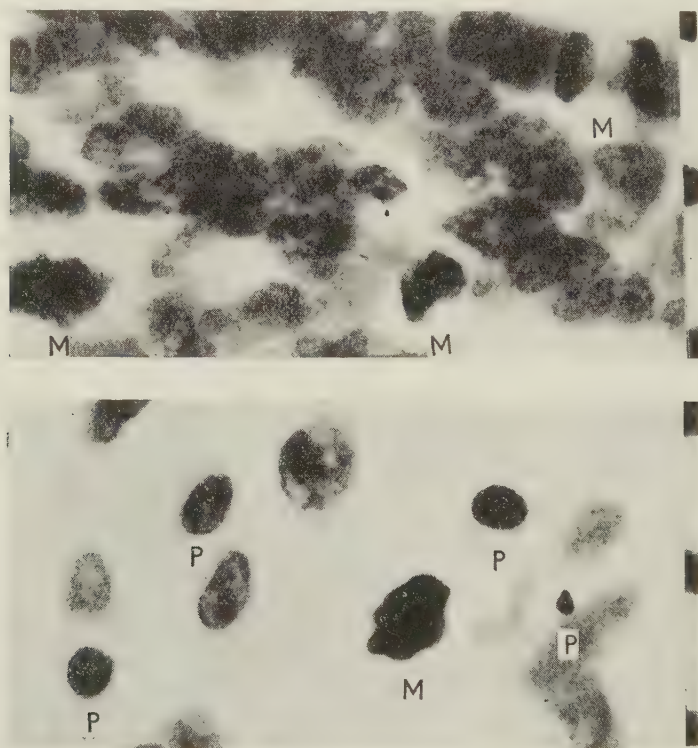


Fig. 3. - *Sopra*: attività mitotica dello strato granulare esterno di gattino neonato. *Sotto*: elementi picnotici ed in degenerazione dello strato granulare interno di feto di 85 mm in corrispondenza al fondo della prima solcatura (Feulgen). (Con M sono indicate le mitosi e con P gli elementi picnotici). (Ogni intervallo delle scale a destra = 10  $\mu$ ).

voluzioni, ma anche qui in corrispondenza ai punti in cui si formeranno le prime invaginazioni (ad esempio al livello del futuro *girus sygmoides*). Si tratta di piccoli elementi di grandezza variabile (3-0,5  $\mu$ ), Feulgen positivi (fig. 3) e che si colorano diffusamente anche con la pironina, ma che perdono tale affinità dopo idrolisi acida, e perciò contenenti DNA e RNA. Date le loro dimensioni e l'assenza di strutture, tali elementi non sono confondibili con altri elementi morfologici: differiscono dalle piccole mitosi per colorarsi con la pironina, dai linfociti, oltre che per le minori dimensioni (linfociti 3,5  $\mu$  di diametro), anche per l'assenza di limiti cellulari definibili.



La loro localizzazione fa supporre che abbiano un'azione morfogenetica notevole, quale potrebbe essere quella di formare delle zone di minor resistenza che meccanicamente faciliterebbero la formazione e lo sviluppo dei solchi.

In prossimità degli elementi picnotici talora ho osservato granulociti.

Ricordo in proposito che l'esistenza di elementi di origine nervosa in degenerazione prima dei processi del differenziamento è stata solo di recente osservata nei gangli cervicali di pollo (Hamburger e Levi-Montalcini 1949<sup>(12)</sup>).

IN CONCLUSIONE: nel cervelletto di gatto l'attività proliferativa delle cellule nervose, pur con differente ritmo nei vari strati, dura molto a lungo, anche circa dopo un mese dalla nascita.

In rapporto soprattutto alle zone di introflessione delle solcature cerebellari, sono osservabili, oltre ad una più attiva proliferazione dello strato granulare esterno, elementi in degenerazione nello strato granulare interno; la concomitanza dei due fenomeni va messa in relazione con la morfogenesi dei solchi.

#### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Giuseppe Levi offre in omaggio la IV edizione del suo « Trattato di Istologia », mettendo in evidenza che, in tale edizione, egli ha dato una maggiore estensione ai capitoli sulla mitosi e sulla meiosi mentre ha trattato in modo più succinto dei metodi istochimici e dei risultati ottenuti con questi metodi, perché è sua convinzione personale che l'istochimica sia una bella promessa, ma che non tutti i risultati raggiunti finora vadano esenti da critiche. L'opera, che non ha il carattere di trattato elementare ma è destinata alla preparazione culturale degli studenti di medicina e può essere utile a quanti desiderino conoscere i nuovi orientamenti delineatisi negli ultimi anni nell'istologia, si è arricchita di molte nuove figure, delle quali alcune sostituiscono quelle apparse nell'edizione precedente, e le altre documentano le parti del libro che sono state aggiornate.

Il Socio U. Amaldi presenta, a nome del Comitato da lui presieduto e composto dai Soci Krall, Persico, Signorini, Tonolo e dal prof. Lampariello, il I volume (1893-1900) delle « Opere Matematiche » di Tullio Levi-Civita.

Il prof. Amaldi ricorda che l'iniziativa di raccogliere in un'unica opera tutte le Memorie e Note del Levi-Civita fu promossa dal compianto Presidente Guido Castelnuovo che fino all'ultimo giorno di vita presiedette il Comitato e fu il fervido e illuminato animatore di ogni cura e di ogni fatica dedicata alla pubblicazione.

Il Socio Amaldi fa presente che, a meglio mettere in luce la naturale evoluzione del pensiero matematico del grande scienziato, è sembrato convenisse

(12) V. HAMBURGER e R. LEVI-MONTALCINI, « Journ. Experim. Zool. », 111<sup>o</sup>, p. 457 (1949).



seguire nella pubblicazione l'ordine cronologico e che pertanto ci si è attenuti rigorosamente a tale criterio come pure si è posta la più vigile cura nel riprodurre con scrupolosa fedeltà i singoli lavori.

Il I volume, che si inizia con la commemorazione del Levi-Civita, letta dal prof. U. Amaldi in occasione dell'inaugurazione della sala Levi-Civita che, nella sede accademica, custodisce la sua biblioteca personale, munificamente donata all'Accademia dalla Vedova, si compone di circa 600 pagine e contiene 32 lavori dell'insigne scienziato, a partire dalla Memoria «Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici», redatta quando egli era ancora studente, dalla tesi di laurea «Sugli invarianti assoluti», e dalle Note sui gruppi continui di operazioni distributive (o funzionali analitici) e sull'inversione degli integrali, che, durante l'anno di perfezionamento trascorso dal Levi-Civita a Bologna, gli furono suggerite dalle teorie che in quel tempo stava elaborando S. Pincherle. Si chiude così il ciclo iniziale dell'attività scientifica del Levi-Civita, corrispondente al periodo in cui il suo pensiero matematico non aveva ancora raggiunto un preciso e definitivo orientamento; e, subito dopo, l'opera matematica del Levi-Civita si eleva, quasi con un improvviso colpo d'ala, a quella elevatezza di problemi e a quell'ampiezza di orizzonti, che dovevano poi caratterizzarla per oltre un quarantennio. Qui figurano, fra le altre, le due grandi Memorie sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche e sui potenziali binari in cui il Levi-Civita cimentò per primo il Calcolo differenziale assoluto del Ricci su problemi di largo respiro, che ben difficilmente avrebbero potuto essere dominati e risolti senza il sussidio di quei procedimenti; e il volume si conclude con la celebre - e ancora oggi ricercatissima - monografia sui metodi e le applicazioni del Calcolo differenziale assoluto, che il Ricci e il Levi-Civita scrissero in collaborazione per i «*Mathematische Annalen*» su esplicita richiesta di F. Klein.

Al I volume ne seguiranno altri quattro, anch'essi di circa 600 pagine.

Il Socio Amaldi desidera rivolgere un vivo ringraziamento ai colleghi del Comitato, al Direttore dell'Ufficio Pubblicazioni dell'Accademia, prof. Bruers, per la esportissima perizia e la impareggiabile solerzia nella organizzazione e nella guida del lavoro editoriale, e al dott. Della Monica della Casa Editrice Zanichelli per la perfetta realizzazione del difficilissimo lavoro tipografico. Si rende inoltre interprete della gratitudine dell'Accademia verso il «*Department of Mathematics*» della J. Hopkins University di Baltimora per il generoso contributo dato alla pubblicazione da quella Facoltà, su proposta del prof. J. Carstoiu, in seguito all'interessamento del collega Signorini.

Il prof. Amaldi confidava di potere presentare in questa stessa seduta anche il I volume delle «Opere» di Vito Volterra, alla pubblicazione delle quali, dovuta anch'essa all'iniziativa del compianto Presidente Castelnuovo, sovrintende un apposito Comitato, presieduto dallo stesso Socio Amaldi, e composto dai Soci Amoroso, Armellini, D'Ancona, Péres, Persico, Picone, Signorini, Somigliana, Volterra e dalla Professoressa Elena Freda. Il Comitato, nei suoi lavori, ha potuto giovare della collaborazione, veramente preziosa, della Vedova Volterra alla quale il Socio Amaldi esprime la più viva grati-

tudine. Non è stato però possibile ultimare la stampa di detto volume che, comunque, uscirà senz'altro entro due mesi al massimo e sarà seguito, successivamente, da altri cinque.

Il Socio Crocco desidera esprimere la sua ammirazione per il volume e per la presentazione tipografica veramente perfetta, e osserva che il collega Amaldi ha voluto attribuire tutto il merito agli altri, mentre in effetti è in gran parte suo.

Il Presidente si associa e rinnova al Socio Amaldi l'espressione del suo più vivo compiacimento e del suo ringraziamento a nome dell'Accademia.

Il Socio Vardabasso presenta il fascicolo X dei Rendiconti della XIX Sessione del Congresso Geologico Internazionale di Algeri dal titolo: «*La gènes des gites du fer*», contenente un suo studio sui giacimenti di ferro dell'Ogliastra (Sardegna Orientale).

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno offerto opere in omaggio all'Accademia.

Il Segretario Accademico illustra le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci G. Levi, Cotronei, Meneghetti, Segre, Tonzig, Perucca, Armellini, Picone, Vardabasso, Clementi, Chiarugi e Vernoni.

Il Socio Clementi presenta una Memoria di Giovanni Motta dal titolo: «*Il volo cieco dei pipistrelli e le pieghe ari-epiglottiche quale organo produttore degli ultrasuoni*». Per l'esame di detta Memoria viene nominata una Commissione composta dallo stesso Socio Clementi e dai Soci Pupilli, Beccari e Carrelli.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CLEMENTI A. — L'acido urico quale prodotto terminale del catabolismo dell'acido isodialurico e dall'uracile nel pollo.

CLEMENTI A. — Formazione di acido urico dall'acido dialurico e dall'uracile nel fegato isolato e sopravvivate di piccione («*Columba Livia*»).

CIMINO M. — Osservazioni fotometriche e polarometriche della corona solare durante l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. — Le isofote coronali fino alla distanza di due diametri. Nota II (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

## CONGRESSI

Il Socio Beccari riferisce sui lavori conclusi nella scorsa settimana dal Comitato Internazionale incaricato di rivedere e aggiornare la nomenclatura anatomica, in seguito a conforme decisione adottata dal Congresso Internazionale di Anatomia che ebbe luogo a Oxford nel 1950, con le seguenti parole:

Nel Congresso internazionale di Anatomia che ebbe luogo a Oxford nel 1950 fu deciso di rivedere e aggiornare la nomenclatura Anatomica. Il pro-

fessore T. B. Johnston del Guy's Hospital di Londra fu incaricato di interpellare le diverse società anatomiche del mondo invitandole a nominare ciascuna un delegato per costituire in proposito un Comitato internazionale. Risposero all'invito otto società e chi vi parla è stato il delegato italiano. Gli Anatomisti russi non hanno partecipato ai lavori. I giapponesi, informati della costituzione del Comitato, fecero proposte e inviarono un delegato alla 2ª riunione del Comitato che ha concluso i suoi lavori a Londra dal 31 maggio al 5 giugno ultimo scorso.

Nella prima riunione del Comitato, patrocinata dall'UNESCO, che si tenne a Londra nel 1952, fu deciso di conservare, come base della nomenclatura, quella stabilita alla fine del secolo scorso dal Comitato internazionale di Basilea (BNA) e di nominare sottocommissioni per ciascun sistema, le quali avrebbero dovuto presentare la lista aggiornata dei nomi al segretario del Comitato prof. Johnston entro il 1953. Il Comitato testé di nuovo riunitosi, con la partecipazione, questa volta, anche del delegato giapponese ha concretato la lista definitiva. Essa verrà presentata per la definitiva approvazione al Congresso internazionale federativo di Anatomia che si terrà a Parigi l'anno prossimo.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

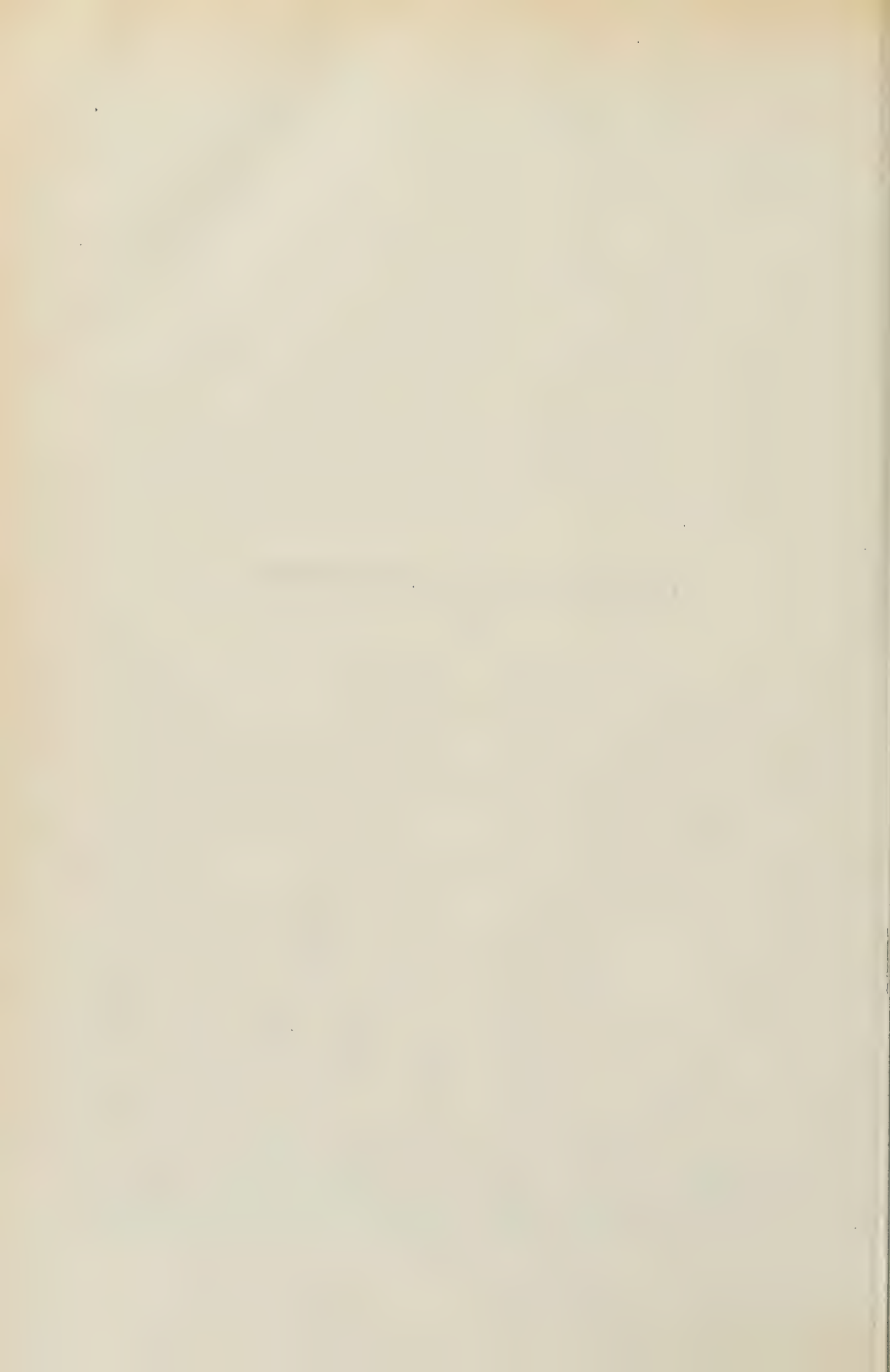
*presentate nella seduta del 9 giugno 1954*

- ALBERTI Giuseppe. — *La «Febbre Q»*. Roma, Istit. di Medicina Sociale, 1954. Pp. 34, in-8°.
- ARGENTIERI Domenico. — *Ottica industriale*. Milano, Hoepli, 1954. Pp. XXIV-466, in-8°.
- BOTTINI G. — *Relazione sull'attività dell'Istituto di Sperimentazione per la Chimica Agraria di Torino nell'anno 1953*. Torino, Tip. Impronta, 1954. Pp. 48, in-8°.
- BUSSI Luigi. — Vedi: VILLA Luigi, POLLI Elio e BUSSI Luigi.
- CATALDI Enzo. — *L'assistenza sanitaria nei vari ordinamenti nazionali*. Roma, Istit. di Medicina Sociale, 1954. Pp. 272, in-8°.
- DI TULLIO Benigno. — *Principi di criminologia clinica*. Roma, Istit. di Medicina Sociale, 1954. Pp. XII-481, in-8°.
- GROSSO Piero. — *L'adeguata formazione professionale come problema medico-sociale*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1954. Pp. 103, in-8°.
- LEVI Giuseppe. — *Trattato di istologia*. 4ª ed. Torino, U.T.E.T., 1954. Pp. XVI-625, in 8°, con figg.
- LEVI-CIVITA Tullio. — *Opere matematiche*. Memorie e Note pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei. Vol. I: 1893-1900. Bologna, Zanichelli, 1954. Pp. xxx-563, in-8°.
- MAZZONI Enrico. — *Materia e movimento sole entità di ogni fenomeno fisico*. Vicenza, S.A.T., 1954. Pp. 637, in-8°.
- MOLFINO Francesco. — *La carie dentale nei lavoratori*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1954. Pp. 46, in-8°.
- Onoranze alla memoria di Guido Castelnuovo*. Estr. da «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni», s. 5ª, vol. XIII, 1954, fasc. 1-2.
- POLLI Elio. — Vedi: VILLA Luigi, POLLI Elio e BUSSI Luigi.
- VARDABASSO Silvio. — *Sull'origine paleoclimatica dei giacimenti di ferro dell'Ogliastra*. Estr. da «Congrès géologique international. XIX Session». Alger, 1952.
- VILLA Luigi, POLLI Elio e BUSSI Luigi. — *Alcuni problemi di struttura del nucleo di cellule ematiche*. Relazione all'XI Congresso della Soc. Ital. di Ematologia. Roma 10-11 maggio 1953. Roma, E.M.E.S., 1953. Pp. 186, in-8°.
- VILLAR G. E. — *La configuración electrónica de los Actínidos*. Montevideo, Facultad de Ingeniería, 1954. Pp. 46, in-8°.

D. DE BLASI e A. SIGNORINI.

## INDICI DEL VOLUME





## INDICE PER AUTORI

## A

- ABETTI G., Commemorazione del Corrispondente Attilio Colacevich (1906-1953), 409.
- ALISI A., vedi ASCENZI A.
- AMICI A., Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili. — I. Qualche rilievo a giustificazione di una ipotesi di lavoro, 257.
- Ancora sugli effetti dell'iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili. — II. Azione dell'associazione stricnina-simpamina sulla rana spinale, 379.
- Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili. — III. Azione della stricnina e della simpamina iniettate contemporaneamente, ma in sede diversa, 499.
- Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili. — IV. Sul comportamento di una reazione colorata, 675.
- vedi FAMIANI V.
- AMPRINO R., Differenziazione e accrescimento della cartilagine di abbozzi scheletrici studiati con l'impiego del radiosolfo, 781.
- ASCENZI A. e ALISI A., Ricerche biometriche sullo sviluppo e sulla senescenza dell'aorta umana, 147.
- vedi CAGLIOTI V.

## B

- BAFFONI G. M., Aspetti morfologici della sostanza PAS positiva nei neuroni di Vertebrati in condizioni normali e sperimentali, 113.
- Sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare. — I. Osservazioni sulla morfogenesi, 798.
- BALCONI M., I limiti di sostituzione silicio: alluminio nei minerali magmatici. Nota II, 101.
- BARBIERI G. A. e LABIANCA T., I composti complessi dell'argento bivalente con l' $\alpha$ - $\alpha_1$ -dipiridile come ossidanti, 88.
- BARBIERI-HERMITTE F., vedi ERCOLI R.

- BATTAGLIA B., Contributo alla conoscenza morfologica e citochimica della spermatogenesi nei Prosobranchi. La spermatogenesi tipica in «Murex trunculus» L., 527.
- Citologia e citochimica della spermatogenesi atipica in «Murex trunculus» L., 670.
- BENEDICTY M., Interi caratteristici e divisori elementari delle matrici normali di Severi, 716.
- BENIGNO P., PORRO A. e CIMA L., Azione dell'ossitettraciclina e dell'eritromicina sul metabolismo fosforato dello «Staphylococcus aureus», 773.
- BERTOLINI F., Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti. Nota II, 10.
- Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace, in tre variabili indipendenti, 615.
- BOMPIANI E., Sugli elementi curvilinei piani  $E_3$  tangenti, 585.
- BONDI C. e CENTAMORI M., Sull'importanza delle condizioni di esperimento nello studio della catalasi (ossiforo di Spirito), 131.
- BURNIAT P., Surfaces algébriques à système canonique dégénéré, 209.
- Superficie algebriche ottuple canoniche di genere geometrico qualunque, 326.
- Surfaces algébriques de genre géométrique nul et de bigenre quelconque, 459.

## C

- CAGLIOTI V., ASCENZI A. e SCROCCO M., Ricerche spettrofotometriche nell'infrarosso sulle relazioni tra sostanza organica e inorganica nel tessuto osseo, 180.
- CAPRARO V. e CRESSERI A., Alcuni problemi riguardanti l'assorbimento intestinale della  $B_{12}$ , 503.
- CAPRIOLI L., Sul comportamento energetico di alcuni sistemi meccanici non lineari, 463.
- CARRELLI A., Commemorazione del Corrispondente Laureto Tieri, 156.
- CASTOLDI L., L'algoritmo della funzione di Dirac. — Giustificazione elementare e applicazioni ad equazioni classiche, 18.
- CENTAMORI M., vedi BONDI C.

- CHIORBOLI P. e MIRONE P., Spettro Raman e ultrarosso dell' $\alpha$ -acetiltiofene, 243.
- CHITI L., Sul differenziamento autonomo di neuroni di pollo in impianto in allanto-corion, 542.
- Vedi STEFANELLI A.
- CIMA L., vedi BENIGNO P.
- CIMINO M., Sulla distribuzione di equilibrio della materia gassosa negli ammassi globulari 215.
- CINI R., vedi SACCONI L.
- COCCHI G., Campi potenziali attorno a schiere di cerchi, 42.
- COLLOTTI G., vedi LIVREA G.
- COSSU A., Su alcune connessioni affini localmente associate ad una assegnata connessione asimmetrica, 193.
- CRAXI P., vedi LIVREA G.
- CREPAX P., L'ipertrofia renale compensatoria in animali affetti da ipopituitarismo anteriore ereditario. Relazioni tra preipofisi e processi di iperplasia e ipertrofia dei tessuti, 373.
- CRESSERI A., vedi CAPRARO V.

## D

- D'AMICO C., Studi sul cristallino di cima d'Asta. IV. — Chimismo delle rocce intrusive di Val Lozen, 741.
- DE MICHELIS F. e MALVANO R., Sullo schema di decadimento del  $^{214}_{84}\text{Po}$ , 724.
- DE SIMONI F., Le soluzioni generali della statica a simmetria sferica nell'ultima teoria unitaria di Einstein, 348.
- DE SOCIO M., Sulla rappresentazione del campo elettromagnetico in una guida d'onda a pareti assorbenti, 63.
- DESÒLE L., Osservazioni morfologiche e fitogeografiche su un paleoendemismo della Sardegna settentrionale: la «Centaurea horrida» Bad., 745.
- DI NATALE L., Trapianti tra larve ibride e larve normali: esperienze su «Bufo vulgaris», «Bufo viridis» e loro ibridi, 563.
- DOETSCH G., Caratterizzazione della trasformazione di Laplace mediante la relativa regola di derivazione negli spazi  $L^p$  e  $U$ , 444.
- DRUSIANI A. M., vedi MIRONE P.

## E

- ERCOLI R. e BARBIERI-HERMITTE F., Ricerche sull'equilibrio tra il dicobalto ottacarbonile e il tricarbonile di cobalto, 249.

## F

- FAMIANI V. e AMICI A., Sul significato funzionale della sostanza fondamentale del cordone ombelicale, 386.
- FAVINI G., vedi SIMONETTA M.
- FERRO R., Cristallografia differenziale delle polveri. — Analisi di polveri cristalline eterogenee. — Esami differenziali di secondo ordine. Nota III, 74.
- FILOGAMO G. e VIGLIONE F., Dimostrazione sperimentale dell'origine delle fibre sensitive viscerali da neuroni dei gangli spinali toracici, 660.
- FORTE B., Di alcune proprietà cinematiche riguardanti i moti rigidi di rotolamento 468.
- FRANCESCHINI M., Caratteri dell'epitelio dell'«amnios» espantato «in vitro», 664.
- FRANCINI E., Il tappeto degli uvuli nelle «Gymnospermae», 750.

## G

- GALLARATI D., Sopra una superficie dell'ottavo ordine dotata di 157 nodi, 454.
- GALLI M., Osservazioni critiche circa nuove soluzioni del paradosso degli orologi, 356.
- GIACHETTI A., vedi SPADOLINI I.
- GIANNUZZI M. A., Sul satellite oscuro nel sistema di  $\zeta$  Aquari. Nota I, 221.
- Sul satellite oscuro del sistema  $\zeta$  Aquari. Nota II, 473.
- GIOVANNELLA B. e PECINI M., Sul comportamento di vari tessuti di Teleosteo adulto impiantati nella camera anteriore dell'occhio di Rana, 546.
- GOBETTO A., Dispositivi di blocco in grosse arterie della loggia ascellare di feti di «Sus Scrofa Dom.», 535.
- Sulla presenza e sul comportamento del glicogeno nelle cellule del grasso bruno interscapolare di «Mus musculus», 656.
- GRAFFI D., Sulle oscillazioni forzate nei sistemi non lineari a due gradi di libertà, 176.
- GRASSO V., Fenomeni di semiletalità in sporidi di «Ustilago kolleri» Wells, 538.
- GRÜNANGER P., Sulla struttura di alcune isosazoline 3,5-bisostituite, 726.
- GUALTIEROTTI T., Azione della caffeina sui riflessi spinali nella rana curarizzata non decerebrata, 263.
- Azione della caffeina sui riflessi spinali nella rana curarizzata e decerebrata, 384.

GUGGENHEIMER H., Interpretazione topologica dei covarianti di Beniamino Segre, 331.

## I

INFANTELLINA F., Effetti dello stiramento su alcune proprietà funzionali del nervo, 516.

— e LA GRUTTA G., Effetti delle condizioni di lavoro del muscolo scheletrico sulla depolarizzazione post-tetanica, 399.

IPPOLITO F., LUCINI P. e SPADA A., Osservazioni geologiche sulla zona di Monticchio nella bassa valle dell'Agri (Basilicata), 92.

## L

LABIANCA T., vedi BARBIERI G. A.

LA GRUTTA G., vedi INFANTELLINA F.

LAUDI G., vedi MARRÈ E.

LIVREA G., Sulle cause del disordine funzionale del cuore nell'inanizione. L'indipendenza dai bioregolatori esogeni, dal tasso glicemico e dall'intensità delle combustioni tissulari. Il rapporto con i quozienti di combustione protidica, 763.

— e COLLOTTI G., Sulla tossicità di determinati aminoacidi per le larve di « Bufo vulgaris » e sull'azione di singoli aminoacidi addizionati ad un alimento naturale e completo per detti organismi, 389.

— e CRAXI P., Sui rapporti tra disordine della nutrizione, istopatologica, istochimica ed attività del miocardio, 508.

LORCH E. R., Su certe estensioni del concetto di volume, 25.

LUCINI P., vedi IPPOLITO F.

## M

MAJORANA Q., L'inerzia non appare sempre proporzionale al peso, 591.

MALATESTA L., Complessi isonitrici di Palladio (O), 364.

MALVANO R., vedi DEMICHELIS F.

MALVICINI A., vedi ROLLIER M. A.

MARCHIONNA E., Sopra una proprietà caratteristica delle curve algebriche appartenenti ad una quadrica, 205.

MARGARIA R., MESCHIA G. e MARRO F., La determinazione del metabolismo con l'ossimetro di Pauling, 311.

MARIANI A., vedi TOSCHI G.

MARMANI G.; vedi SCROCCO E.

MARRÈ E., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — X. Variazioni quantitative dell'acido ascorbico in coleottili di avena e in segmenti di internodio di « Pisum » trattati con acido indolacetico, 758.

MARRÈ E. e LAUDI G., Trasporto diidrogeno all'ossigeno per la via ossido-riduttiva: trifosfopiridinnucleotide-glutatione-ascorbico in estratti di « Pisum sativum », 649.

— e SERVETTAZ O., Ricerche sulla fisionomia respiratoria caratteristica di tessuti in fase di attiva crescita protoplasmatica. Deidrogenasi a TPN e deidrogenasi a DPN, 521.

MARRO F., vedi MARGARIA R.

MARUSSI A., Sulla curvatura tangenziale delle trasformate di curve nelle rappresentazioni affini fra superficie, 478.

MASOTTI A., Sui moti centrali relativi, 48.

MATSCHINSKI M., Sulla genesi delle montagne, 54.

— Quelques considérations sur la théorie mathématique des tafoni. Nota I, 632.

— Quelques considérations sur la théorie mathématique des tafoni. Nota II, 731.

MAZZI V., Sulla presenza di particolari cellule (gliali?) nella oblongata del Tritone crestato, 138.

— Le proprietà tintoriali della fucsina paraldeide in alcune strutture dell'encefalo del Tritone crestato, 266.

— e RICCI L., Sulla presenza di uno strato epitelioide nella meninge primitiva di alcuni Teleostei, 274.

MERLI L., Una formula di approssimazione asintotica per i polinomi di Tchebychef-Hermite e valutazione numerica del resto, 611.

MESCHIA G., vedi MARGARIA R.

MINEO C., Superficie delle quali una semplice infinità di geodetiche sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa, 165.

MIRONE P., Spettro ultrarosso dell'aldeide furilica, 483.

— e DRUSIANI A. M., Spettro ultrarosso dell'N-metilpirrolo, 69.

— vedi CHIORBOLI P.

MUGGIA A., Sulla trasmissione termica per una piastra piana in corrente incompressibile non permanente; applicazione all'anemometria elettrica, 335.



## N

- NARDINI R., Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica. Nota I, 225.  
 — Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica. Nota II, 341.  
 NOBILE V., Sull'argomento galileiano della quarta giornata dei « Dialoghi » e sue attinenze col problema fondamentale della Geodesia, 426.

## P

- PALUMBI G., Prime osservazioni sulle connessioni fra il corredo nervoso della leptomeninge e dei vasi encefalici e la sostanza nervosa cerebrale, 368.  
 PAVARI A., La difesa contro il cancro corticale del castagno (« Endothia parasitica »), 598.  
 PECINI M., vedi GIOVANNELLA B.  
 PECORINI G., Le dune fossili della Nurra di Alghero (Sardegna), 735.  
 PENSO G. e PRINCIIVALLE M., I fagi dei micobatteri patogeni. Un nuovo fago attivo sul tubercolare umano: « Phagus fromani » n. sp. Nota preventiva, 779.  
 PERINI G., vedi VENTURA M.  
 PERRI T., Correlazioni tra sistema nervoso ed arti. - II. Comportamento degli arti soprannumerari da induzione abnorme, 118.  
 — Correlazioni tra sistema nervoso ed arti. - III. Considerazioni, 291.  
 PERUCCA E., Commemorazione del Corrispondente Alfredo Pochettino, 685.  
 PEYRONEL G., Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano. Nota II, 78.  
 — Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano. Nota III, 231.  
 PINI B., Sulle funzioni sub e super-biarmiche, 702.  
 PINO P., Sintesi dell'acido  $\beta$  carbossil  $\gamma$  carbossimetilpimelico, 640.  
 PORRO A., vedi BENIGNO P.  
 PRINCIPI M. M., Singolari strutture glandolari nel torace e nell'addome dei maschi di alcune specie di Neurotteri Crisopidi, 678.  
 PRINCIIVALLE M., vedi PENSO G.

## Q

- QUERCIOLO E., Sull'azione citologica di cumarine sostituite in rapporto alla loro struttura chimica, 645.

## R

- RAGAZZINI M., vedi SCROCCO E.  
 RAUNICH L., Ricerche sopra le potenze del cercone neurale cefalico, 128.  
 REPOSSI R., vedi ROLLIER M. A.  
 RICCI L., vedi MAZZI V.  
 RIGGIO BEVILACQUA L., Attività piridinucleotidica in « Solanum tuberosum », 107.  
 ROLLIER M. A., TYRÉN H., MALVICINI A. e REPOSSI R., Separazione di isotopi di plutonio da uranio naturale bombardato con protoni, 493.  
 ROSATI M., Sull'equivalenza birazionale delle due varietà di Picard associate ad una varietà superficialmente irregolare, 94.  
 RUSSO A., Il ciclo vitale di « Cryptochilum echini » Mps., a differenza di altri Infusori, ha fenomeni analoghi a quello dei Metazoi, 3.  
 — Ignota potenza, ritenuta causa della proliferazione preblastomatosa, identificata con il potere germinale. Fenomeni che lo dimostrano e sua prevalenza nell'origine dei tumori, 184.

## S

- SACCONI L. e CINI R., La suscettività magnetica del gruppo metilene negli alcoli alifatici misurata con un'apparecchiatura di alta precisione 237.  
 SCAFATI M., Sulle superficie ellittiche con un fascio ellittico di curve di genere quattro, 721.  
 SCE M., Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse. Nota I, 30.  
 — Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse. Nota II, 188.  
 — Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse. Nota III, 321.  
 SCOLLO-LAVIZZARI G., vedi URBANI-MISTRUZZI L.  
 SCROCCO E. e MARMANI G., Sul coefficiente di temperatura del potenziale di ossidoriduzione dei complessi dell'argento mono e bivalente con il dipiridile, 637.  
 — e RAGAZZINI M., Contributo alla conoscenza dei complessi dell'argento mono e bivalente con la fenantrolina, 489.  
 SCROCCO M. vedi CAGLIOTI V.  
 SEIDEL J., Angoli fra due sottospazi di uno spazio sferico od ellittico, 625.  
 SERVETTAZ O., vedi MARRÈ E.

SILVA G., Sull'uso attuale della gravimetria in sussidio della livellazione. — Parte I. Correzioni di primo e di secondo ordine alle differenze di livello osservate per ridurle dinamiche, 170.

— Sull'uso attuale della gravimetria in sussidio della livellazione. — Parte II. Condizioni che rendono trascurabile la riduzione di secondo ordine a quota dinamica, 307.

SIMONETTA M. e FAVINI G., Sulla cinetica della reazione tra nitrocloroderivati aromatici ed alcolati in soluzione alcolica, 84.

SINISCALCO M., Il problema dell'equilibrio genico nelle popolazioni microcitemiche. Nota I, 141.

— Il problema dell'equilibrio genico nelle popolazioni microcitemiche. — II. L'ipotesi del vantaggio selettivo a favore dell'eterozigote per il gene M. Nota II, 298.

SPADA A., vedi IPPOLITO F.

SPADOLINI I. e GIACHETTI A., Sulle condizioni che permettono la contrazione di tipo tetanico nel miocardio ventricolare dei mammiferi, 5.

STEFANELLI A., Il tetto ottico di pesci ciechi cavernicoli nei riguardi del differenziamento specifico dei neuroni, 277.

— Fattore spaziale e organizzazione strutturale nel differenziamento dei neuroni dei lobi ottici e del cervelletto in impianto allanto-coriale nel pollo, 792.

— e CHITI L., Il differenziamento specifico dei neuroni indagato col metodo degli impianti corion-allantoidei nel pollo, 287.

— e URBANI E., Aspetti citochimici della spermioistogenesi di cavia, 282.

## T

TONZIG S. e TREZZI F., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — VIII. Azione dell'acido indol-3-acetico e dell'acido ascorbico sull'assunzione e sulla perdita d'acqua da parte dei tessuti vegetali, 434.

— Ricerche sull'azione dell'acido indol-3-acetico. Nota I, 603.

TONZIG S. e TREZZI F., Ricerche sull'azione dell'acido indol-3-acetico. Nota II, 695.

TOSCHI G. e MARIANI A., Elettroforesi su carta di proteine muscolari. Nota II, 365.

TREZZI F., vedi TONZIG S.

TRICOMI F., Stranezze del « Tricomi-gas », 423.

TYRÉN H., vedi ROLLIER M. A.

## U

URBANI E., Dipeptidasi ad acidi nucleici nel metabolismo della cellula, 556.

— vedi STEFANELLI A.

URBANI MISTRUZZI L., Osservazioni citologiche sulle ghiandole salivari di *Eobania vermiculata* Müll, 123.

— e SCOLLO-LAVIZZARI G., Osservazioni citologiche e citochimiche sulla oogenesi di « *Mytilus edulis* » L., 786.

## V

VACCARO G., Cerchi iperosculatori ad una superficie in un punto e questioni connesse, 35.

VANNINI E., A proposito di recenti osservazioni sulle concentrazioni dei ribonucleoproteidi ed i volumi del nucleolo negli ovociti di « *Antedon rosacea* », 404.

VENTURA M. e PERINI G., Effetti degli antibiotici sui vegetali, 754.

VESENTINI E., Classi caratteristiche e varietà covarianti d'immersione, 199.

VIGLIONE F., vedi FILOGAMO G.

## Y

YANO K., Geometria conforme in varietà quasi hermitiane, 449.

## Z

ZACCHEI A. M., Sul significato del nucleo dell'istmo in base ad osservazioni in Anfibi Anuri, 552.

## INDICE PER MATERIE

### A

**Aerodinamica.** — Stranezze del « Tricomi-gas ». TRICOMI F., 423.

**Analisi.** — Su certe estensioni del concetto di volume. LORCH E. R., 25.

**Analisi matematica.** — Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti. Nota II. BERTOLINI F., 10.

— Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace, in tre variabili indipendenti. BERTOLINI F., 615.

— L'algoritmo della funzione di Dirac. — Giustificazione elementare e applicazioni ad equazioni classiche. CASTOLDI L., 18.

— Caratterizzazione della trasformazione di Laplace mediante la retiva regola di derivazione negli spazi  $L^p$  e  $U$ . DOETSCH G., 444.

— Una formula di approssimazione asintotica per i polinomi di Tchebycheff-Hermite e valutazione numerica del resto. MERLI L., 611.

— Sulle funzioni sub e super-biarmoniche. PINI B., 702.

**Anatomia.** — Prime osservazioni sulle connessioni fra il corredo nervoso della leptomeninge e dei vasi encefalici e la sostanza nervosa cerebrale. PALUMBI G., 368.

**Antropologia.** — Ricerche biometriche sullo sviluppo e sulla senescenza dell'aorta umana. ASCENZI A. e ALISI A., 147.

**Astronomia.** — Sulla distribuzione di equilibrio della materia gassosa negli ammassi globulari. CIMINO M., 215.

— Sul satellite oscuro nel sistema di  $\zeta$  Aquari. Nota I. GIANNUZZI M. A., 221.

— Sul satellite oscuro del sistema  $\zeta$  Aquari. Nota II. GIANNUZZI M. A., 473.

### B

**Biologia.** — Differenziazione e accrescimento della cartilagine di abbozzi scheletrici studiati con l'impiego del radiosolfo. AMPRINO R., 781.

**Biologia.** — Aspetti morfologici della sostanza PAS positiva nei neuroni di Vertebrati in condizioni normali e sperimentali. BAFFONI G. M., 113.

— Sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare. — I. Osservazioni sulla morfogenesi. BAFFONI G. M., 798.

— Sull'importanza delle condizioni di esperimento nello studio della catalasi (ossiforo di Spirito). BONDI C. e CENTAMORI M., 131.

— Sul differenziamento autonomo di neuroni di pollo in impianto in allanto-corion. CHITI L., 542.

— Trapianti tra larve ibride e larve normali: esperienze su « Bufo vulgaris », « Bufo viridis » e loro ibridi. DI NATALE L., 563.

— Caratteri dell'epitelio dell'« Amnios » espuntato « in vitro ». FRANCESCHINI M., 664.

— Sul comportamento di vari tessuti di Teleosteo adulto impiantati nella camera anteriore dell'occhio di Rana. GIOVANNELLA B. e PECINI M., 546.

— Sulla presenza di particolari cellule (gliali?) nella oblongata del Tritone crestato. MAZZI V., 138.

— Le proprietà tintoriali della fucsina paraldeide in alcune strutture dell'encefalo del Tritone crestato. MAZZI V., 266.

— Sulla presenza di uno strato epiteloide nella meninge primitiva di alcuni Teleostei. MAZZI V. e RICCI L., 274.

— Correlazioni tra sistema nervoso ed arti. — II. Comportamento degli arti soprannumerari da induzione abnorme. PERRI T., 118.

— Correlazioni tra sistema nervoso ed arti. — III. Considerazioni, 291.

— Ricerche sopra le potenze del cercine neurale cefalico. RAUNICH L., 128.

— Il ciclo vitale di « Cryptochilum echini » Mps., a differenza di altri Infusori, ha fenomeni analoghi a quello dei Metazoi. RUSSO A., 3.

— Il tetto ottico di pesci ciechi cavernicoli nei riguardi del differenziamento specifico dei neuroni. STEFANELLI A., 277.

**Biologia.** — Fattore spaziale e organizzazione strutturale nel differenziamento dei neuroni dei lobi ottici e del cervelletto in impianto allanto-coriale nel pollo. STEFANELLI A., 792.

— Il differenziamento specifico dei neuroni indagato col metodo degli impianti corion-allantoidei nel pollo. STEFANELLI A. e CHITI L., 287.

— Aspetti citochimici della spermioistogenesi di cavia. STEFANELLI A. e URBANI E., 282.

— Dipeptidasi ed acidi nucleici nel metabolismo della cellula. URBANI E., 556.

— Osservazioni citologiche sulle ghiandole salivari di *Eobania vermiculata* Müll. URBANI MISTRUZZI L., 123.

— Osservazioni citologiche e citochimiche sulla oogenesi di «*Mytilus edulis*» L., URBANI-MISTRUZZI L. e SCOLLO-LAVIZZARI G., 786.

— A proposito di recenti osservazioni sulle concentrazioni dei ribonucleoproteidi ed i volumi del nucleolo negli ovociti di «*Antedon rosacea*». VANNINI E., 404.

— Sul significato del nucleo dell'istmo in base ad osservazioni in Anfibi Anuri. ZACCHEI A. M., 552.

**Botanica.** — Osservazioni morfologiche e fitogeografiche su un paleoendemismo della Sardegna settentrionale: la «*Centaurea horrida*» Bad., DESOLE, 745.

— Il tappeto degli uvuli nelle «*Gymnospermae*». FRANCINI E., 750.

— La difesa contro il cancro corticale del castagno («*Endothia parasitica*»). PAVARI A., 598.

— Effetti degli antibiotici sui vegetali. VENTURA M. e PERINI G., 754.

## C

**Chimica.** — Ricerche spettrofotometriche nell'infrarosso sulle relazioni tra sostanza organica e inorganica nel tessuto osseo. CAGLIOTI V., ASCENZI A. e SCROCCO M., 180.

— Spettro Raman e ultrarosso dell' $\alpha$ -acetiltofene. CHIORBOLI P. e MIRONE P., 243.

— Ricerche sull'equilibrio tra il dicobalto ottacarbonile e il tricarbonile di cobalto. ERCOLI R. e BARBIERI-HERMITTE F., 249.

— Spettro ultrarosso dell'aldeide furilica. MIRONE P., 483.

**Chimica.** — Spettro ultrarosso dell'*N*-metilpirrolo. MIRONE P. e DRUSIANI A. M., 69.

— Sul coefficiente di temperatura del potenziale di ossido-riduzione dei complessi dell'argento mono e bivalente con il dipiridile. SCROCCO E. e MARMANI G., 637.

— Contributo alla conoscenza dei complessi dell'argento mono e bivalente con la fenantrolina. SCROCCO E. e RAGAZZINI M., 489.

**Chimica biologica.** — Elettroforesi su carta di proteine muscolari. Nota II. TOSCHI G. e MARIANI A., 365.

**Chimica fisica.** — Cristallografia differenziale delle polveri. — Analisi di polveri cristalline eterogenee. — Esami differenziali di secondo ordine. Nota III. FERRO R., 74.

— Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano. Nota II. PEYRONEL G., 78.

— Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano. Nota III. PEYRONEL, 231.

— La suscettività magnetica del gruppo metilene negli alcoli alifatici misurata con un'apparecchiatura di alta precisione. SACCONI L. e CINI R., 237.

**Chimica inorganica.** — I composti complessi dell'argento bivalente con l' $\alpha$ - $\alpha_1$ -dipiridile come ossidanti. BARBIERI G. A. e LAVIANCA T., 88.

— Complessi isonitrilici di Palladio (O). MALLATESTA L., 364.

**Chimica nucleare.** — Separazione di isotopi di plutonio da uranio naturale bombardato con protoni. ROLLIER M. A., TYRÉN H., MALVICINI A. e REPOSSI R., 493.

**Chimica organica.** — Sulla struttura di alcune isossazoline 3,5-bisostituite. GRÜNANGER P., 726.

— Sintesi dell'acido  $\beta$  carbossil  $\gamma$  carbossimetilpimelico. PINO P., 640.

**Citogenetica vegetale.** — Sull'azione citologica di cumarine sostituite in rapporto alla loro struttura chimica. QUERCIOLE E., 645.

**Citologia.** — Contributo alla conoscenza morfologica e citochimica della spermatogenesi nei Prosobranchi. La spermatogenesi tipica in «*Murex trunculus*» L. BATAGLIA B., 527.

— Citologia e citochimica della spermatogenesi atipica in «*Murex trunculus*». BATAGLIA B., 670.



**Commemorazioni.** — Commemorazione del Corrispondente Attilio Colacevich (1906-1953). ABETTI G., 409.

— Commemorazione del Corrispondente Laureto Tieri. CARRELLI A., 156.

— Commemorazione del Corrispondente Alfredo Pochettino. PERUCCA E., 685.

**Comunicazioni varie**, 159, 302, 416, 568, 691.

**Congressi**, 805.

**Cosmologia.** — Sull'argomento galileiano della quarta giornata dei « Dialoghi » e sue attinenze col problema fondamentale della Geodesia. NOBILE V., 426.

## E

**Entomologia.** — Singolari strutture glandolari nel torace e nell'addome dei maschi di alcune specie di Neurotteri Crisopidi PRINCIPI M. M., 678.

## F

**Farmacologia.** — Azione dell'ossitettraciclina e dell'eritromicina, sul metabolismo fosforato dello « *Staphylococcus aureus* ». BENIGNO P., PORRO A. e CIMA L., 773.

**Fisica.** — Sullo schema di decadimento del  $^{214}_{84}\text{Po}$ , DEMICHELIS F. e MALVANO R., 724.

— Osservazioni critiche circa nuove soluzioni del paradosso degli orologi. GALLI M., 356.

— L'inerzia non appare sempre proporzionale al peso. MAJORANA Q., 591.

**Fisica matematica.** — Le soluzioni generali della statica a simmetria sferica nell'ultima teoria unitaria di Einstein. DE SIMONI F., 348.

— Sulla rappresentazione del campo elettromagnetico in una guida d'onda a pareti assorbenti. DE SOCIO M., 63.

— Sulle oscillazioni forzate nei sistemi non lineari a due gradi di libertà. GRAFFI D., 176.

— Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica. Nota I. NARDINI R., 225.

— Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica. Nota II. NARDINI R., 341.

**Fisiologia.** — Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili. — I. Qualche rilievo a giustificazione di una ipotesi di lavoro. AMICI A., 257.

— Ancora sugli effetti dell'iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili. — II. Azione dell'associazione stricnina-simpamina sulla rana spinale. AMICI A., 379.

— Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili. III. Azione della stricnina e della simpamina iniettate contemporaneamente, ma in sede diversa. AMICI A., 499.

— Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili. — IV. Sul comportamento di una reazione colorata. AMICI A., 675.

— Alcuni problemi riguardanti l'assorbimento intestinale della  $\text{B}_{12}$ . CAPRARO V. e CRESERI A., 503.

— L'ipertrofia renale compensatoria in animali affetti da ipopituitarismo anteriore ereditario. Relazioni tra preipofisi e processi di iperplasia e ipertrofia dei tessuti. CREPAX P., 373.

— Azione della caffeina sui riflessi spinali nella rana curarizzata non decerebrata. GUALTIEROTTI T., 263.

— Azione della caffeina sui riflessi spinali nella rana curarizzata e decerebrata. GUALTIEROTTI T., 384.

— Effetti dello stiramento su alcune proprietà funzionali del nervo. INFANTELLINA F., 516.

— Effetti delle condizioni di lavoro del muscolo scheletrico sulla depolarizzazione post-tetanica. INFANTELLINA F. e LA GRUTTA G., 399.

— Sulla cause del disordine funzionale del cuore nell'inanizione. L'indipendenza dei bioregolatori esogeni, dal tasso glicemico e dall'intensità delle combustioni tissulari. Il rapporto con i quozienti di combustione protidica. LIVREA G., 763.

— Sulla tossicità di determinati aminoacidi per le larve di « *Bufo vulgaris* » e sull'azione di singoli aminoacidi addizionati ad un alimento naturale e completo per detti organismi. LIVREA G. e COLLOTTI G., 389.

— Sui rapporti tra disordine della nutrizione, istopatologia, istochimica ed attività del miocardio. LIVREA G. e CRAXI P., 508.

**Fisiologia.** — La determinazione del metabolismo con l'ossimetro di Pauling. MARGARIA R., MESCHIA G. e MARRO F., 311.

— Sulle condizioni che permettono la contrazione di tipo tetanico nel miocardio ventricolare dei mammiferi. SPADOLINI I. e GIACHETTI A., 5.

**Fisiologia umana.** — Sul significato funzionale della sostanza fondamentale del cordone ombelicale. FAMIANI V. e AMICI A., 386.

**Fisiologia vegetale.** — Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. X. — Variazioni quantitative dell'acido ascorbico in coleottili di avena e in segmenti di internodio di « *Pisum* » trattati con acido indolacetico. MARRÈ E., 758.

— Trasporto di idrogeno all'ossigeno per la via ossido-riduttiva: trifosfopiridinnucleotide-glutatione-ascorbico in estratti di « *Pisum sativum* ». MARRÈ E. e LAUDI G., 649.

— Ricerche sulla fisionomia respiratoria caratteristica di tessuti in fase di attiva crescita protoplasmatica. Deidrogenasi a TPN e deidrogenasi DPM. MARRÈ E. e SERVETTAZ O., 521.

— Attività piridinnucleotidica in « *Solanum tuberosum* ». RIGGIO BEVILACQUA L., 107.

— Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — VIII. Azione dell'acido indo-3-acetico e dell'acido ascorbico sull'assunzione e sulla perdita d'acqua da parte dei tessuti vegetali. TONZIG S. e TREZZI F., 434.

— Ricerche sull'azione dell'acido indol-3-acetico. Nota I. TONZIG S. e TREZZI F., 603.

— Ricerche sull'azione dell'acido indol-3-acetico. Nota II. TONZIG S. e TREZZI F., 695.

## G

**Genetica.** — Fenomeni di semiletalità in sporidi di « *Ustilago kollerii* » Wells. GRASSO V., 538.

— Il problema dell'equilibrio genico nelle popolazioni microcitemiche. Nota I. SINISCALCO M., 141.

— Il problema dell'equilibrio genico nelle popolazioni microcitemiche. — II. L'ipotesi del vantaggio selettivo a favore del-

l'eterozigote per il gene M. Nota II. SINISCALCO M., 298.

**Geodesia.** — Sulla curvatura tangenziale delle trasformate di curve nelle rappresentazioni affini fra superficie. MARUSSI A., 478.

— Sull'uso attuale della gravimetria in sussidio della livellazione. — Parte I. Correzioni di primo e di secondo ordine alle differenze di livello osservate per ridurle dinamiche. SILVA G., 170.

— Sull'uso attuale della gravimetria in sussidio della livellazione. — Parte II. Condizioni che rendono trascurabile la riduzione di secondo ordine a quota dinamica. SILVA G., 307.

**Geofisica.** — Sulla genesi delle montagne. MATSCHINSKI M., 54.

**Geologia.** — Osservazioni geologiche sulla zona di Monticchio nella bassa valle dell'Agri (Basilicata). IPPOLITO F., LUCINI P. e SPADA A., 92.

— Le dune fossili della Nurra di Alghero (Sardegna). PECORINI G., 735.

**Geometria.** — Interi caratteristici e divisori elementari delle matrici normali di Severi, BENEDICTY M., 716.

— Sugli elementi curvilinei piani  $E_3$  tangenti. BOMPIANI E., 585.

— Su alcune connessioni affini localmente associate ad una assegnata connessione asimmetrica. COSSU A., 193.

— Sopra una superficie dell'ottavo ordine dotata di 157 nodi. GALLARATI D., 454.

— Sopra una proprietà caratteristica delle curve algebriche appartenenti ad una quadrica. MARCHIONNA E., 205.

— Sull'equivalenza birazionale delle due varietà di Picard associate ad una varietà superficialmente irregolare. ROSATI M., 708.

— Cerchi iperosculatori ad una superficie in un punto e questioni connesse. VACCARO G., 35.

— Classi caratteristiche e varietà covarianti d'immersione. VESENTINI E., 199.

— Geometria conforme in varietà quasi hermitiane. YANO K., 449.

**Geometria algebrica.** — Surfaces algébriques à système canonique dégénéré BURNIAT P., 209.

— Superficie algebriche ottuple canoniche di genere geometrico qualunque. BURNIAT P., 326.

**Geometria algebrica.** — Surfaces algébriques de genre géométrique nul et de bigenre quelconque. BURNIAT P., 459.

— Sulle superficie ellittiche con un fascio ellittico di curve di genere quattro. SCATATI M., 721.

**Geometria differenziale.** — Superficie delle quali una semplice infinità di geodetiche sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa. MINEO C., 165.

## I

**Idrodinamica.** — Campi potenziali attorno a schiere di cerchi. COCCHI G., 42.

**Istofisiologia.** — Dimostrazione sperimentale dell'origine delle fibre sensitive viscerali da neuroni dei gangli spinali toracici. FILOGAMO G. e VIGLIONE F., 660.

**Istologia.** — Sulla presenza e sul comportamento del glicogeno nelle cellule del grasso bruno interscapolare di «Mus musculus». GOBETTO A., 656.

## M

**Matematica.** — Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse. Nota I. SCE M., 30.

— Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse. Nota II. SCE M., 188.

— Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse. Nota III. SCE M., 321.

— Angoli fra due sottospazi di uno spazio sferico od ellittico. SEIDEL J., 625.

**Meccanica.** — Sul comportamento energetico di alcuni sistemi meccanici non lineari. CAPRIOLI L., 463.

— Di alcune proprietà cinematiche riguardanti i moti rigidi di rotolamento. FORTE B., 468.

— Sui moti centrali relativi. MASOTTI A., 48.

**Meccanica dei fluidi.** — Sulla trasmissione termica per una piastra piana in corrente incompressibile non permanente; applicazione all'anemometria elettrica. MUGGIA A., 335.

**Microbiologia.** — I fagi dei micobatteri patogeni. Un nuovo fago attivo sul tuber-

colare umano: «Phagus fromani» n. sp. Nota preventiva. PENSO G. e PRINCIVALE M., 779.

**Mineralogia.** — I limiti di sostituzione silicio: alluminio nei minerali magmatici. Nota II. BALCONI M., 101.

**Morfologia.** — Dispositivi di blocco in grosse arterie della loggia ascellare di feti di «Sus Scrofa Dom.». GOBETTO A., 535.

## O

**Opere pervenute in dono all'Accademia,** 162, 305, 419, 584, 693, 806.

## P

**Patologia.** — Ignota potenza, ritenuta causa della proliferazione preblastomatosi, identificata con il potere germinale. Fenomeni che lo dimostrano e sua prevalenza nell'origine dei tumori. RUSSO A., 184.

**Personale accademico,** 159, 302, 416, 574, 691.

**Petrografia.** — Studi sul cristallino di cima d'Asta. — IV. Chimismo delle rocce intrusive di Val Lozen. D'AMICO C., 741.

**Plichi suggellati,** 303, 568.

**Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei,** 161, 577.

**Presentazione di libri,** 159, 303, 417, 571, 692, 803.

**Presentazione di Note e Memorie,** 161, 304, 418, 577, 692, 805.

## R

**Relazioni di Commissioni,** 568.

## T

**Teoria dell'erosione.** — Quelques considérations sur la théorie mathématique des tafoni. Nota I. MATSCHINSKI M., 632.

— Quelques considérations sur la théorie mathématique des tafoni. Nota II. MATSCHINSKI M., 731.

**Topologia.** — Interpretazione topologica dei covarianti di Beniamino Segre. GUGGENHEIMER H., 331.

## INDICI DEI FASCICOLI

## FASCICOLO I.

GENNAIO 1954.

## NOTE DI SOCI

RUSSO A., Il ciclo vitale di « <i>Cryptochilum echini</i> » Mps., a differenza di altri Infusori, ha fenomeni analoghi a quello dei Metazoi . . . . .	Pag. 3
SPADOLINI I. e GIACHETTI A., Sulle condizioni che permettono la contrazione di tipo tetanico nel miocardio ventricolare dei mammiferi (pres. dal Corrisp. <i>I. Spadolini</i> ) . . . . .	5

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

BERTOLINI F., Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti. Nota II (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	Pag. 10
CASTOLDI L., L'algoritmo della funzione di Dirac. - Giustificazione elementare e applicazioni ad equazioni classiche (pres. dal Corrisp. <i>A. Tonolo</i> ) . . . . .	18
LORCH E. R., Su certe estensioni del concetto di volume (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> ) . . . . .	25
SCE M., Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse. Nota I (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	30
VACCARO G., Cerchi iperosculatori ad una superficie in un punto e questioni connesse (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	35
COCCHI G., Campi potenziali attorno a schiere di cerchi (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i> ) . . . . .	42
MASOTTI A., Sui moti centrali relativi (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i> ) . . . . .	48
MATSCHINSKI M., Sulla genesi delle montagne (pres. dal Corrisp. <i>L. Solaini</i> ) . . . . .	54
DE SOCIO M., Sulla rappresentazione del campo elettromagnetico in una guida d'onda a pareti assorbenti (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i> ) . . . . .	63
MIRONE P. e DRUSIANI A. M., Spettro ultrarosso dell'N-metilpirrolo (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i> ) . . . . .	69
FERRO R., Cristallografia differenziale delle polveri. - Analisi di polveri cristalline eterogenee. - Esami differenziali di secondo ordine. Nota III (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i> ) . . . . .	74
PEYRONEL G., Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano. Nota II (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .	78
SIMONETTA M. e FAVINI G., Sulla cinetica della reazione tra nitrocloroderivati aromatici ed alcolati in soluzione alcolica (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .	84
BARBIERI G. A. e LABIANCA T., I composti complessi dell'argento bivalente con l' $\alpha$ - $\alpha$ -dipiridile come ossidanti (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i> ) . . . . .	88
IPPOLITO F., LUCINI P. e SPADA A., Osservazioni geologiche sulla zona di Monticchio nella bassa valle dell'Agri (Basilicata) (pres. dal Socio <i>G. D'Erasmo</i> ) . . . . .	92
BALCONI M., I limiti di sostituzione silicio: alluminio nei minerali magmatici. Nota II (pres. dal Socio <i>U. Panichi</i> ) . . . . .	101
RIGGIO BEVILACQUA L., Attività piridinucleotidasica in « <i>Solanum tuberosum</i> » (pres. dal Corrisp. <i>E. Remotti</i> ) . . . . .	107
BAFFONI G. M., Aspetti morfologici della sostanza PAS positiva nei neuroni di Ver-tebrati in condizioni normali e sperimentali (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	113
PERRI T., Correlazioni tra sistema nervoso ed arti. - II. Comportamento degli arti soprannumerari da induzione abnorme (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	118



URBANI MISTRUZZI L., Osservazioni citologiche sulle ghiandole salivari di <i>Eobania vermiculata</i> Müll. (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	Pag. 123
RAUNICH L., Ricerche sopra le potenze del cercine neurale cefalico (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	128
BONDI C. e CENTAMORI M., Sull'importanza delle condizioni di esperimento nello studio della catalasi (ossiforo di Spirito) (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	131
MAZZI V., Sulla presenza di particolari cellule (gliali?) nella oblungata del Tritone crestato (pres. dal Socio <i>N. Beccari</i> ) . . . . .	138
SINISCALCO M., Il problema dell'equilibrio genico nelle popolazioni microcitemiche. Nota I (pres. dal Corrisp. <i>G. Montalenti</i> ). . . . .	141
ASCENZI A e ALISI A., Ricerche biometriche sullo sviluppo e sulla senescenza dell'aorta umana (pres. dal Socio <i>S. Sergi</i> ) . . . . .	147

## COMMEMORAZIONI

CARRELLI A., Commemorazione del Corrispondente, Laureto Tieri . . . . .	Pag. 156
Personale accademico . . . . .	159
Comunicazioni varie . . . . .	159
Presentazione di libri . . . . .	159
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	161
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei . . . . .	161
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 16 gennaio 1954 . . . . .	162

## FASCICOLO 2.

FEBBRAIO 1954.

## NOTE DI SOCI

MINEO C., Superficie delle quali una semplice infinità di geodetiche sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa . . . . .	Pag. 165
SILVA G., Sull'uso attuale della gravimetria in sussidio della livellazione. - Parte I. Correzioni di primo e di secondo ordine alle differenze di livello osservate per ridurle dinamiche . . . . .	170
GRAFFI D., Sulle oscillazioni forzate nei sistemi non lineari a due gradi di libertà . . . . .	176
CAGLIOTI V., ASCENZI A. e SCROCCO M., Ricerche spettrofotometriche nell'infrarosso sulle relazioni tra sostanza organica e inorganica nel tessuto osseo (pres. dal Corrisp. <i>V. Caglioti</i> ) . . . . .	180
RUSSO A., Ignota potenza, ritenuta causa della proliferazione preblastomatosa, identificata con il potere germinale. Fenomeni che lo dimostrano e sua prevalenza nell'origine dei tumori . . . . .	184

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

SCE M., Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse. Nota II (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	Pag. 188
COSSU A., Su alcune connessioni affini localmente associate ad una assegnata connessione asimmetrica (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> ) . . . . .	193
VESENTINI E., Classi caratteristiche e varietà covarianti d'immersione (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	199
MARCHIONNA E., Sopra una proprietà caratteristica delle curve algebriche appartenenti ad una quadrica (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ). . . . .	205
BURNIAT P., Surfaces algébriques à système canonique dégénéré (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	209

CIMINO M., Sulla distribuzione di equilibrio della materia gassosa negli ammassi globulari (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .	Pag. 215
GIANNUZZI M. A., Sul satellite oscuro nel sistema di $\zeta$ Aquar <sup>i</sup> . Nota I (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .	221
NARDINI R., Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica. Nota I (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i> ) . . .	225
PEYRONEL G., Struttura cristallina dell'esametilciclotrisilossano. Nota III (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .	231
SACCONI L. e CINI R., La suscettività magnetica del gruppo metilene negli alcoli alifatici misurata con un'apparecchiatura di alta precisione (pres. dal Corrisp. <i>V. Caglioti</i> )	237
CHIORBOLI P. e MIRONE P., Spettro Raman e ultrarosso dell' $\alpha$ -acetiltiofene (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i> ) . . . . .	243
ERCOLI R. e BARBIERI-HERMITTE F., Ricerche sull'equilibrio tra il dicobalto ottacarbonile e il tricarbonile di cobalto (pres. dal Corrisp. <i>G. Natta</i> ) . . . . .	249
AMICI A., Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinosimili. - I. Qualche rilievo a giustificazione di una ipotesi di lavoro (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i> ) . . . . .	257
GUALTIEROTTI T., Azione della caffeina sui riflessi spinali nella rana curarizzata non decerebrata (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i> ) . . . . .	263
MAZZI V., Le proprietà tintoriali della fucsina paraldeide in alcune strutture dell'encefalo del Tritone crestato (pres. dal Socio <i>N. Beccari</i> ) . . . . .	266
MAZZI V. e RICCI L., Sulla presenza di uno strato epitelioido nella meninge primitiva di alcuni Teleostei (pres. dal Socio <i>N. Beccari</i> ) . . . . .	274
STEFANELLI A., Il tetto ottico di pesci ciechi cavernicoli nei riguardi del differenziamento specifico dei neuroni (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	277
STEFANELLI A. e URBANI E., Aspetti citochimici della spermioistogenesi di cavia (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	282
STEFANELLI A. e CHITI L., Il differenziamento specifico dei neuroni indagato col metodo degli impianti corion-allantoidei nel pollo (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> )	287
PERRI T., Correlazioni tra sistema nervoso ed arti. - III. Considerazioni (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	291
SINISCALCO M., Il problema dell'equilibrio genico nelle popolazioni microcitemiche. - II. L'ipotesi del vantaggio selettivo a favore dell'eterozigote per il gene M. Nota II (pres. dal Corrisp. <i>G. Montalenti</i> ) . . . . .	298
Comunicazioni varie . . . . .	302
Personale accademico . . . . .	302
Plichi suggellati . . . . .	303
Presentazione di libri . . . . .	303
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	304
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 febbraio 1954	305

## FASCICOLO 3.

MARZO 1954.

## NOTE DI SOCI

SILVA G., Sull'uso attuale della gravimetria in sussidio della livellazione. - Parte II. Condizioni che rendono trascurabile la riduzione di secondo ordine a quota dinamica . . . . .	Pag. 307
MARGARIA R., MESCHIA G. e MARRO F., La determinazione del metabolismo con l'ossimetro di Pauling (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i> ) . . . . .	311

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

SCE M., Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse. Nota III (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	Pag. 321
BURNIAT P., Superficie algebriche ottuple canoniche di genere geometrico qualunque (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	326
GUGGENHEIMER H., Interpretazione topologica dei covarianti di Beniamino Segre (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	331
MUGGIA A., Sulla trasmissione termica per una piastra piana in corrente incompressibile non permanente; applicazione all'anemometria elettrica (pres. dal Corrisp. <i>C. Ferrari</i> ) . . . . .	335
NARDINI R., Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica. Nota II (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i> ) . . . . .	341
DE SIMONI F., Le soluzioni generali della statica a simmetria sferica nell'ultima teoria unitaria di Einstein (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i> ) . . . . .	348
GALLI M., Osservazioni critiche circa nuove soluzioni del paradosso degli orologi (pres. dal Socio <i>G. Abetti</i> ) . . . . .	356
MALATESTA L., Complessi isonitrici di Palladio (O) (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .	364
TOSCHI G. e MARIANI A., Elettroforesi su carta di proteine muscolari Nota II (pres. dal Socio <i>D. Marotta</i> ) . . . . .	365
PALUMBI G., Prime osservazioni sulle connessioni fra il corredo nervoso della leptomeninge e dei vasi encefalici e la sostanza nervosa cerebrale (pres. dal Socio <i>A. Pensa</i> ) . . . . .	368
CREPAX P., L'ipertrofia renale compensatoria in animali affetti da ipopituitarismo anteriore ereditario. Relazioni tra preipofisi e processi di iperplasia e ipertrofia dei testicoli (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> ) . . . . .	373
AMICI A., Ancora sugli effetti dell'iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinomimetiche. - II. Azione dell'associazione stricnina-simpamina sulla rana spinale (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i> ) . . . . .	379
GUALTIEROTTI T., Azione della caffeina sui riflessi spinali nella rana curarizzata e decerebrata (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i> ) . . . . .	384
FAMIANI V. e AMICI A., Sul significato funzionale della sostanza fondamentale del cordone ombelicale (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i> ) . . . . .	386
LIVREA G. e COLLOTTI G., Sulla tossicità di determinati aminoacidi per le larve di « <i>Bufo vulgaris</i> » e sull'azione di singoli aminoacidi addizionati ad un alimento naturale e completo per detti organismi (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i> ) . . . . .	389
INFANTELLINA F. e LA GRUTTA G., Effetti delle condizioni di lavoro del muscolo scheletrico sulla depolarizzazione post-tetanica (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> ) . . . . .	399
VANNINI E., A proposito di recenti osservazioni sulle concentrazioni dei ribonucleoproteidi ed i volumi del nucleolo negli ovociti di « <i>Antedon rosacea</i> » (pres. dal Corrisp. <i>U. D'Ancona</i> ) . . . . .	404

## COMMEMORAZIONI

ABETTI G., Commemorazione del Corrispondente Attilio Colacevich (1906-1953) . . . . .	Pag. 409
Comunicazioni varie . . . . .	416
Personale accademico . . . . .	416
Presentazione di libri . . . . .	417
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	418
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 marzo 1954. . . . .	419



## FASCICOLO 4.

APRILE 1954.

## NOTE DI SOCI

TRICOMI F., Stranezze del «Tricomi-gas» . . . . .	Pag. 423
NOBILE V., Sull'argomento galileiano della quarta giornata dei «Dialoghi» e sue attinenze col problema fondamentale della Geodesia . . . . .	426
TONZIG S. e TREZZI F., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - VIII. Azione dell'acido indol-3-acetico e dell'acido ascorbico sull'assunzione e sulla perdita d'acqua da parte dei tessuti vegetali (pres. dal Socio S. Tonzig) . . . . .	434

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

DOETSCH G., Caratterizzazione della trasformazione di Laplace mediante la relativa regola di derivazione negli spazi $L^p$ e $U$ (pres. dal Socio M. Picone) . . . . .	Pag. 444
YANO K., Geometria conforme in varietà quasi hermitiane (pres. dal Socio E. Bonipiani) . . . . .	449
GALLARATI D., Sopra una superficie dell'ottavo ordine dotata di 157 nodi (pres. dal Socio B. Segre) . . . . .	454
BURNIAT P., Surfaces algébriques de genre géométrique nul et de bigenre quelconque (pres. dal Socio B. Segre) . . . . .	459
CAPRIOLI L., Sul comportamento energetico di alcuni sistemi meccanici non lineari (pres. dal Corrisp. D. Graffi) . . . . .	463
FORTE B., Di alcune proprietà cinematiche riguardanti i moti rigidi di rotolamento (pres. dal Socio A. Signorini) . . . . .	468
GIANNUZZI M. A., Sul satellite oscuro del sistema $\zeta$ Aquari. Nota II (pres. dal Socio G. Armellini) . . . . .	473
MARUSSI A., Sulla curvatura tangenziale delle trasformate di curve nelle rappresentazioni affini fra superficie (pres. dal Socio G. Cassinis) . . . . .	478
MIRONE P., Spettro ultrarosso dell'aldeide furilica (pres. dal Socio G. B. Bonino) . . . . .	483
SCROCCO E. e RAGAZZINI M., Contributo alla conoscenza dei complessi dell'argento mono e bivalente con la fenantrolina (pres. dal Socio B. G. Bonino) . . . . .	489
ROLLIER M. A., H. TYRÉN, MALVICINI A. e REPOSSI R., Separazione di isotopi di plutonio da uranio naturale bombardato con protoni (pres. dal Corrisp. A. Quilico) . . . . .	493
AMICI A., Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinomimili. - III. Azione della stricnina e della simpamina iniettate contemporaneamente, ma in sede diversa (pres. dal Corrisp. G. Amantea) . . . . .	499
CAPRARO V. e CRESSERI A., Alcuni problemi riguardanti l'assorbimento intestinale della $B_{12}$ (pres. dal Socio R. Margaria) . . . . .	503
LIVREA G. e CRAXI P., Sui rapporti tra disordine della nutrizione, istopatologia, istochimica ed attività del miocardio (pres. dal Corrisp. G. Amantea) . . . . .	508
INFANTELLINA F., Effetti dello stiramento su alcune proprietà funzionali del nervo (pres. dal Socio G. C. Pupilli) . . . . .	516
MARRÈ E. e SERVETTAZ O., Ricerche sulla fisionomia respiratoria caratteristica di tessuti in fase di attiva crescita protoplasmatica. Deidrogenasi a TPN e deidrogenasi a DPN (pres. dal Socio S. Tonzig) . . . . .	521



BATTAGLIA B., Contributo alla conoscenza morfologica e citochimica della spermatogenesi nei Prosobranchi. La spermatogenesi tipica in « <i>Murex trunculus</i> L.» (pres. dal Corrisp. U. D'Ancona) . . . . .	Pag. 527
GOBETTO A., Dispositivi di blocco in grosse arterie della loggia ascellare di feti di « <i>Sus Scrofa</i> Dom.» (pres. dal Socio G. Levi) . . . . .	535
GRASSO V., Fenomeni di semiletalità in sporidi di « <i>Ustilago kolleri</i> » Wells (pres. dal Socio A. Chiarugi) . . . . .	538
CHITI L., Sul differenziamento autonomo di neuroni di pollo in impianto in allanto-corion (pres. dal Socio G. Cotronei) . . . . .	542
GIOVANELLA B. e PECINI M., Sul comportamento di vari tessuti di Teleosteo adulto impiantati nella camera anteriore dell'occhio di Rana (pres. dal Socio G. Cotronei) . . . . .	546
ZACCHEI A. M., Sul significato del nucleo dell'istmo in base ad osservazioni in Anfibi Anuri (pres. dal Socio G. Cotronei) . . . . .	552
URBANI E., Dipeptidasi ed acidi nucleici nel metabolismo della cellula (pres. dal Socio G. Cotronei) . . . . .	556
DI NATALE L., Trapianti tra larve ibride e larve normali: esperienze su « <i>Bufo vulgaris</i> », « <i>Bufo viridis</i> » e loro ibridi (pres. dal Socio G. Cotronei) . . . . .	563
Comunicazioni varie . . . . .	568
Plichi suggellati . . . . .	568
Relazioni di Commissioni . . . . .	568
Presentazione di libri . . . . .	571
Personale accademico . . . . .	574
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	577
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei . . . . .	577
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 10 aprile 1954 . . . . .	584

## FASCICOLO 5.

MAGGIO 1954.

## NOTE DI SOCI

BOMPIANI E., Sugli elementi curvilinei piani $E_3$ tangenti . . . . .	Pag. 585
MAJORANA Q., L'inerzia non appare sempre proporzionale al peso . . . . .	591
PAVARI A., La difesa contro il cancro corticale del castagno (« <i>Endothia parasitica</i> ») . . . . .	598
TONZIG S. e TREZZI F., Ricerche sull'azione dell'acido indol-3-acetico. Nota I (pres. dal Socio S. Tonzig) . . . . .	603

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

MERLI L., Una formula di approssimazione asintotica per i polinomi di Tchebychef-Hermite e valutazione numerica del resto (pres. dal Socio G. Sansone) . . . . .	Pag. 611
BERTOLINI F., Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace, in tre variabili indipendenti (pres. dal Socio M. Picone) . . . . .	615
SEIDEL J., Angoli fra due sottospazi di uno spazio sferico od ellittico (pres. dal Socio B. Segre) . . . . .	625
MATSCHINSKI M., Quelques considérations sur la théorie mathématique des tafoni. Nota I (pres. dal Socio L. Rolla) . . . . .	632
SCROCCO E. e MARMANI G., Sul coefficiente di temperatura del potenziale di ossido-riduzione dei complessi dell'argento mono e bivalente con il dipiridile (pres. dal Socio G. B. Bonino) . . . . .	637

PINO P., Sintesi dell'acido $\beta$ carbossil $\gamma$ carbossimetilpimelico (pres. dal Corrisp. <i>G. Natta</i> ) . . . . .	Pag. 640
QUERCIOLI E., Sull'azione citologica di cumarine sostituite in rapporto alla loro struttura chimica (pres. dal Socio <i>A. Chiarugi</i> ) . . . . .	645
MARRÈ E. e LAUDI G., Trasporto di idrogeno all'ossigeno per la via ossidoriduttiva: trifosfopiridinnucleotide-glutazione-ascorbico in estratti di « <i>Pisum sativum</i> » (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . .	649
GOBETTO A., Sulla presenza e sul comportamento del glicogeno nelle cellule del grasso bruno interscapolare di « <i>Mus musculus</i> » (pres. dal Socio <i>G. Levi</i> ) . . . . .	656
FILOGAMO G. e VIGLIONE F., Dimostrazione sperimentale dell'origine delle fibre sensitive viscerali da neuroni dei gangli spinali toracici (pres. dal Socio <i>G. Levi</i> ) . . . . .	660
FRANCESCHINI M., Caratteri dell'epitelio dell'« <i>amnios</i> » espantato « in vitro » (pres. dal Socio <i>G. Levi</i> ) . . . . .	664
BATTAGLIA B., Citologia e citochimica della spermatogenesi atipica in « <i>Murex trunculus</i> » (pres. dal Corrisp. <i>U. D'Ancona</i> ) . . . . .	670
AMICI A., Sugli effetti della iniezione contemporanea di stricnina e sostanze adrenalinomili. - IV. Sul comportamento di una reazione colorata (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i> ) . . . . .	675
PRINCIPI M. M., Singolari strutture glandolari nel torace e nell'addome dei maschi di alcune specie di Neurotteri Crisopidi (pres. dal Corrisp. <i>G. Grandi</i> ) . . . . .	678

## COMMEMORAZIONI

PERUCCA E., Commemorazione del Corrispondente Alfredo Pochettino . . . . .	Pag. 685
Personale accademico . . . . .	691
Comunicazioni varie . . . . .	691
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	692
Presentazione di libri . . . . .	692
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'8 maggio 1954 . . . . .	693

## FASCICOLO 6.

GIUGNO 1954.

## NOTE DI SOCI

TONZIG S. e TREZZI F., Ricerche sull'azione dell'acido indol-3-acetico. Nota II (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . .	Pag. 695
---	----------

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

PINI B., Sulle funzioni sub e super-biarmoniche (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	Pag. 702
ROSATI M., Sull'equivalenza birazionale delle due varietà di Picard associate ad una varietà superficialmente irregolare (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	708
BENEDICTY M., Interi caratteristici e divisori elementari delle matrici normali di Severi (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	716
SCAFATI M., Sulle superficie ellittiche con un fascio ellittico di curve di genere quattro (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	721
DE MICHELIS F. e MALVANO R., Sullo schema di decadimento del $^{214}_{84}\text{Po}$ (pres. dal Socio <i>E. Perucca</i> ) . . . . .	724



GRÜNANGER P., Sulla struttura di alcune isossazoline 3,5-bisostituite (pres. dal Corrisp. A. Quilico) . . . . .	Pag. 726
MATSCHINSKY M., Quelques considération sur la théorie mathématique des tafoni. Nota II (pres. dal Socio L. Rolla) . . . . .	731
PECORINI G., Le dune fossili della Nurra di Alghero (Sardegna) (pres. dal Corrisp. S. Vardabasso) . . . . .	735
D'AMICO C., Studi sul cristallino di Cima d'Asta. - IV. Chimismo delle rocce intrusive di Val Lozen (pres. dal Corrisp. C. Andreatta) . . . . .	741
DESÒLE L., Osservazioni morfologiche e fitogeografiche su un paleoendemismo della Sardegna settentrionale: la «Centaurea horrida» Bad. (pres. dal Socio A. Chia-rugi) . . . . .	745
FRANCINI E., Il tappeto degli ovuli nelle «Gymnospermae» (pres. dal Socio A. Chia-rugi) . . . . .	750
VENTURA M. e PERINI G., Effetti degli antibiotici sui vegetali (pres. dal Socio A. Chia-rugi) . . . . .	754
MARRÈ E., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - X. Variazioni quantitative dell'acido ascorbico in coleottili di avena e in segmenti di internodio di «Pisum» trattati con acido indolacetico (pres. dal Socio S. Tonzig) . . . . .	758
LIVREA G., Sulle cause del disordine funzionale del cuore nell'inanizione. L'indipendenza dai bioregolatori esogeni, dal tasso glicemico e dall'intensità delle combustioni tissulari. Il rapporto con i quozienti di combustione protidica (pres. dal Corrisp. G. Amantea) . . . . .	763
BENIGNO P., PORRO A. e CIMA L., Azione dell'ossitettraciclina e dell'eritromicina sul metabolismo fosforato dello Staphilococcus aureus» (pres. dal Socio E. Mene-ghetti) . . . . .	773
PENSO G. e PRINCIVALLE M., I fagi dei micobatteri patogeni. Un nuovo fago attivo sul tubercolare umano: «Phagus fromani» n. sp. (pres. dal Socio G. Vernoni). . . . .	779
AMPRINO R., Differenziazione e accrescimento della cartilagine di abbozzi scheletrici studiati con l'impiego del radiosolfo (pres. dal Socio G. Levi) . . . . .	781
URBANI-MISTRUZZI L. e SCOLLO-LAVIZZARI G., Osservazioni citologiche e citochimiche sulla oogenesi di «Mytilus edulis» L. (pres. dal Socio G. Cotronei) . . . . .	786
STEFANELLI A., Fattore spaziale e organizzazione strutturale nel differenziamento dei neuroni dei lobi ottici e del cervelletto in impianto allanto-coriale nel pollo (pres. dal Socio G. Cotronei) . . . . .	792
BAFFONI G. M., Sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare. - I. Osservazioni sulla morfogenesi (pres. dal Socio G. Cotronei) . . . . .	798
Presentazione di libri . . . . .	803
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	805
Congressi . . . . .	805
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 9 giugno 1954 . . . . .	806
Indice per Autori . . . . .	809
Indice per materie . . . . .	814
Indici dei fascicoli . . . . .	819